ΜΕΡΟΣ Β΄

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Συμμετρία

2.1 Συμμετρία ως προς άξονα

- *Γνωρίζω πότε δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς ευθεία*
- *Γνωρίζω πότε δύο σχήματα είναι συμμετρικά ως προς ευθεία και ότι τα συμμετρικά ως προς ευθεία σχήματα είναι ίσα*
- *Βρίσκω το συμμετρικό σημείο ευθυγράμμου τμήματος, ευθείας, τριγώνου, γωνίας και κύκλου ως προς μία ευθεία και γνωρίζω τις γεωμετρικές ιδιότητες που απορρέουν από τη συμμετρία αυτή*

2.2 Άξονας συμμετρίας

- *Αναγνωρίζω σχήματα με άξονα ή άξονες συμμετρίας*

2.3 Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος

- *Χαράσσω τη μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος με τη βοήθεια βαθμολογημένου κανόνα και γνώμονα*
- *Γνωρίζω τη χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος*
- *Χαράσσω τη μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος με κανόνα και διαβήτη*

2.4 Συμμετρία ως προς σημείο

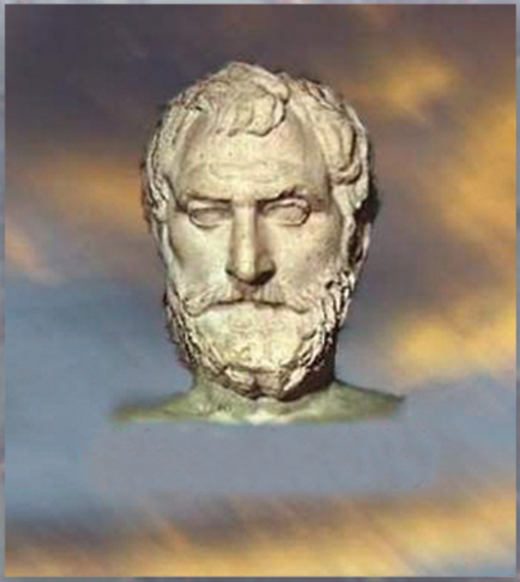
- *Γνωρίζω ότι η συμμετρία ως προς κέντρο Ο είναι μια στροφή γύρω από το Ο κατά γωνία 180°*
- *Γνωρίζω πότε δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς σημείο*
- *Γνωρίζω πότε δύο σχήματα είναι συμμετρικά ως προς σημείο και ότι αυτά τα συμμετρικά σχήματα είναι ίσα*
- *Κατασκευάζω το συμμετρικό σημείου, ευθυγράμμου τμήματος, ευθείας, γωνίας, τριγώνου, πολυγώνου και κύκλου ως προς σημείο*

2.5 Κέντρο συμμετρίας

- *Αναγνωρίζω σχήματα με κέντρο συμμετρίας*
- *Γνωρίζω τα βασικά γεωμετρικά σχήματα με κέντρο συμμετρίας και τις γεωμετρικές ιδιότητες που απορρέουν από τη συμμετρία αυτή*

2.6 Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία

- *Γνωρίζω πώς ονομάζονται τα ζεύγη των γωνιών που σχηματίζονται από την τομή δύο παραλλήλων με μία τέμνουσά τους.*
- *Διαπιστώνω ότι όλες οι οξείες (ή οι αμβλείες) γωνίες, που σχηματίζουν δύο παράλληλες οι οποίες τέμνονται από τρίτη ευθεία, είναι ίσες*
- *Διαπιστώνω ότι μία οξεία και μία αμβλεία γωνία από τις γωνίες που σχηματίζονται από την τομή δύο παραλλήλων από την τρίτη ευθεία είναι παραπληρωματικές*



ΘΑΛΗΣ Ο ΜΙΛΗΣΙΟΣ
(640 -546 π.Χ.)

MEƒ√™ µ-2-(199-216)-(20,5 Ã 28)   16-09-08   20:13   ™ÂÏ›‰·200

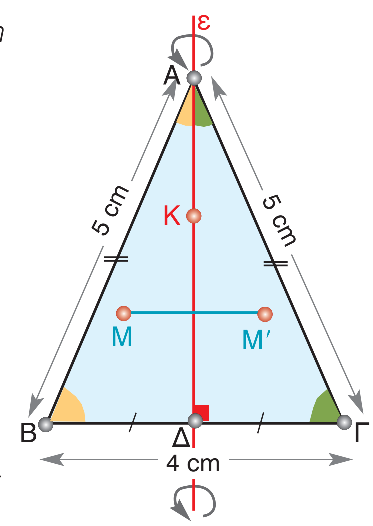
Β.2.1. Συμμετρία ως προς άξονα

Τι είναι συμμετρία; Ο ποιητής θα έλεγε: ό,τι φορέεται από την ανάποδη. Ό,τι διπλώνει και ταιριάζει, ό,τι στρίβει και «συμπίπτει». Μόνο η φαντασία δεν έχει καθόλου συμμετρία. Γι' αυτό η συμμετρία χρειάζεται και λίγη φαντασία. Αν αυτή ακριβώς τη φαντασία τη φορέσουμε ανάποδα, θα μας βγει όλη η Γεωμετρία.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Κατασκεύασε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 5 cm και ΒΓ = 4 cm και τη διάμεσό του ΑΔ.
Δίπλωσε το σχήμα κατά μήκος της ευθείας ε που ανήκει η ΑΔ.

➢ *Τι παρατηρείς;*



Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα **ΑΒΔ** και **ΑΓΔ** συμπίπτουν. Αυτό σημαίνει, ότι κάθε σημείο του ενός τριγώνου συμπίπτει με ένα σημείο του άλλου τριγώνου. Για παράδειγμα, το **Β** συμπίπτει με το **Γ**. Τα σημεία αυτά λέγονται **συμμετρικά ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ε**.

Με τη δίπλωση κατά μήκος της ευθείας **ε**, κάθε σημείο της συμπίπτει με τον εαυτό του. Επομένως συμμετρικό του **Α** είναι το **Α**, του **Δ** το **Δ** και ενός οποιουδήποτε σημείου **Κ** της **ε** το ίδιο το **Κ**.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Συμμετρικό σημείου **Β** ως προς ευθεία **ε**, είναι το σημείο **Γ** με το οποίο συμπίπτει το **Β**, αν διπλώσουμε το φύλλο κατά μήκος της ευθείας **ε**.

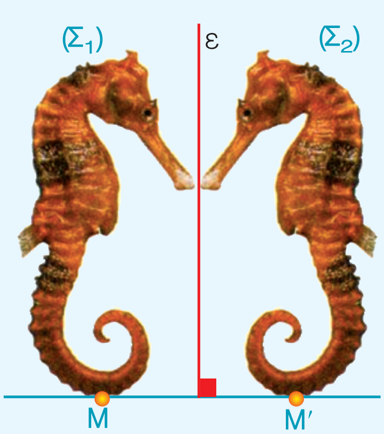
► **Κάθε σημείο μιας ευθείας ε είναι συμμετρικό του εαυτού του ως προς την ε.**

Όπως είδαμε, με τη δίπλωση κατά μήκος της ευθείας **ε** κάθε σημείο του τριγώνου **ΑΒΔ** συμπίπτει με ένα σημείο του τριγώνου **ΑΓΔ**. Αυτό σημαίνει ότι καθένα από τα τρίγωνα αυτά αποτελείται από τα συμμετρικά όλων των σημείων του άλλου τριγώνου ως προς την ευθεία **ε**.
Γι' αυτό λέμε ότι:

◆ Τα τρίγωνα **ΑΒΔ** και **ΑΓΔ** είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία **ε**.

Γενικότερα:

- Δύο σχήματα (Σ_1) και (Σ_2) λέγονται **συμμετρικά** ως προς μία ευθεία **ε**, όταν καθένα αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του άλλου ως προς την **ε**.



