

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΜΕΡΟΣ Γ'

Υποδείξεις - Απαντήσεις για τις Ασκήσεις
Αλφαβητικό Ευρετήριο όρων

Υποδείξεις - Απαντήσεις για τις Ασκήσεις

Μέρος Α' Κεφάλαιο 1^ο - Οι Φυσικοί Αριθμοί

A.1.1. Φυσικοί αριθμοί - Διάταξη Φυσικών - Στρογγυλοποίηση

- 286, 287, 288 και 290, 291.
- $3.508 < 3.515 < 3.620 < 4.800 < 4.801$.
- (α) $45 = 45$, (β) $38 > 36$, (γ) $456 < 465$,
(δ) $8.765 < 8.970$, (ε) $90.876 > 86.945$,
(στ) $345 < 5.690$.
- B (3), Γ (5), Δ (6), E (7).
- (α)Σ, (β)Σ, (γ)Λ, (δ)Σ, (ε)Σ, (στ)Σ, (ζ)Σ, (η)Λ, (θ)Σ,
(ι)Λ, (ια)Λ.
- 300, 800, 700, 2.600, 9.500, 123.600, 34.600, 31.500,
8.800.
- (α) 7.568.350, (β) 7.568.300, (γ) 7.568.000 (δ) 7.570.000,
(ε) 7.600.000.

A.1.2. Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

- (α) $52 \cdot 100 = 5200$, (β) $37 \cdot 10 = 370$,
(γ) $490 \cdot 10.000 = 4.900.000$.
- (α) $3.582 + 7.591 = 11.173$, (β) $485 + 525 = 1.010$,
(γ) $3.565 + 528 = 4.093$
- $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $1 + 2 + 3 \cdot 4 = 15$, $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 14$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
- (α) 190, (β) 225, (γ) 462, (δ) 2726, (ε) $60 - 18 + 2$,
(στ) όλες, (ζ) 230, (η) 9700, (θ) 879000.
- (α) 39, (β) 77, (γ) 540, (δ) 1.212, (ε) 550, (στ) 444,
(ζ) 3.366, (η) 5.684.
- Το ζητούμενο εμβαδόν είναι 40.
- (α) Όχι, (β) 1.025.
- Ναι ακριβώς.
- 57 κιλά.
- (α) Ο Άρης το 2004 είναι 21 χρονών,
(β) Ο πατέρας γεννήθηκε το 1958.
- Στα 12 πατώματα του γκαράζ υπάρχουν:
400 θέσεις. Στο γκαράζ έχουν μπει 199 οχήματα.
Άρα οι θέσεις επαρκούν.

A.1.3. Δυνάμεις φυσικών αριθμών

1. α	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	25
α ²	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	625
α ³	512	729	1000	1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859	8000	15625

- (α) 5^6 , (β) $8^6 \cdot 6^3$, (γ) 1^6 , (δ) a^4 , (ε) x^3 , (στ) $2^4 \cdot a^3$.
- 2, 4, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024.
- $10^2 = 100$, $20^2 = 400$, $30^2 = 900$, $40^2 = 1.600$, $50^2 = 2.500$,
 $60^2 = 3.600$, $70^2 = 4.900$, $80^2 = 6.400$, $90^2 = 8.100$.
- $10^3 = 1000$, $20^3 = 8.000$, $30^3 = 27.000$,
 $40^3 = 64.000$, $50^3 = 125.000$.
- (α) 75, (β) 77, (γ) 79, (δ) 19, (ε) 147.
- (α) 60, (β) 14.686
- (α) $(6+5)^2 = 121$ και $6^2 + 5^2 = 61$,
- (β) $(3+6)^2 = 81$ και $3^2 + 6^2 = 45$.
- (α) $3 \cdot a$, (β) a^3 , (γ) $4 \cdot x$, (δ) x^4 .
- (α) $34.720 = 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1$,
(β) $123.654 = 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$,
(γ) $890.650 = 8 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1$.
- $(1+2) \cdot (3+4) = 21$, $1 \cdot (2+3 \cdot 4) = 14$, $(1 \cdot 2 + 3) \cdot 4 = 20$,
 $1 + (2+3) \cdot 4 = 21$.
- $2 + 2 \cdot 2 = 6$, $3 + 3 \cdot 3 = 12$, $4 + 4 \cdot 4 = 68$,
 $5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 = 55$, $5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 = 150$, $4 + 4 \cdot 4 = 16$.

A.1.4. Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα

- (α) $4002:69=58$, (β) $1445:17=85$, (γ) $925:37=25$,
(δ) $3621:213=17$, (ε) $35280:2940=12$,
(στ) $5082:77=66$.
- (α) $65:5=13$, (β) $30:3=10$, (γ) $46.592:52=896$.
- (α) Ναι, (β) Όχι, (γ) Ναι, (δ) Ναι.
- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
- $9 \cdot 73 + 4 = 661$.
- Θα είναι η Πέμπτη.

A.1.5. Χαρακτήρες διαιρετότητας - ΜΚΔ - ΕΚΠ - Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

- (α) 684, (β) 9504 ή 9594, (γ) 6012. 3. (α) 15, (β) 66, (γ) 10, (δ) 30, (ε) 18, (στ) 120. 4. 2031. 5. 105.
- Στις 9 Μαΐου. Ο Γιάννης 5 φορές και ο Νίκος 4 φορές. 7. (α) 1, (β) 8, (γ) 15, (δ) 10, (ε) 2.
- $\alpha = 24 \cdot \kappa$, $\beta = 24 \cdot \lambda$, κ και λ φυσικοί αριθμοί. Κάθε αριθμός που διαιρεί το 24 διαιρεί και τους δύο αριθμούς.
- | | | | | | |
|---------------|-------------------|---------------|----------------|---|--------------------|
| Του 10 είναι: | 1, 2, 5, 10 | Του 14 είναι: | 1, 2, 7, 14 | Του 18 είναι: | 1, 2, 3, 6, 9, 18 |
| Του 11 είναι: | 1, 11 | Του 15 είναι: | 1, 3, 5, 15 | Του 19 είναι: | 1, 19 |
| Του 12 είναι: | 1, 2, 3, 4, 6, 12 | Του 16 είναι: | 1, 2, 4, 8, 16 | Του 20 είναι: | 1, 2, 4, 5, 10, 20 |
| Του 13 είναι: | 1, 13 | Του 17 είναι: | 1, 17 | Οι σύνθετοι: 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20 | |
- Έστω α ο πρώτος αριθμός. Το διπλάσιο του αριθμού αγράφεται: 2·α. Δηλαδή διαιρείται με το 2, άρα είναι σύνθετος αριθμός.
- | | | | |
|--------------------|-----------------------------|---------------------|--|
| (α) Του 28 είναι: | 1, 2, 4, 7, 14, 28 | (ε) Του 124 είναι: | 1, 2, 4, 31, 62, 124 |
| (β) Του 82 είναι: | 1, 2, 41, 82 | (στ) Του 345 είναι: | 1, 3, 5, 15, 23, 69, 115, 345 |
| (γ) Του 95 είναι: | 1, 5, 19, 95 | (ζ) Του 1232 είναι: | 1, 2, 4, 7, 8, 11, 14, 16, 22, 28, 44, 56, 77, 88, 112, 154, 176, 308, 616, 1232 |
| (δ) Του 105 είναι: | 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105 | (η) Του 3999 είναι: | 1, 3, 31, 43, 93, 129, 1333, 3999 |
- (α) $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$, (β) $348 = 2^2 \cdot 3 \cdot 29$, (γ) $1210 = 2 \cdot 5 \cdot 11^2$, (δ) $2344 = 2^3 \cdot 293$.

Απαντήσεις στις Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ

Μέρος Α' Κεφάλαιο 2ο Τα κλάσματα

A.2.1. Η έννοια του κλάσματος

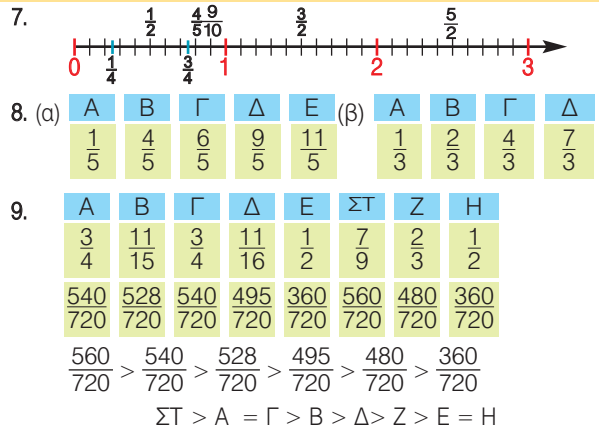
5. $\frac{2}{4}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{6}{8}, \frac{1}{3}, \frac{5}{8}$. 6. 14. 7. (α) $\frac{100}{1000}$, (β) $\frac{250}{1000}$, (γ) $\frac{500}{1000}$, (δ) $\frac{600}{1000}$. 8. (α) $\frac{15}{30}$, (β) $\frac{15}{180}$, (γ) $\frac{15}{365}$.
9. 36 €, 54 €. 10. 32 μαθητές. 11. 84 cm. 12. 4cm, 6 cm.

A.2.2. Ισοδύναμα κλάσματα

2. (α) Είναι, (β) Δεν είναι, (γ) Είναι, (δ) Είναι.
3. (α) $\frac{75}{100}$, (β) $\frac{160}{100}$, (γ) $\frac{20}{100}$, (δ) $\frac{250}{100}$, (ε) $\frac{80}{100}$.
4. (α) $\frac{5}{3}$, (β) $\frac{5}{3}$, (γ) $\frac{2}{3}$. 5. (α) $\frac{4}{6}$, (β) $\frac{10}{15}$.
6. (α) 33, (β) 3, (γ) 70, (δ) 32.
7. (α) $\frac{5}{6}$, (β) $\frac{4}{3}$, (γ) $\frac{4}{7}$.
8. (α) Δεν είναι, (β) Είναι, (γ) Είναι, (δ) Δεν είναι.
9. (α) $\frac{27}{45}$ και $\frac{35}{45}$, (β) $\frac{35}{40}$ και $\frac{12}{40}$, (γ) $\frac{44}{12}$ και $\frac{7}{12}$.
10. (α) Σ, (β) Σ, (γ) Λ, (δ) Λ, (ε) Σ, (στ) Λ, (ζ) Σ, (η) Λ, (θ) Σ, (ι) Σ, (ια) Σ.

A.2.3. Σύγκριση κλασμάτων

2. (α) $\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$, (β) $\frac{3}{5} > \frac{3}{9}$, (γ) $\frac{4}{5} > \frac{8}{12}$.
3. $\frac{31}{10} > \frac{31}{11} > \frac{31}{12} > \frac{31}{13} > \frac{31}{14}$.
4. (α) $\frac{5}{8} < 1$, (β) $\frac{9}{10} < 1$, (γ) $\frac{12}{11} > 1$, (δ) $\frac{16}{16} = 1$, (ε) $\frac{109}{120} < 1$.
5. $\frac{5}{10} < \frac{8}{15} < \frac{3}{5} < \frac{20}{15} < \frac{7}{5}$.
6. (α) $1 < \frac{5}{3} < 2$, (β) $3 < \frac{7}{2} < 4$, (γ) $0 < \frac{8}{9} < 1$, (δ) $12 < \frac{63}{5} < 13$,
(ε) $12 < \frac{125}{10} < 13$.



A.2.4. Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων

1. (α) $\frac{7}{3}$, (β) 1, (γ) $\frac{10}{9}$, (δ) $\frac{4}{3}$, (ε) $\frac{21}{20}$, (στ) $\frac{5}{2}$. 5. (α) $\frac{19}{8}$, (β) $\frac{9}{5}$, (γ) $\frac{61}{10}$. 6. (α) $\frac{4}{5}$, (β) $1\frac{5}{6}$, (γ) $\frac{13}{15}$.
2. (α) 1, (β) $\frac{5}{9}$, (γ) $\frac{1}{2}$, (δ) $\frac{10}{27}$, (ε) $\frac{41}{24}$, (στ) $\frac{12}{77}$. 7. $\frac{13}{72}$. 8. $\frac{1}{30}$.
3. (α) $\frac{29}{8}$, (β) $\frac{41}{10}$, (γ) $\frac{19}{9}$. 4. (α) $3\frac{3}{4}$, (β) $2\frac{1}{2}$, (γ) $3\frac{2}{12}$. 9. (α) Σ, (β) Σ, (γ) Λ, (δ) Σ, (ε) Λ, (στ) Σ, (ζ) Σ.

A.2.5. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

2. (α) $\frac{9}{4}$, (β) 5, (γ) 4, (δ) $\frac{1}{2}$. 4.

•	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$
$\frac{7}{5}$	1	$\frac{21}{10}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{21}{20}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{21}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{20}{21}$	2	$\frac{4}{3}$	1

 6. (α) $\frac{7}{4}$, (β) $\frac{1}{72}$, (γ) $\frac{8}{5}$, (δ) 3, (ε) $\frac{8}{739}$
(στ) 1. 7. 1 λίτρο.
3. (α) $\frac{7}{20}$, (β) 16, (γ) $\frac{20}{81}$, (δ) $\frac{1}{5}$. 8. (α) $\frac{27}{20}$, (β) $\frac{9}{20}$, (γ) $\frac{3}{20}$.
5. (α) $\frac{1}{3}$, (β) $10\frac{1}{2}$, (γ) $31\frac{1}{4}$, (δ) $2\frac{1}{2}$. 9. (α) $\frac{37}{40}$, (β) $\frac{33}{40}$, (γ) $\frac{137}{60}$.

A.2.6. Διάρθρωση κλασμάτων

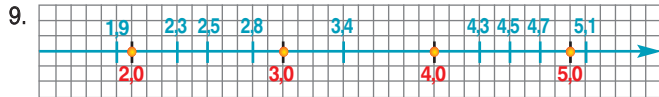
2. (α) $\frac{3}{2}$, (β) 1, (γ) $\frac{1}{2}$, (δ) 3. 3. (α) 6, (β) $\frac{5}{8}$, (γ) $\frac{5}{8}$, (δ) $\frac{123}{400}$
4. (α) $\frac{3}{2}$, (β) $\frac{2}{3}$, (γ) $\frac{1}{3}$, (δ) 3. Είναι ανά δύο αντίστροφοι.
5. (α) $\frac{3}{16}$ και (β) $\frac{3}{4}$. Δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα.
7. $\frac{3}{10} : \frac{4}{10} = \frac{3}{4}$, $\frac{5}{9} : \frac{4}{9} = \frac{5}{4}$, $\frac{45}{90} : \frac{15}{9} = \frac{3}{10}$, $\frac{16}{3} : \frac{8}{9} = 6$.
8. (α) $\frac{15}{32}$, (β) $\frac{5}{4}$, (γ) 16. 9. (α) $\frac{3}{5}$, (β) $\frac{55}{42}$, (γ) 8.
6.

:	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$
$\frac{5}{7}$	1	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{28}{15}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{7}$	1	2	$\frac{8}{3}$
1	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	1

Μέρος Α' Κεφάλαιο 3ο - Δεκαδικός αριθμός

A.3.1. Δεκαδικά κλάσματα - Δεκαδικός αριθμός - Διάταξη δεκαδικών αριθμών - Στρογγυλοποίηση

3. (α) 0,43 & 0,437, (β) 1,23 & 1,235, (γ) 0,21 & 0,210. 4.(α) 5,8, (β) 0,03, (γ) 50,25, (δ) 1,024.
 5. (α) $\frac{35}{10}$, (β) $\frac{4525}{100}$, (γ) $\frac{3004}{1000}$. 6. Ψηφίο χιλιοστών: (α) 0, (β) 0, (γ) 5. Δεκάκις χιλιοστών: (α) 9, (β) 5, (γ) 6.
 7. (α) $45,345 < 45,413$ (β) $980,19 > 899,01$ (γ) $7,534 = 7,5340$.
 8. Στο δέκατο: (α) 9876 (β) 67,9 (γ) 0 (δ) 8,2 (ε) 23,7
 Στο εκατοστό: (α) 9876,01 (β) 67,90 (γ) 0 (δ) 8,24 (ε) 23,70
 Στο χιλιοστό: (α) 9876,008 (β) 67,896 (γ) 0,001 (δ) 8,239 (ε) 23,705



9. 10. $34,952 > 34,925 > 34,592 > 34,529 > 34,295 > 34,259$. 11. 25,47
 12. (α) $0,345 = \frac{345}{1000}$, (β) $3,45 = \frac{345}{100}$, (γ) $0,0345 = \frac{345}{10000}$, (δ) $34,5 = \frac{345}{10}$.
 13.(α) $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$, (β) $\frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3$, (γ) $\frac{45}{50} = \frac{9}{10} = 0,9$, (δ) $\frac{15}{5} = \frac{30}{10} = 3$, (ε) $\frac{10}{4} = \frac{25}{10} = 2,5$, (στ) $\frac{19}{1} = \frac{190}{10} = 19$.

A.3.2. Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς - Δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό

1. (α) 58,565, (β) 18,915. 7. $20,2 : 4 = 5,05$.
 2. A=212,66 m, B=174,53 m, Γ=366,58 m. 8. $(48,52 - 10,7) : 2 = 37,82 : 2 = 18,91$.
 3. (α) 11,042, (β) 1,3995, (γ) 7,4995. 9. (α) 133, (β) 58,05.
 4. (α) 12,0625, (β) 12,56, (γ) 101,16732, (δ) 7,05. 10. (α) 9,61, (β) 49,1401, (γ) 20,25, (δ) 0,25, (ε) 0,04, (στ) 0,027.
 5. (α) 84, (β) 8,2391. 6. (α) 42,5, (β) 9793,215. 11. (α) Σ, (β) Λ, (γ) Λ, (δ) Λ, (ε) Λ, (στ) Σ, (ζ) Σ.