Επειδή με δίπλωση κατά μήκος της **ε** συμπίπτει το (Σ_1) με το (Σ_2), γνωρίζουμε ότι αυτά θα είναι ίσα. Επομένως:

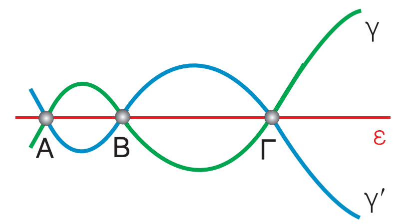
◆ **Τα συμμετρικά ως προς ευθεία σχήματα είναι ίσα**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Μια γραμμή γ τέμνει την ευθεία ε στα σημεία Α, Β και Γ. Να βρεθεί ο λόγος για τον οποίο και η συμμετρική γ′ της γ, ως προς την ευθεία ε, θα περνάει από τα ίδια σημεία.*

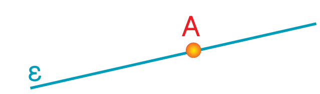
Λύση

Η συμμετρική γραμμή **γ′** της **γ** ως προς την **ε**, αποτελείται από τα συμμετρικά όλων των σημείων της **γ**. Επομένως στη **γ′** ανήκουν και τα συμμετρικά σημεία των **Α, Β** και **Γ**. Επειδή όμως τα **Α, Β** και **Γ** είναι σημεία της **ε** τα συμμετρικά τους είναι τα ίδια τα σημεία. Άρα τα **Α**, **Β** και **Γ** ανήκουν και στη **γ′**.



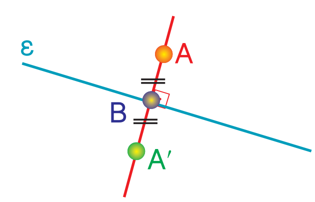
2. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό Α′ σημείου Α ως προς μια ευθεία ε.*

Λύση



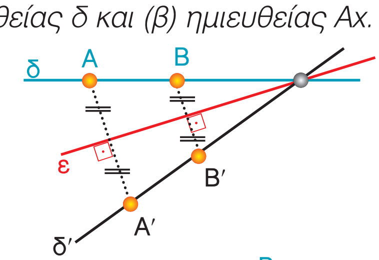
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Το σημείο **Α ανήκει** στην ευθεία **ε**. Τότε, όπως είδαμε, το συμμετρικό του είναι το **ίδιο το σημείο Α**.
- Το σημείο **Α δεν ανήκει** στην ευθεία **ε**. Τότε, για να βρούμε το συμμετρικό του, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία: Φέρνουμε το κάθετο τμήμα **ΑΒ** από το σημείο **Α** προς την ευθεία **ε** και το προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα, ώστε να είναι ΒΑ′ = ΑΒ. Το σημείο **Α′** είναι το συμμετρικό του **Α** ως προς την ευθεία **ε**.



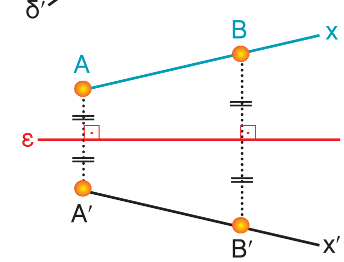
3. *Να κατασκευαστεί η συμμετρική ως προς ευθεία ε: (α) ευθείας δ και (β) ημιευθείας Αx.*

Λύση



(α) Παίρνουμε δύο σημεία **Α** και **Β** πάνω στην ευθεία **δ** και βρίσκουμε, όπως περιγράφεται στην εφαρμογή 3, τα συμμετρικά τους **Α′** και **Β′**, ως προς την **ε**. Η ευθεία **δ′** που ορίζουν τα **Α′** και **Β′** είναι η συμμετρική της ευθείας **δ**.

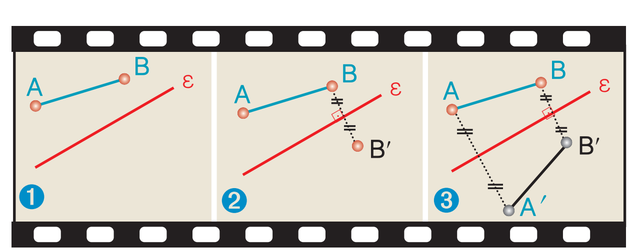
(β) Παρόμοια παίρνουμε, εκτός του **Α**, ένα δεύτερο σημείο **Β** πάνω στην ημιευθεία **Αx** και βρίσκουμε, όπως πριν, τα συμμετρικά τους **Α′** και **Β′** ως προς την **ε**. Η ημιευθεία **Α′x′** που ορίζουν τα **Α′** και **Β′** είναι η συμμετρική της ημιευθείας **Αx**.



4. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό Α′Β′ ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, ως προς μια ευθεία ε.*

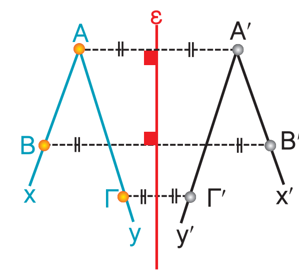
Λύση

Βρίσκουμε με τον τρόπο που είδαμε στην εφαρμογή 3, τα συμμετρικά **Α′** και **Β′**, ως προς την **ε**, των **Α** και **Β** αντίστοιχα. Τότε το ευθύγραμμο τμήμα **Α′Β′** θα είναι το συμμετρικό του **ΑΒ**, ως προς την ευθεία **ε**.



Τα συμμετρικά ευθύγραμμα τμήματα θα είναι μεταξύ τους ίσα, δηλαδή: **Α′Β′ = ΑΒ**

5. *Να κατασκευαστεί η συμμετρική γωνίας $x\hat{A}y$ ως προς μία ευθεία ε.*



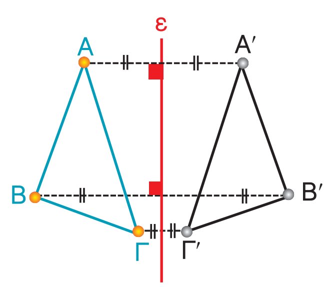
Λύση

Για να κατασκευάσουμε τη γωνία $x'\hat{A}'y'$ αρκεί να βρούμε το συμμετρικό **Α′** της κορυφής **Α** καθώς και τα συμμετρικά **Β′** και **Γ′** δύο ακόμα σημείων **Β** και **Γ**, που ανήκουν το καθένα σε μια από τις πλευρές της αντίστοιχα.
Γνωρίζουμε ότι θα είναι: $x'\hat{A}'y' = x\hat{A}y$.

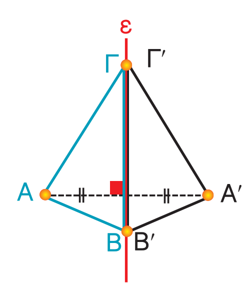
6. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό Α′Β′Γ′ ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς μία ευθεία ε, η οποία (α) δεν τέμνει τις πλευρές του, (β) διέρχεται από δύο κορυφές του και (γ) τέμνει τις δύο πλευρές του.*

Λύση

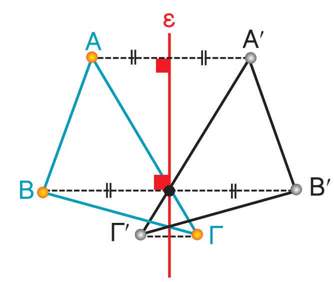
Σε κάθε περίπτωση βρίσκουμε τα συμμετρικά **Α′, Β′, Γ′**, ως προς την **ε**, των κορυφών **Α, Β, Γ** του τριγώνου. Τότε το τρίγωνο **ΑΒΓ** έχει συμμετρικό το τρίγωνο **Α′Β′Γ′**, που είναι ίσο με το **ΑΒΓ**.



(Η ε δεν τέμνει τις πλευρές)

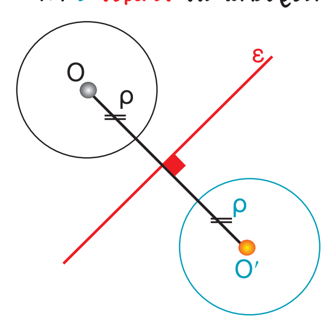


(Η ε διέρχεται από τα Β και Γ)



(Η ε τέμνει τις πλευρές)

7. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό κύκλου (Ο, ρ) ως προς ευθεία ε.*



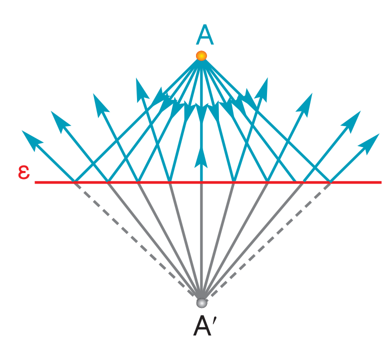
Λύση

Το συμμετρικό του κύκλου **(Ο, ρ)** ως προς την ε είναι κύκλος **(Ο′, ρ)** ίσος με τον **(Ο, ρ)**, με **Ο′** συμμετρικό του **Ο** ως προς την **ε**. Όπως όλα τα συμμετρικά σχήματα, οι κύκλοι **(Ο, ρ)** και **(Ο′, ρ)** είναι **ίσοι**, δηλαδή έχουν ίσες ακτίνες.