A.3.3. Υπολογισμοί με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης

$$(7,28 : 5,2 - 0,4) \cdot 5,8 + 4,2 + (2,4 + 7,1) : 5 + 0,1 - (2,03 + 0,47) \cdot 3,2 = 10 + 2 - 8 = 4$$

7,28 \div 5,2 $-$ 0,4 $=$ 1 \cdot 5,8 $+$ 4,2 $=$ 10 $M+$
 2,4 $+$ 7,1 $=$ 9,5 \div 5 $=$ 1,9 $+$ 0,1 $=$ 2 $M+$
 2,03 $+$ 0,47 $=$ 2,5 \cdot 3,2 $=$ 8 $M-$ MR 4 MC 0

A.3.4. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

1. (α) $5,83 \cdot 10^5$, (β) $4,3 \cdot 10^6$, (γ) $7,96 \cdot 10^6$, (δ) $3,42 \cdot 10^9$, (ε) $4,8 \cdot 10^3$, (στ) $7,310 \cdot 10^3$, (ζ) $2,819 \cdot 10^5$, (η) $5,18 \cdot 10^8$, (θ) $1,31 \cdot 10^5$, (ι) $6,75 \cdot 10^5$
 2. (α) 3.100.000, (β) 482.000, (γ) 32.500, (δ) 7.400, (ε) 920.

A.3.5. Μονάδες μέτρησης

1. (α) 23dm=230 cm, (β) 3,1m=0,0031 km, (γ) 45,83 cm=0,4583 m, (δ) 67,2 km=67.200.000 mm, (ε) 95,5 mm=9,55 cm.
 2. $\alpha = 3,1 \cdot 10^3$ mm, $\beta = 4,2 \cdot 10^3$ mm και $\gamma = 2,3 \cdot 10^3$ mm.
 3. $45,6dm < 230dm < 678dm < 9860dm$.
 4. $1.035cm^2$ και $103.500mm^2$.
 5. (α) $56.000.000m^2$, (β) $987m^2$, (γ) $350.000m^2$.
 6. $44.100m^2$, 44,1 στρέμματα.
 7. 225 πλάκες.
 8. $15.029cm^3 = 0,015029m^3 = 15.029.000mm^3$.
 9. $90m^3 = 90.000lt$, $90.000lt \cdot 4\epsilon/lt = 360.000\epsilon$.
 10. 9h 10min.
 11. (α) 4 h 52 min=292 min=17.520 s, (β) 3 h 12 min=192 min=11.520 s, (γ) 5 h 20 min 30 s=320,5 min=19.230 s, (δ) 56 min 45 s=56,75 min=3.405 s.
 12. (α) 6 min, (β) 12 min και (γ) 10 min.

Στη μία πλάστιγγα	Στην άλλη πλάστιγγα
(α) 3,6kg (β) 2,45kg+1 των 50g	2 του 1kg+3 των 500g+2 των 50g 2 του 1kg+1 των 500g

14.

Στη μία πλάστιγγα	Στην άλλη πλάστιγγα
(α) 5kg+1 των 3kg+1 των 1kg (β) 3kg+1 των 5kg+2 των 1kg	1 των 9kg 1 των 10kg

 15. (α) 5lt 2 των 2lt + 2 των 0,5lt,
 (β) 2,8lt 1 των 2lt + 1 των 0,5lt + 3 των 0,1lt,
 (γ) 2,4lt 1 των 2lt + 4 των 0,1lt.
 16. Η δεξαμενή έχει όγκο $3.600lt = 3,6m^3$. Το ύψος είναι $3,6m^3 : (2,5m \cdot 1m) = 1,44m = 144cm$. Στο 1cm αντιστοιχούν $3600lt : 144cm = 25lt/cm$.
 17. Όγκος δεξαμενής = $1,2m \cdot 0,8cm \cdot 0,8cm = 0,768m^3 = 768lt$
 1cm ύψους αντιστοιχεί σε $768lt : 120cm = 6,4 lt/cm$.
 (α) Ο χρόνος για να κατέβει η στάθμη 10cm είναι: $(10cm \cdot 6,4lt/cm) : 8lt/min = 8min$
 (β) Η δεξαμενή θα αδειάσει σε $768lt : 8lt/min = 96min$.
 (γ) Σε μισή ώρα θα αντληθούν $8lt/min \cdot 30min = 240lt$. Η στάθμη του νερού θα κατέβει κατά: $240lt : 6,4lt/cm = 37,5cm$.
 18. (α) $105min : 75min = \frac{7}{5}$ και (β) $75min : 105min = \frac{5}{7}$.

Είναι αντίστροφοι αριθμοί.

Απαντήσεις στις Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ

Μέρος Α' Κεφάλαιο 4ο - Εξισώσεις και προβλήματα

A.4.1. Η έννοια της εξίσωσης - Οι εξισώσεις: $a+x=\beta$, $x-a=\beta$, $a-x=\beta$, $ax=\beta$, $a:x=\beta$, $x:a=\beta$

- (α) $3x$, (β) $10x$, (γ) $x+12$, (δ) $x-5$, (ε) $x-y>20$, (στ) $xy=32$.
- (α) $3 \cdot x+25$ το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 25
(β) $\frac{1}{2} \cdot x-7=2$ το μισό ενός αριθμού μειωμένο κατά 7 ισούται με 2
(γ) $a-2 \cdot \beta$ ένας αριθμός μειωμένος κατά το διπλάσιο ενός άλλου αριθμού
(δ) $4 \cdot \kappa+7 \cdot \kappa=88$ το τετραπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά το επταπλάσιο του ίδιου του αριθμού ισούται με το 88.
- $\Pi=4a$, $E=a^2$.
- (α) $2x$, (β) $3a$, (γ) $55 \cdot a$, (δ) $3 \cdot \beta+5 \cdot a$, (ε) $9 \cdot x$, (στ) ω .
- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot z) \cdot z = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{9 \cdot 5} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$.
- $x = 3$.
- $12 + 13 = 25$.

8.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$x - 2 = 4$						x		
$1 + y = 4$			x					
$18 - \omega = 10$								x
$2 - a = 1$	x							
$93 - \beta = 86$							x	

- (α) 10,93, (β) 52,79, (γ) 49,214, (δ) 30,9.
- (α) 5, (β) 21, (γ) 7, (δ) 9.
- (α) 2, (β) 2, (γ) 2.
- (α) $v=1$, (β) $x=10$, (γ) $t=17$, (δ) $x=1$.
- $\frac{1}{5}$
- 308.
- (α) 20, (β) $\Pi=4v$, (γ) $v=128:4=32$.

A.4.3. Παραδείγματα Επίλυσης προβλημάτων

- Αν x είναι η ηλικία της μητέρας, θα είναι: $x - 18 = 25$, επομένως $x = 43$.
- $\frac{2}{8} \cdot x = 60$, επομένως $x = 240$ και $\frac{7}{10} \cdot 240 = 168$.
- $(x-1) + x + (x+1) = 1533$, επομένως $x=511$, άρα είναι: 510, 511, 512.
- $15 + x =$ πολλαπλάσιο του 9 (0, 9, 18, 27, 36, 45,). Επομένως, ψηφίο $x = 3$ και ο αριθμός είναι ο 7533.
- Αν x είναι ο αριθμός των σωστών απαντήσεων, τότε θα είναι: $3x + (100 - x) = 220$, επομένως $x = 60$.
- Αν x είναι η ηλικία του γιου, θα είναι: $x + 4x = 50$, Επομένως, $x = 10$.
- Αν x είναι η αξία του χωραφιού, θα είναι: $x + 600 = 15.000$, επομένως $x = 14.400 \text{ €}$.
Αν y είναι η αξία του διαμερίσματος, θα είναι: $y - 15.600 = 15.000$, επομένως $y = 30.600 \text{ €}$.
- (α) $A = 2$ και $B = 6$, (β) $\Gamma = 4$, $\Delta = 3$.
- 95lt και 11 δοχεία. 10. 133 δοχεία και 0,25lt.
- Τρεις ημέρες. 12. Αν x είναι η αξία του υπολογιστή, θα είναι: $\frac{80}{100} \cdot x + 230 = 1070$, επομένως $x = 1050 \text{ €}$.
- $35=7 \cdot 5$, $36=9 \cdot 4$ ή $98=7 \cdot 14$, $99=9 \cdot 11$.

Μέρος Α' Κεφάλαιο 5ο - Ποσοστά

A.5.1. Ποσοστά

- (α) 20%, (β) 150%, (γ) 25%, (δ) 75%, (ε) 60%.
- (α) 52%, (β) 341%, (γ) 19%, (δ) 3%, (ε) 7%.
- (α) $\frac{3}{20}$, (β) $\frac{7}{100}$, (γ) $\frac{12}{25}$, (δ) $\frac{1}{2}$.
- (α) 300€, (β) 27min, (γ) 200cm³, (δ) 250g, (ε) 250g.
- (α) 5%, (β) 82,2%, (γ) 2%, (δ) 3%.
- 0,1342lt.
- (α) 6.400km, (β) Φλοιός: 0,78125%, Μανδύας: 45,3125%, Πυρήνας: 53,90625%.

	Ενοίκιο	Διατροφή	Σπουδές	Αυτοκίνητο	Βιβλία	Διασκέδαση
(α)	324 €	345,6 €	194,4 €	32,4 €	75,6 €	108 €
(β)	27%	28,8%	16,2%	2,7%	6,3%	9%

A.5.2. Προβλήματα Ποσοτών

- (α) 50,715€, (β) 286€ κέρδος, (γ) 1,43%.
- (α) 3.600€, (β) 3.762€.
- (α) 14.000€, (β) 56%, (γ) από τον πρώτο.
- (α) Όχι, (β) 150 κ.ε. στα 300 κ.ε.
- 980,39 €.
- 151,13€.
- (α) 450€, (β) 1,5%.
- 1.330€.
- (α) 828€, (β) 118€, 115€, 112€, 109€, 106€, 103€. (γ) 1.491€.
- (α) 66,5€, (β) 546,5€, (γ) Μετρητοίς.

Απαντήσεις στις Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

A. Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Λ

B. Άσκηση Αντιστοίχισης: Παντελόνι 30%, Φούστες 40%, Φορέματα 15%, Μπλουζες 20%, Φόρμες 10%.

Μέρος Α' Κεφάλαιο 6ο Ανάλογα ποσά - Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

A.6.1. Παράσταση σημείων στο επίπεδο

1. Το I (6,0) βρίσκεται στον άξονα Ox ενώ το K(0,5) στον άξονα Oy.
2. Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Το σημείο K έχει συντεταγμένες (2,2).
3. Τα σημεία βρίσκονται πάνω σε ευθεία που είναι διχοτόμος της γωνίας των ημιαξόνων Ox και Oy.
4. (α) Ε5, (β) Οι δικαιολογημένες απουσίες του Αντωνίου για το 2ο Τρίμηνο, (γ) 6 και 27.

A.6.2. Λόγος δύο αριθμών - Αναλογία

1. (α) $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{4}{1}, \frac{EZ}{\text{H}\Theta} = \frac{5}{2}, \frac{K\Lambda}{AB} = \frac{3}{4}, \frac{AB}{K\Lambda} = \frac{4}{3},$

$$\frac{\text{H}\Theta}{EZ} = \frac{2}{5}, \frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{1}{4}.$$

(β) $\frac{\Gamma\Delta}{EZ} = \frac{1}{5}, \frac{\text{H}\Theta}{K\Lambda} = \frac{2}{3}, \frac{AB}{AB} = 1, \frac{EZ}{\Gamma\Delta} = \frac{5}{1}, \frac{K\Lambda}{\text{H}\Theta} = \frac{3}{2}, \frac{\Gamma\Delta}{AB} = 1.$

2. Αν α και β οι διαστάσεις του ζητούμενου ορθογωνίου α=9 cm και β=5 cm.

3. 44 φορές.

4. 6 φορές.

5. Το βάρος των νημάτων του πολυεστέρα είναι 164 gr.

6. Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο εξής:

Κλίμακα	Μήκος σε σχέδιο	Πραγματικό μήκος
1 : 5	4 cm	20 cm
3 : 8	9 cm	24 cm
1 : 30	12 cm	360 cm
1 : 500	2 cm	10 cm
1 : 100	3,5 cm	350 cm

7. (α) Π = 4(x+1), (β) Δεν είναι ανάλογα, (γ) Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο εξής:

x	0	1	2	3	4
Π	4	8	12	16	20

8. 750 X 1250. 9. Δεν θα πάρουμε την ίδια απόχρωση.

A.6.3. Ανάλογα ποσά - Ιδιότητες αναλόγων ποσών

1. (α) Σ (β) Σ (γ) Λ (δ) Λ (ε) Λ (στ) Λ (ζ) Λ (η) Λ

3. (α) Δεν είναι ανάλογα (β) Είναι ανάλογα.

4. Ο συντελεστής αναλογίας τους είναι 100 : 201 και ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο εξής:

x	5	0	1	0,99	0,062	3,7	0,61	0,273
y	10,05	0	2,01	2	0,125	7,437	1,2261	0,55

5. Ο συντελεστής αναλογίας τους είναι 7:4. Άρα η συνταγή θα γίνει: 7 αυγά, $1\frac{3}{4}$ πακέτα φαρίνα του μισού κιλού,

437,5gr βούτυρο, $3\frac{1}{2}$ φλιτζάνια ζάχαρη,

$1\frac{3}{4}$ φλιτζάνια βανίλια και $1\frac{3}{4}$ φλιτζάνια γάλα.

6. Από την αναλογία έχουμε x = 1. Ο ζητούμενος λόγος

είναι $\frac{1}{3}$ και παρατηρούμε ότι $\frac{x}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

7. Ισχύει η σχέση: Κεφάλαιο μετά από ένα χρόνο = επιτόκιο · Αρχικό Κεφάλαιο.

Δηλαδή τα δύο ποσά είναι αναλογα και θα έχουμε ότι:

Αρχικό Κεφάλαιο	100	150.000
Κεφάλαιο μετά από ένα χρόνο	109,5	x

Άρα x = 164.250€.

A.6.4. Γραφική παράσταση σχέσης αναλογίας

1. Ο πίνακας τιμών των δύο ποσών που περιέχει τουλάχιστον δύο ζεύγη τιμών είναι:

x	1	2
y	1,5	3

2. Για να σχεδιάσουμε τις γραφικές αναπαραστάσεις των σχέσεων αναλογίας απαιτούνται δύο σημεία. Επειδή το ένα είναι πάντα το (0,0) αρκεί να βρούμε ένα τυχαίο σημείο κάθε μίας σχέσης αναλογίας π.χ. (α) το (2,1), (β) το (1,3), (γ) το (2,11), (δ) το (1,10) και (ε) το (100,1).

3. Η αντιστοίχιση δίνει τα εξής:

(Α)	(Β)	(Γ)	(Δ)	(Ε)	(Ζ)	(Η)	(Θ)
(4)	(6)	(1)	(3)	(8)	(5)	(2)	(7)

4. (α) x=40·φ, x=20·μ, x=50·π, (β) Το ποσό για κάθε είδος θα είναι το ένα τρίτο του συνολικού ποσού, δηλαδή 4.000€. Από την τιμή αυτή, στον άξονα των χρημάτων φέρουμε κάθετη, η οποία τέμνει τις τρεις γραφικές παραστάσεις στα σημεία Α, Β και Γ αντίστοιχα. Η τετμημένη του Α είναι 100, του Β είναι 200 και του Γ είναι 80. Δηλαδή θα αγοράσει 100 φόρμες, 200 μαγιό και 80 ζευγάρια παπούτσια.

A.6.5. Προβλήματα αναλογιών

1.

πάσσαλος	δέντρο	
ύψος	1,2	x
σκιά	3	14

Άρα το ύψος του δένδρου θα είναι 5,6 m.

2.

Αστροναύτης	Παιδί	
Βάρος στη γη	78	52
Βάρος στο φεγγάρι	13	x

Άρα το παιδί ζυγίζει στο φεγγάρι 8,6 κιλά.

3. Ο αμπελοργός χρειάζεται 2.100 kg μούστο.

σταφύλια	100	x
μούστος	80	2.100

Πρέπει να πατηθούν 2.625 kg σταφύλια.

4. Αν είναι x τα χρήματα που θα πάρει ο ένας εργάτης.

Εργάτης που δούλεψε 4 μέρες	x	4
Εργάτης που δούλεψε 5 μέρες	270-x	5

Βρίσκουμε ότι ο ένας πήρε 120 € και ο δεύτερος 150 €.

A.6.5. Προβλήματα αναλογιών

5. Έστω τα x κιλά περιέχουν 60 κιλά αλάτι.

Νερό	100	x
Αλάτι	3	60

Άρα πρέπει να εξατμιστούν 2.000 kg νερό.

6. Καλλιεργήθηκαν συνολικά 15 στρέμματα. Η παραγωγή του χωραφιού του γείτονα είναι τα $\frac{8}{15}$ των 14 t.

Το 15% αυτής είναι: 1,12 t, που θα πάρει ο γείτονας και 12,88 t καλαμπόκι που θα πάρει ο γεωργός.

7. (α) Η απώλεια κατά το ψήσιμο είναι: $2,5-1,9=0,6$ κιλά. Άρα το ποσοστό της απώλειας είναι: 24%.

(β) Έστω x κιλά ωμό κρέας που πρέπει να ψήσουμε. Τα ποσά κιλά ωμό κρέας και κιλά ψημένο κρέας είναι ανάλογα. Έτσι από την σχέση αναλογίας βρίσκουμε: $x=3,02$ κιλά κρέας.

8. Η αύξηση της κάρτας θα είναι $75\% \cdot 12\text{€} = 9\text{€}$. Άρα η μηνιαία κάρτα θα κοστίζει 21€. Η αύξηση του εισιτηρίου θα είναι $50\% \cdot 0,7\text{€} = 0,35\text{€}$. Άρα το εισιτήριο θα κοστίζει 1,05€. Ο εργαζόμενος πηγαίνει και έρχεται 20 φορές το μήνα με το λεωφορείο στη δουλειά του, δηλαδή κάνει 40 διαδρομές με το λεωφορείο.