8. *Να χαραχθεί η πορεία των ακτίνων του φωτός, που εκπέμπονται από ένα φωτεινό σημείο Α και ανακλώνται σ' έναν επίπεδο καθρέφτη (ο οποίος στο σχήμα φαίνεται ως μία ευθεία ε).*

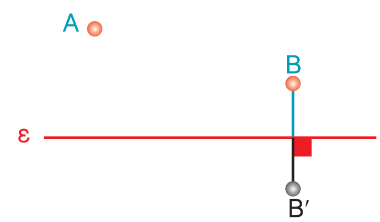
Λύση

Βρίσκουμε το συμμετρικό **Α′** του σημείου **Α** ως προς την ευθεία **ε**.
Οι ακτίνες ανακλώνται στον καθρέφτη και ακολουθούν την πορεία, που θα είχαν, αν η πηγή του φωτός ήταν το σημειο **Α′**. Επειδή οι γωνίες που σχηματίζουν οι ακτίνες με την **ε** είναι συμμετρικές, θα είναι και ίσες.
Άρα, η γωνία με την οποία μια ακτίνα πέφτει στον καθρέφτη είναι ίση με τη γωνία με την οποία ανακλάται.



9. *Στο σχήμα τα σημεία Β και Β′ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ε. Να βρεθεί με τη βοήθεια μόνο του χάρακα το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε.*

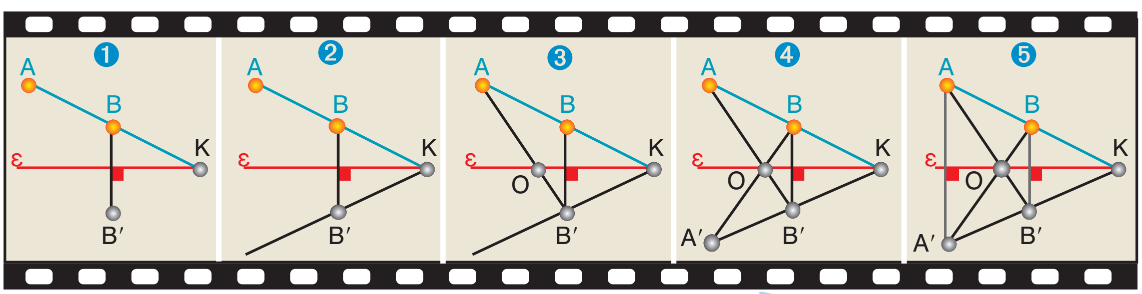
Λύση



Επειδή με το χάρακα μπορούμε να φέρουμε μόνο ευθείες γραμμές, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα, όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα:

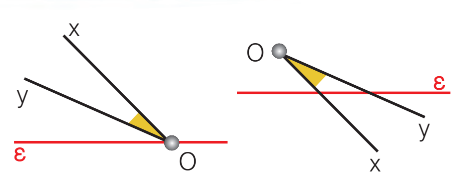
- Φέρνουμε την ευθεία **ΑΒ** και την προεκτείνουμε μέχρι να τμήσει τον άξονα **ε** στο σημείο **Κ**.
- Φέρνουμε την ευθεία **ΚΒ′**, η οποία είναι συμμετρική της **ΚΒ**, αφού ενώνει δύο συμμετρικά σημεία αυτής, τα **Κ** και **Β′**.
- Φέρνουμε την **ΑΒ′**, που τέμνει την **ε** στο **Ο**.
- Τέλος, φέρνουμε την **ΒΟ**, που η συμμετρική της είναι η **ΟΒ′**.

Οι ευθείες **ΚΒ′** και **ΒΟ** είναι συμμετρικές των **ΚΒ** και **Β′Ο** αντίστοιχα και οι τομές τους θα είναι συμμετρικά σημεία, τα **Α** και **Α′**.

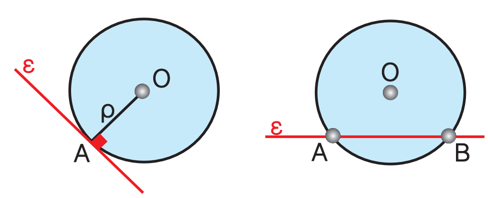


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

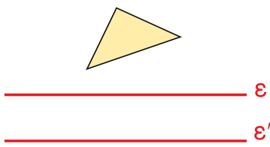
1. *Να βρεις τη συμμετρική της γωνίας $x\hat{O}y$ ως προς την ευθεία ε, σε καθεμιά από τις δύο περιπτώσεις.*



2. *Να βρεις το συμμετρικό του κύκλου (Ο, ρ) ως προς την ευθεία ε σε καθεμιά από τις δύο περιπτώσεις.*



3. *Να βρεις το συμμετρικό του σχήματος ως προς την ευθεία ε και το συμμετρικό του νέου σχήματος ως προς την ευθεία ε′, η οποία είναι παράλληλη με την ε. Τι σχέση έχουν το αρχικό και το τελευταίο σχήμα; Να επαναλάβεις το ίδιο και με μια τρίτη παράλληλη. Τι παρατηρείς;*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. *Βρες το συμμετρικό ενός τριγώνου ως προς μια ευθεία ε και το συμμετρικό του νέου τριγώνου ως προς μία άλλη ευθεία ζ. Τι σχέση έχουν το αρχικό και το τελευταίο τρίγωνο; Να επαναλάβεις το ίδιο και με τρίτη ευθεία.*

2. *Προσπάθησε να δείξεις, ότι το συμμετρικό σχήμα ως προς άξονα δ μιας ευθείας ε παράλληλης προς τη δ, είναι ευθεία παράλληλη προς την ευθεία ε.*

Β.2.2. Άξονας συμμετρίας

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σχεδίασε σ' ένα διαφανές χαρτί μια ευθεία. Τοποθέτησε το διαφανές αυτό χαρτί πάνω σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα. Εξέτασε αν υπάρχει θέση τέτοια που τα δύο μέρη, στα οποία η ευθεία "χωρίζει" το σχήμα, συμπίπτουν, όταν το διπλώσεις κατά μήκος της ευθείας, ακριβώς στη θέση αυτή.

➢ *Προσπάθησε να βρεις αν υπάρχει και άλλη θέση στην οποία μπορείς να παρατηρήσεις το ίδιο φαινόμενο για το ίδιο σχήμα.*

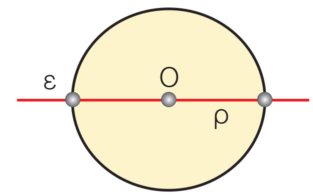
Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **'Αξονας συμμετρίας** σχήματος ονομάζεται η ευθεία που χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη, τα οποία συμπίπτουν όταν διπλωθεί το σχήμα κατά μήκος της ευθείας. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι **το σχήμα έχει άξονα συμμετρίας** την ευθεία αυτή.

  ▶ Όταν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας, το συμμετρικό του ως προς τον άξονα αυτόν είναι το ίδιο το σχήμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθούν οι άξονες συμμετρίας του κύκλου και του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου (Ο,ρ).



Λύση

Με δίπλωση διαπιστώνουμε ότι η ευθεία **ε** πάνω στην οποία βρίσκεται μια οποιαδήποτε διάμετρος του κύκλου **(Ο,ρ)** είναι άξονας συμμετρίας του κύκλου και του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.

Επομένως:

- **Οποιαδήποτε ευθεία διέρχεται από το κέντρο του κύκλου είναι άξονας συμμετρίας του κύκλου και του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.**

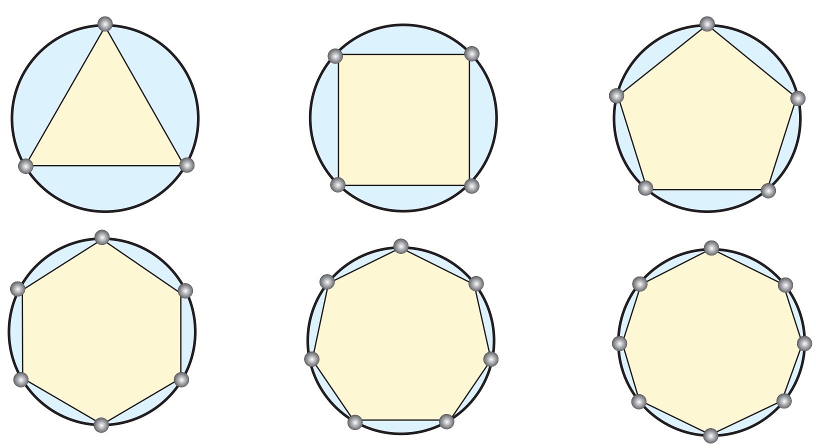
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Να επιλέξεις τη σωστή απάντηση:*
Κάθε κύκλος και ο αντίστοιχος κυκλικός δίσκος έχουν:

❑ *Ένα άξονα συμμετρίας*
❑ *Άπειρους άξονες συμμετρίας*
❑ *Κανένα άξονα συμμετρίας.*

2. *Εξέτασε αν τα κεφαλαία γράμματα του αλφαβήτου* **Α, Ι, Γ** *και* **Θ** *έχουν:*
(α) κανένα, (β) ένα, (γ) περισσότερους από ένα άξονες συμμετρίας.

3. *Σχεδίασε τους άξονες συμμετρίας των παρακάτω γεωμετρικών σχημάτων.*



4. *Σχεδίασε τους άξονες συμμετρίας του σχήματος που δημιουργείται από δύο ίσους τεμνόμενους κύκλους.*

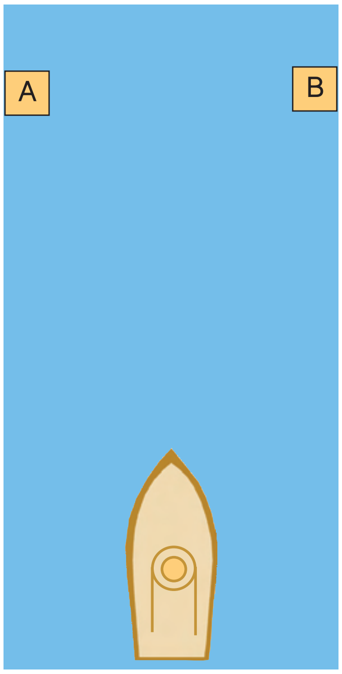
5. *Βρες τους άξονες συμμετρίας του σχήματος που δημιουργείται από δύο κύκλους με διαφορετικές ακτίνες, όταν: (α) έχουν το ίδιο κέντρο και (β) έχουν διαφορετικά κέντρα.*

Β.2.3. Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ο καπετάνιος του πλοίου προσπαθεί να κρατήσει την πορεία του πλοίου το ίδιο μακριά από τις βάσεις Α και Β της γέφυρας, επειδή η στενότητα του περάσματος, ο αέρας και η γνωστή παλίρροια του Ευβοϊκού κόλπου επιδρούν στην πορεία των καραβιών και κάνουν τη διέλευση επικίνδυνη.

Μπορείς να υποδείξεις την πορεία που πρέπει να έχει ένα πλοίο για να περάσει με ασφάλεια το στενό του Ευρίππου;



- *Τι είναι η πορεία του πλοίου σε σχέση με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ;*
- *Τι είναι τα σημεία Α και Β μεταξύ τους σε σχέση με την πορεία του πλοίου;*
- *Ποια σημαντική ιδιότητα πρέπει να έχουν τα σημεία της πορείας αυτής;*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος** λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη προς αυτό και διέρχεται από το μέσον του.
- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος έχει **ίσες αποστάσεις (ισαπέχει)** από τα άκρα του.
- Κάθε σημείο που **ισαπέχει** από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη **μεσοκάθετό** του.
- Η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι **άξονας συμμετρίας** του.

Κατά τον Ευκλείδη *οι Κατασκευές, στηρίζονται σε* τρεις κανόνες (“αιτήματα”)
- Από δύο σημεία να διέρχεται μία μόνο ευθεία
- Ένα ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται απεριόριστα
- Ο κύκλος ορίζεται με ένα σημείο (κέντρο) και ένα ευθύγραμμο τμήμα (ακτίνα)

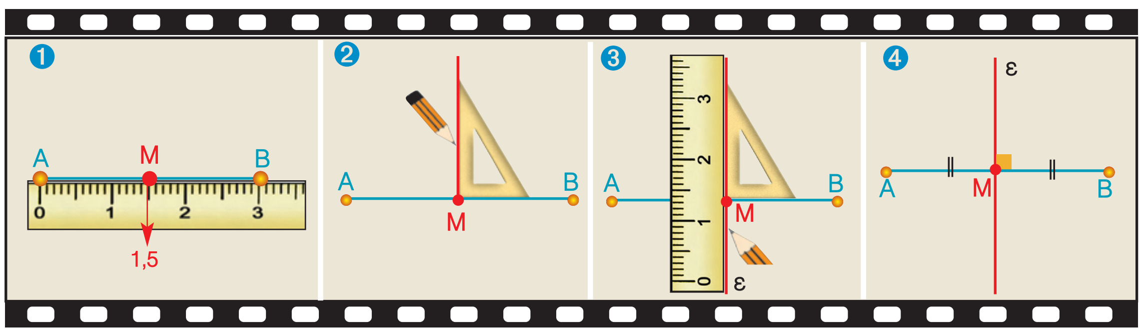
Με βάση τους παραπάνω κανόνες (“αιτήματα”) μπορούν να γίνουν οι κατασκευές όλων των γεωμετρικών σχημάτων με τη χρήση “του κανόνα και του διαβήτη”. (“Κανόνας” είναι ένας χάρακας χωρίς υποδιαιρέσεις για να χαράζουμε ευθείες και όχι για να κάνουμε μετρήσεις μηκών). Οι κατασκευές αυτές απαιτούν μεγαλύτερη επιδεξιότητα και γνώση, δίνουν όμως ακριβέστερα αποτελέσματα και βοηθούν να αποφεύγονται λάθη, που οφείλονται σε ατέλειες των οργάνων που χρησιμοποιούμε στην πράξη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να σχεδιαστεί η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, με τη βοήθεια του υποδεκάμετρου και του γνώμονα.*

Λύση

Προσδιορίζουμε το μέσον **Μ** του ευθυγράμμου τμήματος **ΑΒ** με το υποδεκάμετρο και στη συνέχεια με το γνώμονα σχεδιάζουμε την ευθεία **ε**, που διέρχεται από το **Μ** και είναι κάθετη στο **ΑΒ**.



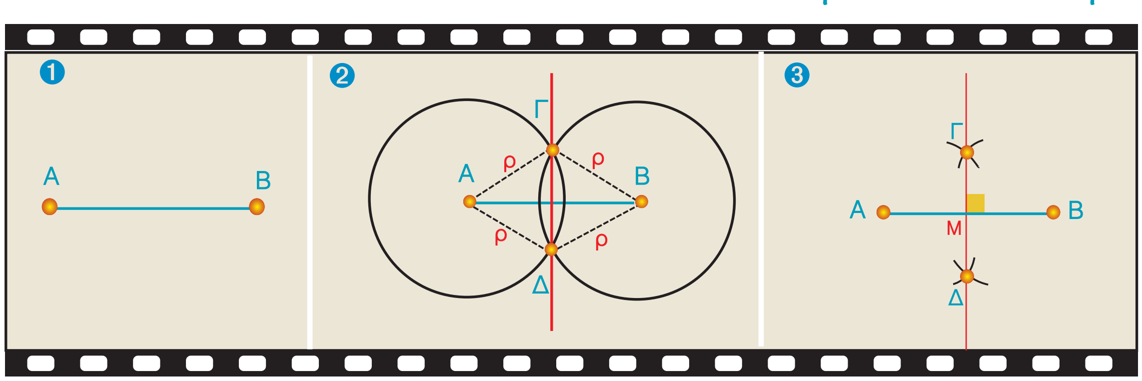
2. *Να σχεδιαστεί η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, χωρίς τη βοήθεια του υποδεκάμετρου και του γνώμονα, αλλά μόνο με τη χρήση "του κανόνα και του διαβήτη".*

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η μεσοκάθετος, όπως κάθε ευθεία, ορίζεται από δύο σημεία και ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Για να σχεδιάσουμε τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος **ΑΒ** πρέπει να βρούμε δύο σημεία που να ισαπέχουν από τα **Α** και **Β**. Γράφουμε, λοιπόν, δύο ίσους κύκλους με κέντρα τα άκρα **Α** και **Β** του ευθυγράμμου τμήματος και με ακτίνα **ρ** (μεγαλύτερη από το μισό μήκος του **ΑΒ**, για να τέμνονται).