Συνολικά θα πληρώσει το μήνα $40 \cdot 1,05\text{€} = 42\text{€}$. Άρα τον συμφέρει να αγοράσει κάρτα απεριόριστων διαδρομών.

9. Γνωρίζουμε ότι τα ποσά κεφάλαιο και τόκος είναι ανάλογα. Έτσι για επιτόκιο 10% και κεφάλαιο x, θα έχουμε:

Κεφάλαιο	100	x
Τόκος	10	1.000

Δηλαδή: $x=10.000\text{€}$. Αν το επιτόκιο μειωθεί κατά 20% θα γίνει ίσο με το 80% του 10%, δηλαδή 8%. Με το νέο επιτόκιο θα έχουμε τον ίδιο τόκο για κεφάλαιο x, για το οποίο θα ισχύει:

Κεφάλαιο	100	x
Τόκος	8	1.000

Δηλαδή: $x=12.500\text{€}$. Το ποσοστό αύξησης που πρέπει να γίνει στο αρχικό κεφάλαιο για να αποδώσει τον ίδιο τόκο με μικρότερο επιτόκιο θα είναι 25%.

10. Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι:

	Σύνολο	Με 0 παιδιά	Με 1 παιδί	Με 2 παιδιά	Με 3 παιδιά	Με 4 παιδιά	Πάνω από 4 παιδιά
Οικογένειες	200	10	40	80	50	15	5
Ποσοστά	100%	5%	20%	40%	25%	7,5%	2,5%

A.6.6. Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

1. (α) Λ, (β) Σ, (γ) Σ, (δ) Σ, (ε) Σ, (στ) Λ.

3. Οι πίνακες (α), (β) και (γ) είναι πίνακες αντιστρόφως αναλόγων ποσών διότι το γινόμενο των αντιστοίχων ποσών είναι σταθερό. Ο πίνακας (δ) δεν είναι πίνακας αντιστρόφως αναλόγων ποσών.

4. (α) Τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, άρα το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους θα είναι σταθερό και ίσο με $1 \cdot 3,5 = 3,5$.

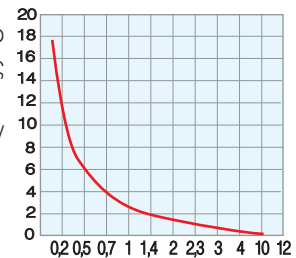
x	0,2	0,5	0,7	1	1,4	2	2,3	3	4	10	12
y	17,5	7	5	3,5	2,5	1,75	1,521	1,166	0,875	0,35	0,291

5. Τα ποσά εργάτες και ημέρες είναι αντιστρόφως ανάλογα. Άρα αν x εργάτες χρειάζονται για να αναδασώσουν την ίδια έκταση σε οκτώ ημέρες θα έχουμε $x=25$.

6. Τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα. Άρα το γινόμενο των αντιστοίχων τιμών τους είναι σταθερό. Έτσι αν x ο αριθμός που δείχνει τα καφάσια των 20 κιλών, έχουμε $x=30$. Η συσκευασία σε καφάσια των 12 κιλών θα στοιχίσει: $50 \cdot 0,28 = 14\text{€}$. Η συσκευασία σε καφάσια των 20 κιλών θα

στοιχίσει: $30 \cdot 0,46 = 13,8\text{€}$. Συμφέρει να χρησιμοποιήσουν τα καφάσια των 20 κιλών γιατί το κόστος συσκευασίας είναι μικρότερο.

7. Η αύξηση της κατανάλωσης είναι 16lt την ημέρα, δηλαδή η ημερήσια κατανάλωση θα είναι 96 lt. Έστω x οι ημέρες για τις οποίες επαρκεί το πετρέλαιο, με αυτή την κατανάλωση. Τα ποσά lt πετρελαίου (κατανάλωση) και ημέρες (χρόνος επάρκειας) είναι αντιστρόφως ανάλογα. Άρα $x=25$ ημέρες.



Απαντήσεις στις Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

A. Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους 1. Σ, 2. Λ, 3. Σ, 4. Σ, 5. Λ, 6. Λ, 7. Λ.

B. Ασκήσεις Συμπλήρωσης κενού

6.	x	2	4	8	12	16	8.	x	2	1	1/2	4	8	9.	x	1	2	3	y=x+1	x	1,5	3	4,5	y = $\frac{2}{3}x$
	y	7,5	15	30	45	60		y	8	16	32	4	2		y	2	3	4		y	1	2	3	

Μέρος Α' Κεφάλαιο 7^ο Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί

A.7.1. Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί (Ρητοί Αριθμοί) - Η ευθεία των ρητών - Τετμημένη σημείου

3. (α) Σ, (β) Λ, (γ) Σ, (δ) Σ, (ε) Λ. 4. ΟΜΟΣΗΜΟΙ: (α), (β), (γ), (ζ), (θ), (ι) και ΕΤΕΡΟΣΗΜΟΙ: (δ), (ε), (στ), (η)
 5. (α) +50000, (β) -78000, (γ) +500, (δ) -1, (ε) -30. 6. ΜΥΣΤΙΚΟ. 7. (α) +6,5, (β) -8,5

A.7.2. Απόλυτη τιμή ρητού - Αντίθετοι ρητοί - Σύγκριση ρητών

3.	(α) Σ, (β) Λ, (γ) Σ, (δ) Σ, (ε) Λ.																											
4.	(α) 7,25, (β) 2,5, (γ) 16, (δ) 20,05, (ε) 58.																											
5.	(α) -100, +100, (β) -21,7, +21,7, (γ) 0, (δ) -7,03, +7,03, (ε) -5,2, +5,2.																											
6.	<table border="1"> <tr> <td>Αριθμός</td> <td>1</td> <td>-2</td> <td>+2</td> <td>-19</td> <td>+8</td> <td>-12</td> <td>-7</td> <td>+7</td> </tr> <tr> <td>Αντίθετος</td> <td>-1</td> <td>+2</td> <td>-2</td> <td>+19</td> <td>-8</td> <td>12</td> <td>+7</td> <td>-7</td> </tr> <tr> <td>Απόλυτη τιμή</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>19</td> <td>8</td> <td>12</td> <td>7</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	Αριθμός	1	-2	+2	-19	+8	-12	-7	+7	Αντίθετος	-1	+2	-2	+19	-8	12	+7	-7	Απόλυτη τιμή	1	2	19	8	12	7		
Αριθμός	1	-2	+2	-19	+8	-12	-7	+7																				
Αντίθετος	-1	+2	-2	+19	-8	12	+7	-7																				
Απόλυτη τιμή	1	2	19	8	12	7																						

9. (α) $+41 > +38$, (β) $9 < 11$, (γ) $-3 < -2$, (δ) $-9 > -16$
 (ε) $7 > -8$, (στ) $0 > -3$, (ζ) $0 < +4$.
 10. (α) $-11 < 11 = |11|$, (β) $-3 < +3 = |-3|$.
 11. $-10 < -8 < -4 < -3 < -2 < 0 < +5 < +7 < +15$.
 12. (α) $-3 > -8$, (β) $-4 < 10$, (γ) $0 > -1$, (δ) $+3 > 0$,
 (ε) $-5 = -|-5|$, (στ) $-5 = -(+5)$, (ζ) $|+7| = |-7|$,
 (η) $-(-8) > -8$, (θ) $+3 > -(+4)$, (ι) $0 > |-4|$.
 13. (α) -12, -11, -10, -9, (β) κανένα, (γ) -1, 0, +1, +2, +3, +4.

A.7.3. Πρόσθεση ρητών αριθμών

- (α) Λ, (β) Λ, (γ) Λ, (δ) Λ, (ε) Σ.
- (α)+10,2, (β) +9,1, (γ) +100, (δ) +14, (ε) +16,
(στ) -6, (ζ) -6,5, (η) -12, (θ) -15, (ι) -20.
- (α) -2,1, (β) +0,96, (γ) +94,6, (δ) +8,8, (ε)-1,5,
(στ) +1, (ζ) +3,9, (η) +2,2, (θ) +4,5, (ι) +7,4.
- (α) (+6)+(-8) = -2, (β) (+5)+(-5)=0,
(γ) (+7)+(+9)=+16, (δ)(-9)+(-8)=-17,
(ε) (+6)+(+5)=+11.

4.

+	+4	-8	-11	+17
-5	-1	-13	-16	+12
+9	+13	+1	-2	+26
-4	0	-12	-15	+13
-21	-17	-29	-32	-4

- Το πρώτο ΝΑΙ, το δεύτερο ΟΧΙ.
- (α) +1,8, (β) +4. 8. (α) -1, (β) 0.

A.7.4. Αφαίρεση ρητών αριθμών

- (α) Λ, (β) Λ, (γ) Λ, (δ) Λ, (ε) Σ, (στ) Λ, (ζ) Σ.
- (α) 12, (β) -16, (γ) +13,2, (δ) -3,9, (ε) 0.
- (α) 14, (β) 20, (γ) 0.