Τα σημεία **Γ** και **Δ**, στα οποία τέμνονται οι δύο κύκλοι ορίζουν την ευθεία που είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος **ΑΒ**, διότι δύο σημεία της, τα **Γ** και **Δ**, απέχουν εξίσου από τα άκρα **Α** και **Β**, αφού είναι $ΓΑ = ΓΒ = ρ$ και $ΔΑ = ΔΒ = ρ$.



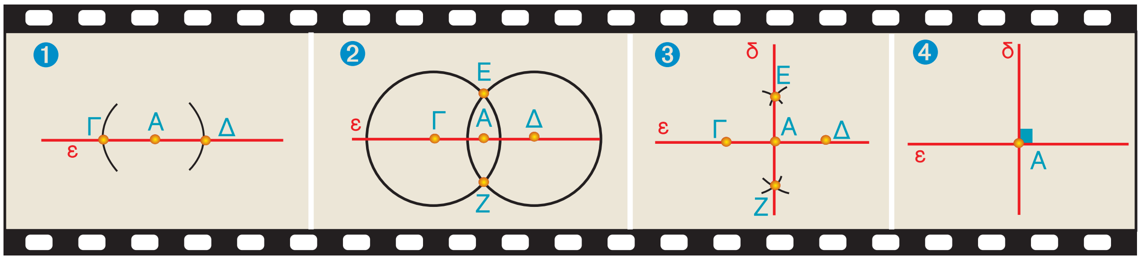
- Με την κατασκευή της **μεσοκαθέτου** του ευθυγράμμου τμήματος **ΑΒ**, βρήκαμε με ακρίβεια και το μέσο **Μ**, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε υποδεκάμετρο.

MEƒ√™ µ-2-(199-216)-(20,5 Ã 28)   16-09-08   20:14   ™ÂÏ›‰·208

3. *Να κατασκευαστεί ευθεία δ κάθετη σε ευθεία ε στο σημείο της Α.*

Λύση

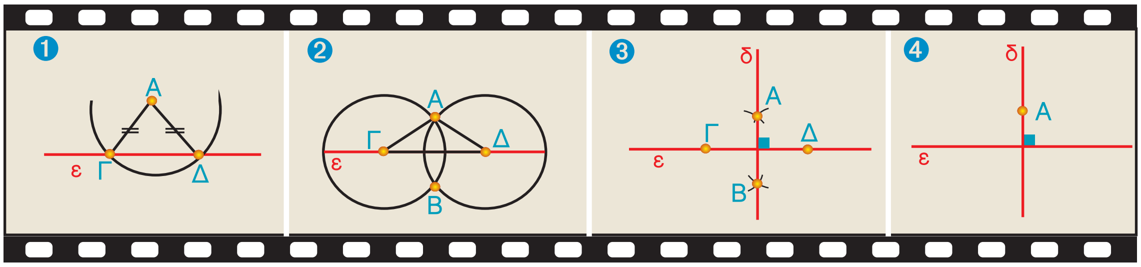
Γράφουμε κύκλο με κέντρο το **Α** και τυχαία ακτίνα, που τέμνει την **ε** σε δύο σημεία **Γ** και **Δ**. Επειδή το **Α** είναι μέσο του **ΓΔ,** αρκεί να φέρουμε τη μεσοκάθετο του **ΓΔ** που διέρχεται από το μέσο του **Α** και είναι κάθετη στην **ε**.



4. *Να κατασκευαστεί η κάθετη δ μιας ευθείας ε από σημείο Α εκτός αυτής.*

Λύση

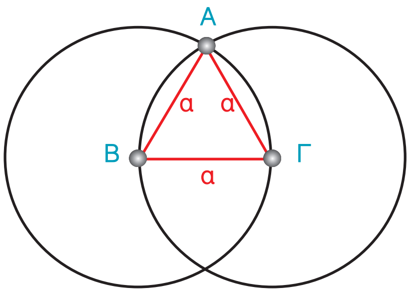
Γράφουμε κύκλο με κέντρο το **Α** και ακτίνα τέτοια ώστε να τέμνει την **ε** σε δύο σημεία **Γ** και **Δ**. Επειδή το **Α** ισαπέχει από τα **Γ** και **Δ**, θα είναι σημείο της μεσοκαθέτου του τμήματος **ΓΔ**. Επομένως, αρκεί να φέρουμε, με τον τρόπο που μάθαμε στην εφαρμογή 2, τη μεσοκάθετο του **ΓΔ** που διέρχεται από το **Α**.



5. *Να κατασκευαστεί ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α.*

Λύση

Γράφουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα **ΒΓ = α**.
Με κέντρα τα άκρα **Β** και **Γ** και ακτίνα ίση με **α** γράφουμε δύο κύκλους. Έστω **Α** το ένα σημείο από τα δύο που τέμνονται οι κύκλοι αυτοί.
Το τρίγωνο **ΑΒΓ** είναι το ζητούμενο ισόπλευρο, διότι έχει όλες τις πλευρές του ίσες με **α**, ως ακτίνες ίσων κύκλων ακτίνας **α**.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:*

(α) Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη ....

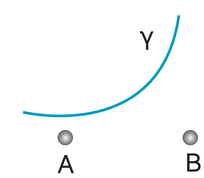
(β) Με την κατασκευή της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, βρήκαμε με ακρίβεια και το .... του, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε υποδεκάμετρο.

(γ) Δύο σημεία Μ και Μ′ είναι συμμετρικά ως προς ευθεία ε, όταν η ε είναι .... του τμήματος ΜΜ′.

2. *Να χαράξεις ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη να το χωρίσεις σε δύο ίσα τμήματα και στη συνέχεια σε τέσσερα ίσα τμήματα.*

3. *Σχεδίασε έναν κύκλο και μια ακτίνα του ΚΑ. Βρες δύο σημεία του κύκλου, που το καθένα να ισαπέχει από τα Κ και Α.*

4. *Στο διπλανό σχήμα η καμπύλη γραμμή γ παριστά τμήμα της διαδρομής του αστικού λεωφορείου. Οι κάτοικοι των οικισμών Α και Β αποφάσισαν να κατασκευάσουν μια στάση, που να απέχει εξίσου από τους δύο οικισμούς. Βρες το κατάλληλο σημείο της διαδρομής και δικαιολόγησε τη λύση που θα δώσεις.*



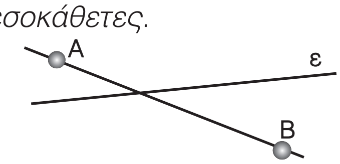
5. *Να βρεις το σημείο της όχθης ενός ποταμού το οποίο ισαπέχει από δύο χωριά Α και Β.*

6. *Σχεδίασε ένα τρίγωνο και βρες με ακρίβεια τα μέσα των πλευρών του.*

7. *Σχεδίασε έναν κύκλο με κέντρο Κ και μια χορδή του ΑΒ. Να κατασκευάσεις τη μεσοκάθετο της χορδής ΑΒ και να ονομάσεις Μ και Ν τα σημεία στα οποία τέμνει τον κύκλο. (α) Σύγκρινε τις χορδές ΜΑ και ΜΒ και δικαιολόγησε το αποτέλεσμα της σύγκρισης, (β) κάνε το ίδιο και για τις χορδές ΝΑ και ΝΒ, (γ) βρες εάν το κέντρο Κ του κύκλου είναι σημείο της μεσοκαθέτου και δικαιολόγησε την απάντησή σου.*

8. *Σχεδίασε τις μεσοκάθετες τριών χορδών ενός κύκλου και εξέτασε αν υπάρχει σημείο στο σχήμα σου, από το οποίο να διέρχονται και οι τρεις μεσοκάθετες.*

9. *Στο διπλανό σχήμα βρες εκείνο το σημείο της ε, που να ισαπέχει από τα σημεία Α και Β.*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. *Σχεδίασε έναν κύκλο με ένα νόμισμα. Πώς μπορείς να βρεις το κέντρο του;*

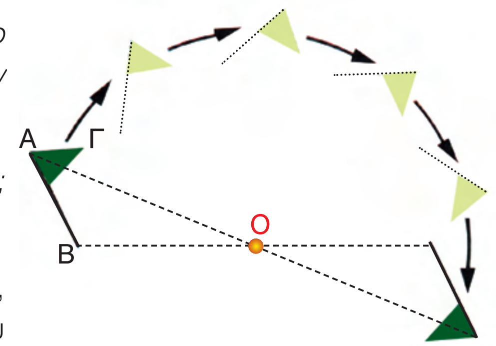
2. *Τρεις οικογένειες κατασκήνωσαν σ' ένα κάμπινγκ και τοποθέτησαν τις σκηνές τους $Σ_1$, $Σ_2$ και $Σ_3$ έτσι ώστε: $Σ_1Σ_2 = 3{,}8$ m, $Σ_1Σ_3 = 2$ m και $Σ_2Σ_3 = 3{,}5$ m. Να σχεδιάσεις τη διάταξη των σκηνών σε σχέδιο με κλίμακα 1:100 και να βρεις το σημείο Ν, που πρέπει να τοποθετηθεί ένα ντους, ώστε και οι τρεις σκηνές να απέχουν εξίσου απ' αυτό. Υπάρχουν πολλές τέτοιες θέσεις; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.*

Β.2.4. Συμμετρία ως προς σημείο

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αν περιστραφεί το σχήμα ΑΒΓ, γύρω από το σημείο Ο κατά 180°, παίρνει μια νέα θέση την Α′Β′Γ′.