- (α)+10, (β)-19, (γ) +22.
- (α)-10, (β)-26, (γ) -0,375, (δ) 3,25.
- (α) -8, (β) 7,4, (γ) -0,75.

5.

α	β	α+β	α-β
+3	-8	-5	+11
+18	-8	+10	+26
-2	-5	-7	+3
-9	+15	+6	-24

7.

α	β	α-β	β-α
7	3	4	-4
11/4	13/4	-1/2	1/2
-5,55	-2,45	-3,1	3,1
3	-2,1	5,1	-5,1

9.

x	3,5	2	1,89	0,75
y	-1,5	4,3	-4,78	-0,25
z	-2	-2,3	3,11	0
x+y+z	0	4	0,22	0,5
x-y-z	7	0	3,56	1

A.7.5. Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

- (α) +1, (β) 30, (γ) 0,6, (δ) 0, (ε) -20015, (στ) -725,
(ζ) -0,3.
- (α) -81, (β) -500, (γ) +6.

- (α) +21, (β) 0,025, (γ)-11.
- (α) $10+2\alpha+5\beta+\alpha\beta$, (β) $\alpha\alpha-49$, (γ) $\alpha\beta-3\alpha-3\beta+9$,
(δ) $\gamma\delta+5\gamma+8\delta+40$.
- (α) +1, (β) -1, (γ)+1.
- A=40, B=+210, Γ=0.

4.

•	-1	-0,5	0	+2	+3
-2	+2	+1	0	-4	-6
-3,2	+3,2	+1,6	0	-6,4	-9,6
+1,5	-1,5	-0,75	0	+3	+4,5
+10	-10	-5	0	+20	+30

9.

x	y	z	ω	A=xyz	B=yxω	Γ=xA-B	AB+Γ
-2	0,5	+1	-3	-1	+3	-1	-4
-0,5	+6	-4	-0,3	+12	+0,9	-6,9	+3,9
-2	+1,5	0,2	-7	-0,6	+21	-19,8	-32,4

A.7.6. Διαίρεση ρητών αριθμών

- (α) +5,05, (β) 3, (γ) -90, (δ) -7.

3.

x	y	x+y	x-y	xy	x:y
$-\frac{7}{3}$	$\frac{5}{-6}$	$-\frac{19}{6}$	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{35}{8}$	$+\frac{14}{5}$
1,7	2,3	4	-0,6	+3,91	$\frac{17}{23}$
$-\frac{4}{5}$	-1	$-\frac{9}{5}$	$+\frac{1}{5}$	$+\frac{4}{5}$	$+\frac{4}{5}$

- (α) +40, (β) +1,5, (γ) +6, (δ) $\frac{6}{5}$

- (α) $-24\frac{2}{3}$, (β)+350, (γ) -6, (δ) -1

- (α) $\frac{2}{15}$, (β) -1, (γ) $+\frac{4}{9}$

- +32.

A.7.7. Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

- (α) -1,5, (β) 0,625, (γ) 0,9285714 (δ) $1,8\bar{1}$ (ε) 1,032258064516129

- (α) $\frac{1448}{25}$, (β) $\frac{26}{9}$, (γ) $\frac{380}{99}$, (δ) $\frac{24829}{3330}$, (ε) $\frac{77}{5}$.

- (α) 3, (β) 7,7, (γ) 7,326.

A.7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

2.

$3+5^2$	$(3+5)^2$	$3\cdot 5^2$	$(3\cdot 5)^2$	$3-5^2$	$(3-5)^2$	$\frac{3^2}{5}$	$(\frac{3}{5})^2$
Άθροισμα των 3 και 5^2	Τετράγωνο του αθροίσματος 3 και 5	Γινόμενο των 3 και 5^2	Τετράγωνο του γινομένου 3 επί 5	Διαφορά των 3 και 5^2	Τετράγωνο της διαφοράς 3 πλην 5	Πηλίκο των 3^2 και 5	Τετράγωνο του πηλίκου 3 δια 5
28	64	75	225	-22	4	1,8	0,36

- A = -1, B=0, Γ=8.

A.7.9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

1.	α	β	γ	(α+β)²	(αβ)²	($\frac{\alpha}{\beta}$)²	(-α)⁻²	(γβ)⁻¹	2. A = 0, B = $\frac{1105}{81}$, Γ = -8.
	$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{5}$	+2,25	+1	+0,0625	+4	+2,5	
	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	+2,25	+0,25	+0,25	+1	$-\frac{4}{3}$	3. $10^3 + 10^2 = 1.100$
	10	-10	0,01	0	+10000	+1	+0,01	-10	

4.	x	0,001	0,01	0,1	-10	-100	$2 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{5}$
	x⁻³	10 ⁹	10 ⁶	10 ³	-10 ⁻³	-10 ⁻⁶	0,125·10 ⁻¹²	8·10 ⁶	8	$\frac{8}{27}$	-125
	x³	10 ⁻⁹	10 ⁻⁶	10 ⁻³	-10 ³	-10 ⁶	8·10 ¹²	125·10 ⁻⁹	0,125	$\frac{27}{8}$	-0,008
	x⁻¹	10 ³	10 ²	10	-0,1	-0,01	0,5·10 ⁻⁴	200	2	$\frac{2}{3}$	-5

5.	·	10⁻³	10⁻²	10⁻¹	10⁰	10¹	10²	10³
	10⁻³	10 ⁻⁶	10 ⁻⁵	10 ⁻⁴	10 ⁻³	10 ⁻²	10 ⁻¹	1
	10⁻²	10 ⁻⁵	10 ⁻⁴	10 ⁻³	10 ⁻²	10 ⁻¹	1	10
	10⁻¹	10 ⁻⁴	10 ⁻³	10 ⁻²	10 ⁻¹	1	10	10 ²
	10⁰	10 ⁻³	10 ⁻²	10 ⁻¹	1	10	10 ²	10 ³
	10¹	10 ⁻²	10 ⁻¹	1	10	10 ²	10 ³	10 ⁴
	10²	10 ⁻¹	1	10	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵
	10³	1	10	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶

A.7.10. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών

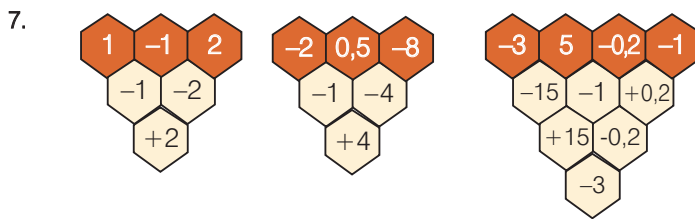
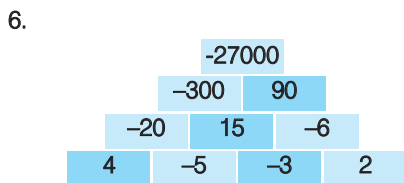
1. (α) $3,844 \cdot 10^9$ m, (β) $4,5 \cdot 10^9$ έτη, (γ) $1,496 \cdot 10^{11}$ m. 2. $6 \cdot 10^{26}$ άτομα. 3. (α) 10^{-14} cm, (β) $9,7 \cdot 10^{-23}$ gr.

Απαντήσεις στις Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

A. Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους B. Ασκήσεις Συμπλήρωσης κενού

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ

1. (α) $(+8)+(-3)+(-6)+(+5)=+4$, (β) $(-8)+(-3)+(+6)+(-5)=-10$,
 (γ) $(+3,7)+(-14,8)+(-5,2)+(+16,3)=0$, (δ) $(-3,7)+(+14,8)+(-5,2)+(-16,3)=-10,4$
 2. $E > \Gamma > A > B > \Delta$. 3. (α) -25, (β) 100. 4. ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ. 5. (α) 3 τρόποι, (β) +15,75



Γ. Ασκήσεις Αντιστοίχισης

(α)

-3	-20
-20	0
+2	-3
+20	+2
0	+20

(β)

+31	-4
+8	0
-30	-30
0	+8
-4	+31

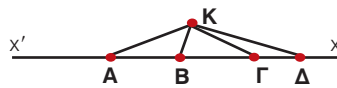
(γ)

-90	+900
+90	-900
-900	+9
+900	-90
+9	+90

Μέρος Β' Κεφάλαιο 1^ο Βασικές γεωμετρικές έννοιες

B.1.1. Επίπεδο - Σημείο - Ευθύγραμμο τμήμα - Ευθεία - Ημιευθεία - Ημιεπίπεδο

3. ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ, ΓΔ. 4. $x'A$, Ax και $x'B$, Bx .
 5. Η αντικειμενική ημιευθεία του ABx είναι Ax' , του $B\gamma$ ή $B\gamma'$ και του ΓAz ή $\Gamma z'$.