➢ *Τι συμπεραίνεις για τα σχήματα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′;*



Σκεφτόμαστε

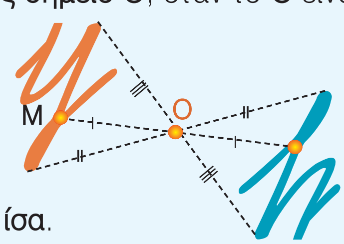
Παρατηρούμε ότι όταν ολοκληρωθεί η στροφή αυτή, κάθε σημείο του **ΑΒΓ** συμπίπτει με ένα σημείο του **Α′Β′Γ′**. Για παράδειγμα, θα συμπέσουν τα σημεία **Α** και **Α′**.

- Τα **σημεία** αυτά λέγονται **συμμετρικά**, ως προς κέντρο **Ο**. Δηλαδή:
- Συμμετρικό σημείου **Α** ως προς κέντρο **Ο**, είναι το σημείο **Α′**, με το οποίο συμπίπτει το **Α**, αν περιστραφεί περί το **Ο** κατά **180°**.

Ισχύει ότι:

▶ Δύο σημεία **Μ** και **Μ′** είναι **συμμετρικά ως προς σημείο Ο**, όταν το **Ο** είναι **μέσο** του τμήματος **ΜΜ′**.

- Δύο σχήματα λέγονται **συμμετρικά ως προς σημείο Ο**, όταν κάθε σημείο του ενός είναι συμμετρικό ενός σημείου του άλλου ως προς το **Ο**.



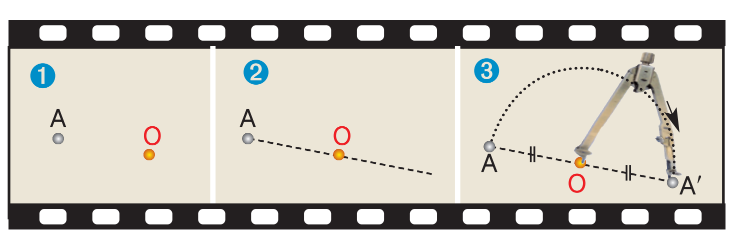
▶ **Τα συμμετρικά ως προς σημείο σχήματα είναι ίσα.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να βρεθεί το συμμετρικό Α′ του σημείου Α, ως προς σημείο Ο.*

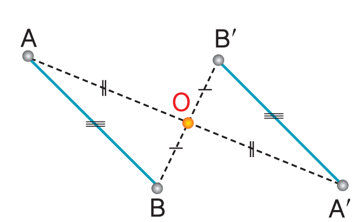
Λύση

Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό **Α′** ενός σημείου **Α** ως προς σημείο **Ο**, φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα **ΑΟ** και στην προέκτασή του (με το υποδεκάμετρο ή με το διαβήτη) παίρνουμε ίσο τμήμα **ΟΑ′**, όπως δείχνουν οι παραπάνω εικόνες.



2. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό Α′Β′ ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ ως προς σημείο Ο.*

Λύση



Το συμμετρικό ενός ευθυγράμμου τμήματος **ΑΒ** ως προς σημείο **Ο,** είναι ευθύγραμμο τμήμα **Α′Β′**. Για να το κατασκευάσουμε αρκεί να βρούμε τα σημεία **Α′** και **Β′**, που είναι τα συμμετρικά των **Α** και **Β** ως προς **Ο**.

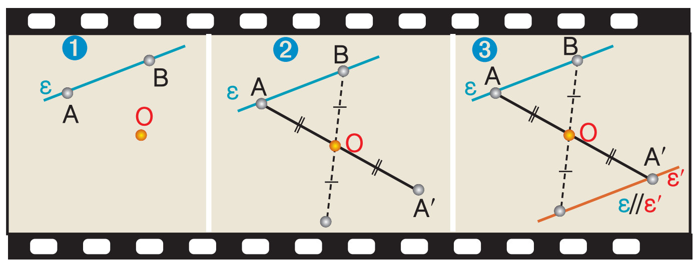
Παρατηρούμε ότι είναι: **Α′Β′ = ΑΒ** και **Α′Β′ // ΑΒ**.

3. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό ως προς σημείο Ο: (α) μιας ευθείας ε και (β) μιας ημιευθείας Αx.*

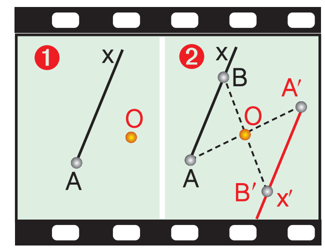
Λύση

Παίρνουμε δύο σημεία **Α** και **Β** πάνω στην ευθεία **ε** ή την ημιευθεία **Αx** και βρίσκουμε, όπως παραπάνω, τα συμμετρικά ως προς το **Ο**. Η προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος **Α′Β′** είναι η **ε′** ή η **Α′x′**, που είναι συμμετρική της ευθείας **ε** ή της ημιευθείας **Αx** αντίστοιχα.

(α)



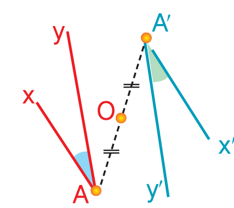
(β)



4. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό σχήμα μιας γωνίας $x\hat{A}y$ ως προς σημείο Ο.*

Λύση

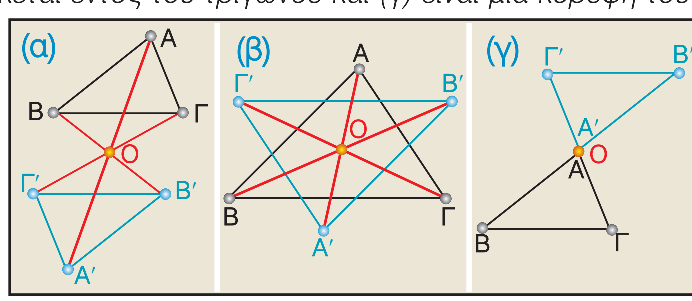
Βρίσκουμε το συμμετρικό **Α′** της κορυφής **Α** και τις συμμετρικές ημιευθείες **Α′x′** και **Α′y′** των δύο πλευρών της **Αx** και **Αy** αντίστοιχα ως προς το **Ο**, όπως μάθαμε προηγουμένως. Τότε, η γωνία $x'\hat{A}'y'$ είναι συμμετρική της $x\hat{A}y$ και είναι ίση μ' αυτή.



5. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό Α′Β′Γ′ ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς σημείο Ο, το οποίο (α) είναι εκτός τριγώνου, (β) βρίσκεται εντός του τριγώνου και (γ) είναι μία κορυφή του.*

Λύση

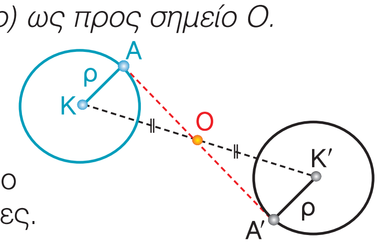
Και στις τρεις περιπτώσεις, βρίσκουμε τα συμμετρικά **Α′**, **Β′**, **Γ′**, ως προς το **Ο**, των κορυφών **Α**, **Β**, **Γ** του τριγώνου. Τότε το τρίγωνο **ΑΒΓ** έχει συμμετρικό το τρίγωνο **Α′Β′Γ′**, που είναι ίσο με το **ΑΒΓ**.



6. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό σχήμα ενός κύκλου (Κ, ρ) ως προς σημείο Ο.*

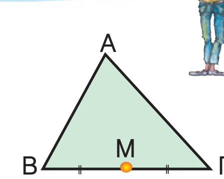
Λύση

Βρίσκουμε το συμμετρικό ως προς το **Ο** του κέντρου **Κ** και ενός σημείου του κύκλου **Α,** που είναι τα σημεία **Κ′** και **Α′** αντίστοιχα. Γράφουμε τον κύκλο (**Κ′**, **ρ=Κ′Α′**) που είναι ο ζητούμενος. Οι δύο κύκλοι είναι ίσοι διότι έχουν ίσες ακτίνες.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Να κατασκευάσεις τα συμμετρικά Β′, Μ′ και Γ′ των Β, Μ και Γ αντίστοιχα ως προς το Α και να δικαιολογήσεις ότι το Μ′ είναι μέσο του Β′Γ′. (Το Μ είναι το μέσο της ΒΓ).*



2. *Να σχεδιάσεις τρίγωνο ΑΒΔ και το συμμετρικό Γ της κορυφής του Α ως προς το μέσον Ο της πλευράς ΒΔ. Πώς μπορείς να χαρακτηρίσεις το τετράπλευρο ΑΒΓΔ;*

Β.2.5. Κέντρο συμμετρίας

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Βρες ένα σημείο, σε κάθε ένα από τα παρακάτω σχήματα, γύρω από το οποίο προσπάθησε να περιστρέψεις το σχήμα αυτό κατά 180° και να παρατηρήσεις εάν συμπίπτει ή όχι με τον εαυτό του, μετά την ολοκλήρωση της περιστροφής αυτής.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

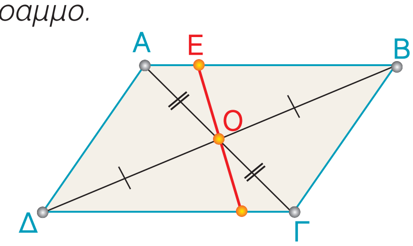
Κέντρο συμμετρίας σχήματος ονομάζεται ένα σημείο του **Ο**, γύρω από το οποίο αν περιστραφεί το σχήμα κατά **180°**, συμπίπτει με το αρχικό.
Στην περίπτωση που υπάρχει τέτοιο σημείο, λέμε ότι το σχήμα έχει **κέντρο συμμετρίας** το σημείο **Ο**.

► Όταν ένα σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας, το συμμετρικό του ως προς το κέντρο αυτό είναι το ίδιο το σχήμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

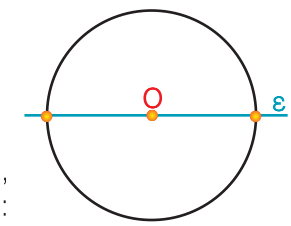
1. *Το συμμετρικό παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του, είναι το ίδιο το παραλληλόγραμμο.*

Λύση



Παρατηρούμε, ότι ένα σημείο Ε του παραλληλογράμμου, με στροφή κατά 180° γύρω από το Ο, θα συμπέσει με ένα άλλο σημείο Ε′ του ίδιου του παραλληλογράμμου. Αυτό συμβαίνει για όλα τα σημεία του ΑΒΓΔ, επομένως το συμμετρικό του ως προς το Ο είναι πάλι το ίδιο το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.

2. *Ποιο είναι το κέντρο συμμετρίας ενός κύκλου;*



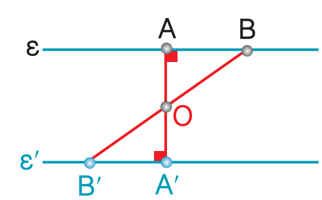
Λύση

Με στροφή κατά 180° γύρω από το κέντρο Ο του κύκλου, διαπιστώνουμε ότι αυτός συμπίπτει με τον εαυτό του. Επομένως:

► **Το κέντρο του κύκλου είναι κέντρο συμμετρίας του καθώς και του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.**

3. *Να αποδειχθεί ότι το συμμετρικό σχήμα μιας ευθείας ε, ως προς κέντρο Ο, είναι ευθεία ε′//ε.*

Λύση



Φέρνουμε την απόσταση ΟΑ του Ο από την **ε**. Έστω Β ένα άλλο σημείο της **ε**. Βρίσκουμε τα συμμετρικά Α′ και Β′ των σημείων Α και Β ως προς το Ο και ονομάζουμε **ε′** την ευθεία που διέρχεται από τα Α′και Β′. Η ευθεία **ε′** είναι συμμετρική της **ε** ως προς κέντρο συμμετρίας το Ο.
Η γωνία $O\hat{A}'B'$ θα είναι συμμετρική της γωνίας $O\hat{A}B$.
Επειδή οι συμμετρικές γωνίες είναι ίσες, θα είναι: $O\hat{A}'B' = O\hat{A}B = 90^\circ$. Άρα, οι ευθείες **ε** και **ε′** είναι κάθετες στην ίδια ευθεία ΑΑ′, συνεπώς μεταξύ τους παράλληλες.

► **Οι συμμετρικές ως προς σημείο ευθείες, είναι μεταξύ τους παράλληλες.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Αφού γράψεις τα κεφαλαία γράμματα του αλφαβήτου, εξέτασε αν έχουν κέντρο συμμετρίας.*

2. *Να βρεις στα παρακάτω σχήματα το κέντρο συμμετρίας, αν υπάρχει.*

3. *Τοποθέτησε ένα "Χ" στις κατάλληλες θέσεις, για τη θετική σου απάντηση.*

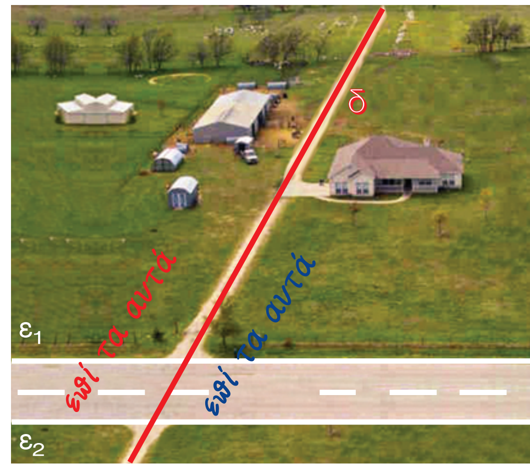
	Άξονες συμμετρίας						Έχει Κέντρο Συμμετρίας
	Κανένα	Ένα	Δύο	Τρεις	Τέσσερις	Περισσότερους	
Ευθύγραμμο τμήμα							
Ισοσκελές τρίγωνο							
Ισόπλευρο τρίγωνο							
Παραλληλόγραμμο							
Ορθογώνιο							
Ρόμβος							
Τετράγωνο							
Κύκλος							

Β.2.6. Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στη διπλανή εικόνα βλέπουμε ένα δημόσιο δρόμο να διασχίζει δύο αγροκτήματα.

Οι παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 ορίζουν τα όρια του δρόμου αυτού και χωρίζουν τη γη σε τρεις ζώνες.

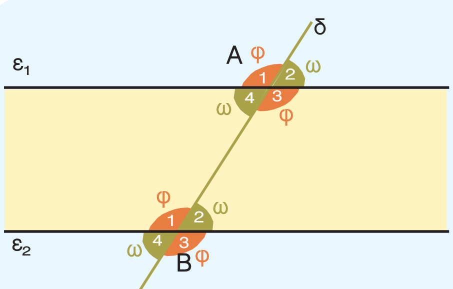


Δώσε μια συγκεκριμένη κοινή ονομασία για όλα τα σημεία που βρίσκονται στην άσφαλτο του δρόμου, δηλαδή στη ζώνη ανάμεσα στις ευθείες ε_1 και ε_2, καθώς και μία άλλη κοινή ονομασία γιά όλα τα σημεία που βρίσκονται έξω απ' αυτή, δηλαδή στα χωράφια.

Στην ίδια εικόνα υπάρχει ένας χωματόδρομος που χωρίζει τα δύο αγροκτήματα και ορίζει μια ευθεία δ που είναι το σύνορο μεταξύ τους.

- *Πώς μπορείς να δώσεις μια κοινή ονομασία σε όλα τα σημεία που ανήκουν στο ίδιο και μόνο αγρόκτημα;*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



- Οι γωνίες που βρίσκονται ανάμεσα στις ευθείες **ε₁** και **ε₂** ονομάζονται **"εντός"** (των ευθειών) και όλες οι άλλες **"εκτός"**.

  $\hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{B}_1, \hat{B}_2$ είναι "εντός" και

  $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_3, \hat{B}_4$ είναι "εκτός"

- Οι γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας **δ** ονομάζονται **"επί τα αυτά"** (μέρη της ευθείας)

  $\hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{B}_2, \hat{B}_3$ είναι "επί τα αυτά" και

  $\hat{A}_1, \hat{A}_4, \hat{B}_1, \hat{B}_4$ είναι "επί τα αυτά"

- Δύο γωνίες που βρίσκονται η μία στο ένα κι η άλλη στο άλλο ημιεπίπεδο της ευθείας **δ**, λέγονται μεταξύ τους **"εναλλάξ"**.