B.1.2. Γωνία - Γραμμή - Επίπεδα σχήματα - Ευθύγραμμα σχήματα - Ίσα σχήματα

1. (α) \widehat{BA} , (β) \widehat{ZKA} , \widehat{AKB} , \widehat{BKH} και \widehat{HKZ} , (γ) \widehat{BAG} , \widehat{GAD} και \widehat{BAD} , (δ) \widehat{ABG} , \widehat{BAG} και \widehat{AGD} .
 2. (α) Η γωνία \widehat{B} περιέχεται ανάμεσα στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ. (β) Απέναντι από τη γωνία $\widehat{\Gamma}$ είναι η ΑΒ.
 (γ) Οι γωνίες οι προσκείμενες στην πλευρά ΑΓ είναι οι \widehat{A} και η $\widehat{\Gamma}$.
 3. Γραμμοσκιάζουμε την γωνία στην οποία ανήκει το σημείο Α και την ονομάζουμε $x'Oy$.
 4. (α) Οι γωνίες οι προσκείμενες στην πλευρά ΒΓ είναι οι \widehat{B} και η $\widehat{\Gamma}$. (β) Η γωνία $\widehat{\Gamma}$ βρίσκεται απέναντι στη πλευρά ΑΒ.
 5. (α)

ΚΟΡΥΦΕΣ					ΠΛΕΥΡΕΣ				
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
x					x				
		x					x		
			x					x	
				x					x

(β)

ΑΡΙΘΜΟΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ														
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x														
		x												
				x										
						x								
								x						
										x				
												x		
													x	

B.1.3. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων - Απόσταση σημείων - Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

3. Έμειναν 49,56 cm ύφασμα. 4. 79.500 cm. Ο πεζός θα κάνει: 1060 βήματα.
 5. Η περίμετρος του τετραγώνου είναι: 61,2 m. Το διαθέσιμο σύρμα έχει μήκος: 60,48 m. Άρα πρέπει να αγοράσει 72 cm σύρμα.

6.

Ακτίνα	σε m	σε km
ΑΦΡΟΔΙΤΗ	6.085.000	6.085
ΓΗ	6.378.000	6.378
ΑΡΗΣ	3.750.000	3.750
ΔΙΑΣ	71.400.000	71.400

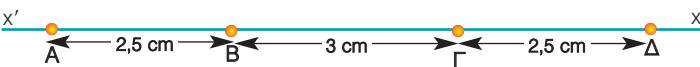
7.

	ΑΒ	ΒΓ	ΓΔ	ΔΕ	ΕΑ	Περίμετρος
cm	517	420	84	1250	76	2.347
dm	51,7	42	8,4	125	7,6	234,7
m	5,17	4,2	0,84	12,5	0,76	23,47

8. Με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε και σημειώνουμε τρία σημεία που απέχουν τα καθένα 2,7cm από το σημείο Α.
 9. (α) $AG > AD$, (β) $AB = AD$.



10. $AG = 5,5$ cm και $BD = 5,5$ cm. Άρα $AG = BD$.

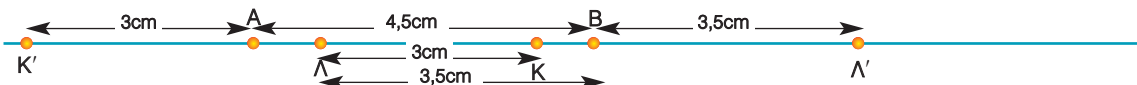
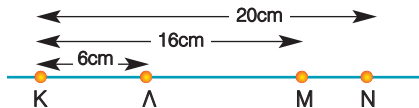


11. $AB = 8,4$ cm.

12. Με το υποδεκάμετρο επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο Μ που απέχει 3,3 cm από το Α εκτός της ευθείας στην οποία βρίσκεται το ΑΒ. Βρίσκουμε το μέσον του ΑΒ έστω Ο και φέρνουμε την ΟΜ.

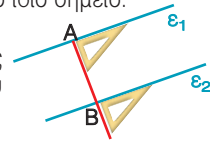
B.1.4. Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων

1. Με κατάλληλες μετρήσεις και πρόσθεση βρίσκουμε ότι το μήκος της τεθλασμένης και το συγκρίνουμε με το μήκος του ΖΗ.
 2. Η περίμετρος του ισοπλεύρου τριγώνου ισούται με $3 \cdot 2,5$ cm = 7,5 cm. Άρα, επί της ημιευθείας με αρχή το Β παίρνουμε ένα σημείο Ε έτσι, ώστε $BE = 7,5$ cm.
 3. Το μήκος της τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔΕΖ είναι ίσο με $AB + BG + GD + DE + EZ = \dots = 71$ mm.
 4. Ομοίως έχουμε: $AB + BG + GD + DE = \dots = 158$ cm.
 5. $AM = KM - KL = 10$ cm, $AN = KN - KL = 14$ cm και $MN = KN - KM = 4$ cm.
 6. (α) $AD = AB + BD = 8,5$ cm, (β) $BG = AG - AB = 1,6$ cm,
 (γ) $AG + GD = AG + (BD - BG) = 8,5$ cm, (δ) $AD - DB = AD - BD = AB = 3$ cm.
 7. $GD = AD - (AB + BG) = AD - AB - BG = 3$ cm.
 8. Έχουμε ότι: $BG = AB + 4$ cm, $BG = GD - 3$ cm και $AD = 14$ cm. Με κατάλληλες πράξεις βρίσκουμε ότι: $BG = 5$ cm και $GD = 8$ cm.
 9. $BD = AD - AB = \dots 3$ cm, $AG = AB + BG = \dots 3$ cm.
 10. Έχουμε: $AD = AG + GD = 4,5$ cm και $GE = AE - AG = 3,2$ cm.
 11. Επειδή το σημείο Κ, όπως και το σημείο Λ, μπορούμε να τα πάρουμε εκατέρωθεν των σημείων Α και Β αντίστοιχα, για τον υπολογισμό του ΚΛ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις: (1) Κ και Λ εντός του τμήματος ΑΒ. Τότε μετράμε με το υποδεκάμετρο και βρίσκουμε $KL = 2$ cm. (2) Κ και Λ εκτός ΑΒ στις θέσεις Κ' και Λ' αντίστοιχα. Τότε βρίσκουμε $K'L' = 11$ cm. (3) Αν το Κ είναι εντός και το Λ εκτός, τότε βρίσκουμε: $K'L' = 5$ cm. (4) Αν το Κ είναι εκτός και το Λ εντός βρίσκουμε $K'L' = 4$ cm. Άρα: (α) Το ΚΛ ανάλογα με τις θέσεις που επιλέξαμε παίρνει τις τιμές: 2 cm, 3 cm, 4 cm ή 11 cm. (β) Την τιμή των 11 cm παίρνει το ΚΛ όταν και το Κ και το Λ είναι εκτός του ΑΒ. (γ) Από τη παραπάνω διευκρίνιση προέκυψε ότι σε καμιά περίπτωση δεν υπερβαίνει την τιμή των 11 cm.



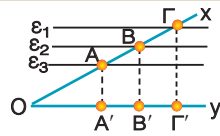
B.1.9. Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

- (α) Και οι τρεις ευθείες είναι μεταξύ τους παράλληλες.
(β) Οι δύο είναι παράλληλες ενώ η τρίτη που τέμνει δεν είναι παράλληλη με καμιά από αυτές και τις τέμνει.
(γ) Τέμνονται ανά δύο.
(δ) Διέρχονται και οι τρεις από το ίδιο σημείο.

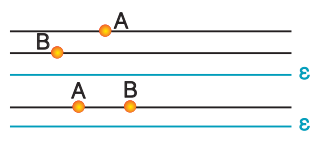


- Με τον γνώμονα σχεδιάζουμε τις κάθετες ευθείες στα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.

- Σχεδιάζουμε τις ευθείες e_1, e_2 και e_3 παράλληλες προς την Oy . Επομένως θα είναι: $AA' // BB' // GG' // Oy$.



- Οι παράλληλες από Α και Β συμπίπτουν όταν τα σημεία Α και Β βρίσκονται σε μια ευθεία παράλληλη προς την e .

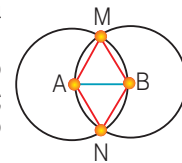


B.1.10. Απόσταση σημείου από ευθεία - Απόσταση παραλλήλων

- Φέρνουμε την κάθετο AB στην $ΓΒΔ$, μετράμε με το υποδεκάμετρο τις $ΑΓ$ και $ΑΔ$ και βρίσκουμε ότι είναι ίσες με 5 cm.
- Φέρνουμε την κάθετο AB στην $ΓΒΔ$, μετράμε με το υποδεκάμετρο τις $ΑΓ$ και $ΑΔ$ και βρίσκουμε ότι είναι άνισες και μάλιστα η μεγαλύτερη $ΑΔ$ αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη απόσταση $ΔB$ και η μικρότερη $ΑΓ$ στην μικρότερη $ΒΓ$.
- Με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε ότι είναι: $A'B' = 1,6$ cm και $B'Γ' = 1,6$ cm.
- Με το γνώμονα και το υποδεκάμετρο βρίσκουμε τα σημεία $A, B, Γ$ και $Δ$ που απέχουν απόσταση 3,2 cm από την e . Φέρνουμε από το καθένα παράλληλη προς την e και παρατηρούμε ότι και οι τέσσερις ευθείες που φέραμε συμπίπτουν σε μια.
- Για να βρούμε τα σημεία $A, B, Γ, Δ$ και E , σχεδιάζουμε σε διάφορες θέσεις τις αποστάσεις $ΚΚ', ΛΛ', ΜΜ', ΗΗ',$ και $ΘΘ'$ μεταξύ των παραλλήλων e_1 και e_2 και βρίσκουμε τα μέσα τους. Από το ένα από αυτά, το A , φέρνουμε παράλληλη ευθεία e προς τις e_1 και e_2 και παρατηρούμε, ότι αυτή περνάει και από τα άλλα σημεία $B, Γ, Δ$ και E .
- Προεκτείνουμε την BA κατά 1cm και φέρνουμε την παράλληλη προς την e από αυτή την απόσταση, η οποία τέμνει την Ax στο σημείο $Γ$ που είναι το ζητούμενο.