  π.χ. η $\hat{A}_4$ με την $\hat{B}_2$ είναι "εναλλάξ" αλλά και η $\hat{A}_2$ με την B_1 είναι "εναλλάξ" κ.ο.κ.

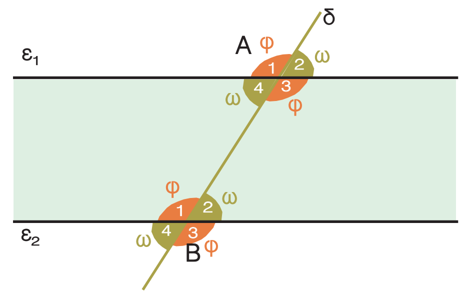
◆ Από τον συνδυασμό των παραπάνω προκύπτει ότι θα έχουμε τις παρακάτω έξι ονομασίες για τα 16 διαφορετικά ζευγάρια των γωνιών.

(α) εντός εναλλάξ	και	(β) εκτός εναλλάξ
(γ) εντός και επί τα αυτά	και	(δ) εκτός και επί τα αυτά
(ε) εντός - εκτός εναλλάξ	και	(στ) εντός - εκτός επί τα αυτά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να συγκριθούν μεταξύ τους οι γωνίες, που σχηματίζονται στα σημεία Α και Β, στα οποία τέμνει μια ευθεία δ δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.*

Λύση



Μπορούμε να διαπιστώσουμε (μετρώντας με το μοιρογνωμόνιο) ότι οι γωνίες που σχηματίζονται και στα δύο σημεία τομής Α και Β, είναι δύο ειδών:

- Οι οξείες γωνίες $\hat{\omega}$, που είναι μεταξύ τους ίσες και
- Οι αμβλείες γωνίες $\hat{\varphi}$, που είναι κι αυτές μεταξύ τους ίσες.

Τα τέσσερα ζευγάρια των γωνιών, που είναι όλες **οξείες και ίσες** μεταξύ τους είναι:

- Από τις *"εντός εναλλάξ"*: $\hat{A}_4 = \hat{B}_2$
- Από τις *"εκτός εναλλάξ"*: $\hat{A}_2 = \hat{B}_4$
- Από τις *"εντός - εκτός επί τα αυτά"*: $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ και $\hat{A}_4 = \hat{B}_4$

Τα τέσσερα ζευγάρια των γωνιών, που είναι όλες **αμβλείες και ίσες** μεταξύ τους είναι:

- Από τις *"εντός εναλλάξ"*: $\hat{A}_3 = \hat{B}_1$
- Από τις *"εκτός εναλλάξ"*: $\hat{A}_1 = \hat{B}_3$
- Από τις *"εντός - εκτός επί τα αυτά"*: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ και $\hat{A}_3 = \hat{B}_3$

Επειδή όμως οι γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{A}_2$ είναι **παραπληρωματικές**, θα ισχύει γενικά:

$$\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 180^\circ.$$

Οπότε συμπεραίνουμε ότι τα υπόλοιπα ζευγάρια των γωνιών είναι ζευγάρια **παραπληρωματικών** γωνιών, τα οποία και είναι τα εξής:

- Οι *"εντός επί τα αυτά"*: $\hat{A}_3 + \hat{B}_2 = 180^\circ$ και $\hat{A}_4 + \hat{B}_1 = 180^\circ$
- Οι *"εκτός επί τα αυτά"*: $\hat{A}_1 + \hat{B}_4 = 180^\circ$ και $\hat{A}_2 + \hat{B}_3 = 180^\circ$
- Οι *"εντός-εκτός εναλλάξ"*: $\hat{A}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$ και $\hat{A}_2 + \hat{B}_1 = 180^\circ$ και $\hat{A}_3 + \hat{B}_4 = 180^\circ$ και $\hat{A}_4 + \hat{B}_3 = 180^\circ$

2. Στο παρακάτω σχήμα είναι $ε_1//ε_2$. Να υπολογίσετε όλες τις γωνίες, που είναι σημειωμένες, αν είναι $\hat{α} = 40°$.

Λύση

Οι γωνίες $\hat{α}$ και $\hat{γ}$ είναι κατακορυφήν, άρα θα είναι: $\hat{α} = \hat{γ} = 40°$

Οι γωνίες $\hat{α}$ και $\hat{β}$ είναι παραπληρωματικές, άρα θα είναι: $\hat{α} + \hat{β} = 180°$, από τη σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι: $\hat{β} = 180° - \hat{α} = 180° - 40° = 140°$

Οι γωνίες $\hat{β}$ και $\hat{δ}$ είναι κατακορυφήν, άρα θα είναι: $\hat{β} = \hat{δ} = 140°$.

Αλλά επειδή $ε_1//ε_2$ και η $ε_3$ τέμνουσα των δύο παραλλήλων ευθειών θα είναι:

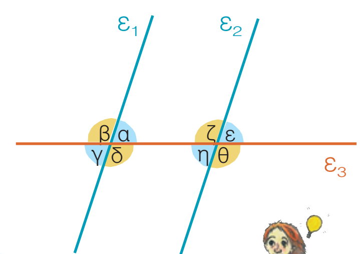
$\hat{ε} = \hat{α}$, ως εντός - εκτός επί τα αυτά, άρα: $\hat{ε} = 40°$

$\hat{ζ} + \hat{α} = 180°$, ως εντός επί τα αυτά,

άρα: $\hat{ζ} = 180° - \hat{α} = 180° - 40° = 140°$

$\hat{η} = \hat{α}$, ως εντός εναλλάξ, επομένως: $\hat{η} = 40°$ και

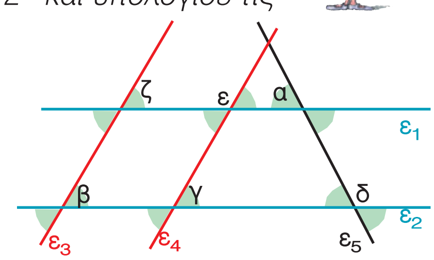
$\hat{θ} = \hat{δ}$, ως εντός - εκτός επί τα αυτά, άρα: $\hat{θ} = 140°$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

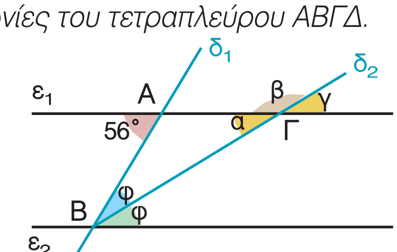
1. Σχεδίασε δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$, οι οποίες να απέχουν 4 cm. Φέρε μία ευθεία που να σχηματίζει με την $ε_1$ γωνία 72° και υπολόγισε τις υπόλοιπες γωνίες.

2. Στο διπλανό σχήμα είναι $ε_1//ε_2$ και $ε_3//ε_4$. Να υπολογίσεις τις σημειωμένες γωνίες του σχήματος, αν είναι $\hat{α} = \hat{β} = 70°$.

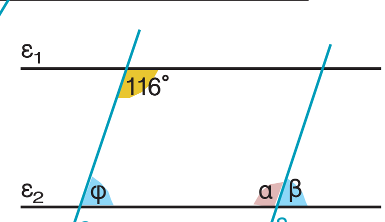


3. Να σχηματίσεις μια γωνία $x\hat{A}y = 63°$. Να πάρεις ένα σημείο Β της πλευράς Αx, ώστε να είναι ΑΒ=5 cm και ένα σημείο Δ της Αy, ώστε να είναι ΑΔ=2,9 cm. Να φέρεις από το Β την παράλληλη προς την Αy και από το Δ την παράλληλη προς την Αx. Να ονομάσεις Γ το σημείο τομής των παράλληλων αυτών. Να υπολογίσεις τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

4. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες και η ημιευθεία $Βδ_2$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Να υπολογίσεις τις γωνίες $\hat{α}$, $\hat{β}$ και $\hat{γ}$ του σχήματος.



5. Στο διπλανό σχήμα είναι $ε_1//ε_2$ και $ε_3//ε_4$. Να υπολογίσεις τις γωνίες $\hat{α}$ και $\hat{β}$.



6. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι: ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ. Να υπολογίσεις όλες τις σημειωμένες γωνίες.