B.1.11. Κύκλος και στοιχεία κύκλου

- Με τον διαβήτη χαράσσουμε τους τρεις κύκλους με κέντρο το σημείο M και ακτίνες 2,4cm, 2cm και 15 mm.
- Για να σχεδιάσουμε τον κύκλο με διάμετρο AB πρέπει να βρούμε το κέντρο του που είναι το μέσο O της AB και η ακτίνα είναι το μισό του μήκους της AB δηλαδή 1,9 cm.
- Οι ακτίνες των ζητούμενων κύκλων θα είναι τα μισά μήκη των διαμέτρων, δηλαδή 2cm, 2,5cm και 24mm.
- Σχεδιάζουμε τον κύκλο με κέντρο K και ακτίνα 3,4cm και ορίζουμε ένα σημείο του M . Γράφουμε δύο κύκλους με κέντρο το M και ακτίνες τα μήκη των χορδών 2,4cm και 4,1cm οι οποίοι τέμνουν τον κύκλο ($K, 3,4$ cm) ο καθένας σε δύο σημεία A και A', B και B' . Οι ζητούμενες χορδές είναι MA και MA' (δύο λύσεις) και MB και MB' (δύο λύσεις).
- Γράφουμε τους κύκλους ($A, 3$ cm) και ($B, 2$ cm), που τέμνονται στα σημεία K και L . Τότε, αυτά τα σημεία απέχουν ταυτόχρονα 3 cm από το A και 2 cm από το B .
- Επειδή το σημείο M είναι σημείο τομής των δύο κύκλων ανήκει ταυτόχρονα και στους δύο κύκλους επομένως η απόστασή του από το κέντρο των κύκλων ισούται με την ακτίνα του καθενός και επειδή οι ακτίνες των δύο κύκλων είναι ίσες θα είναι $MA=MB$. Ομοίως και για το σημείο N θα έχουμε $NA=NB$.



B.1.12. Επίκεντρη γωνία - Σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντιστοίχου τόξου - Μέτρηση τόξου

- (α) 360° , (β) 180° , (γ) 90° .
- Δύο των 60° και δύο των 120° .
- Όχι, διότι ενώ έχουν το ίδιο μέτρο δεν ανήκουν σε ίσους κύκλους.
- Αφού τα τόξα είναι ίσα θα είναι και οι επίκεντρες γωνίες ίσες, άρα θα είναι $360^\circ : 6 = 60^\circ$.
- Η επίκεντρη γωνία $\hat{A}OB$ είναι 60° και αντιστοιχεί στο $60^\circ : 360^\circ = \frac{1}{6}$ του κύκλου.
- Κατασκευάζουμε το τρίγωνο $ABΓ$. Με το μοιρογνωμόνιο βρίσκουμε ότι οι γωνίες \hat{B} και \hat{A} είναι περίπου 70° , ενώ η γωνία $\hat{Γ}$ είναι περίπου 40° .

B.1.13. Θέσεις ευθείας και κύκλου

- Σχεδιάζουμε τις παράλληλες ευθείες e_1 και e_2 . Παίρνουμε ένα σημείο M πάνω στην e_1 και με κέντρο το M και ακτίνα 3,6cm γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την e_2 σε δύο σημεία A και B . Τα σημεία A και B είναι τα ζητούμενα.
- Οι εφαπτόμενες του κύκλου e_1 και e_2 είναι κάθετες στην AB άρα είναι μεταξύ τους παράλληλες.
- (α) Γνωρίζουμε ότι η απόσταση $\delta = 4$ cm του κέντρου του κύκλου από την ευθεία e είναι μικρότερη από την ακτίνα του $\rho = 5$ cm, η ευθεία e τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία, (β) όταν η απόσταση $\delta = 2,5$ cm είναι ίση με την ακτίνα $\rho = 2,5$ cm, τότε η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο και έχει μαζί του ένα κοινό σημείο, το σημείο επαφής και (γ) όταν είναι $\delta = 6$ cm $> \rho = 3$ cm, τότε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
- Το κέντρο K των κύκλων απέχει από την ευθεία e_2 απόσταση $KA = 3,1$ cm. Επομένως ο κύκλος με ακτίνα $\rho = 2,1$ cm δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την e_2 . Ο κύκλος με ακτίνα $\rho = 3,1$ cm έχει ένα κοινό σημείο με την e_2 , άρα εφάπτεται σ' αυτήν. Κι ο κύκλος με ακτίνα $\rho = 3,6$ cm έχει δύο κοινά σημεία με την e_2 , άρα τέμνονται.
- Το σημείο M είναι αφενός σημείο του κύκλου ($A, 18$ mm) και αφετέρου του κύκλου ($B, 22$ mm) Επομένως η κάθετη στην AB ευθεία e , είναι κάθετη ταυτόχρονα στις άκρες των ακτίνων των δύο κύκλων άρα εφαπτόμενη και στους δύο.

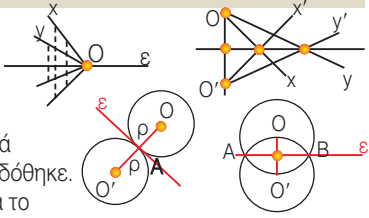
Απαντήσεις στις Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ

Μέρος Β' Κεφάλαιο 2° Συμμετρία

B.2.1. Συμμετρία ως προς άξονα

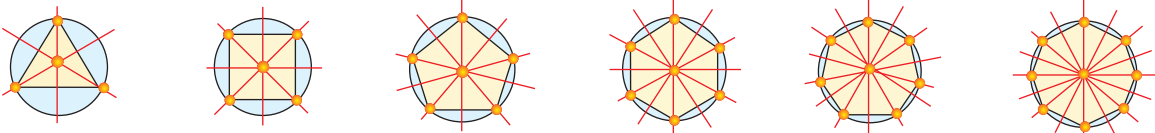
- (α) Επειδή το O ανήκει στην ϵ έχει συμμετρικό τον εαυτό του επομένως αρκεί να πάρουμε ένα σημείο σε κάθε πλευρά της γωνίας και να βρούμε τα συμμετρικά τους. (β) Αντιθέτως εδώ βρίσκουμε το O' συμμετρικό του O και τα άλλα δύο σημεία είναι αυτά που τέμνει η ϵ τις πλευρές της γωνίας.
- Και στις δύο περιπτώσεις βρίσκουμε το O' συμμετρικό του O . Επειδή τα συμμετρικά σχήματα είναι ίσα η ακτίνα του συμμετρικού κύκλου είναι η ίδια με του κύκλου που δόθηκε.
- Σχεδιάζουμε αρχικά το συμμετρικό Σ' του σχήματος Σ ως προς την ϵ και στη συνέχεια το συμμετρικό Σ'' του Σ' ως προς την ϵ' και παρατηρούμε ότι όχι μόνο είναι ίσο με το αρχικό αλλά και ομοίως κείμενο.



B.2.2. Άξονας συμμετρίας

2.	ΑΡ.ΑΞΟΝ. ΣΥΜ.	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω
0		x	x				x				x			x				x							
1		x			x	x						x	x				x		x	x	x			x	x
2								x	x	x					x	x						x	x		

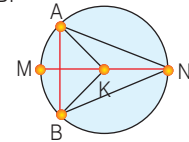
3. Σχεδιάζουμε τους άξονες συμμετρίας που έχουν πλήθος: (α) 3, (β) 4, (γ) 5, (δ) 6, (ε) 7, (στ) 8.



- Ο άξονας συμμετρίας δύο ίσων και τεμνόμενων κύκλων είναι: (α) η ευθεία της κοινής χορδής και (β) η διάκεντρος (η ευθεία που ενώνει τα κέντρα και των δύο κύκλων).
- (α) Όταν είναι ομόκεντροι κάθε ευθεία που διέρχεται από το κοινό κέντρο είναι άξονας συμμετρίας. (β) Όταν έχουν διαφορετικά κέντρα άξονας συμμετρίας είναι η διάκεντρος τους.

B.2.3. Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

- Κατασκευάζουμε με κανόνα και διαβήτη την μεσοκάθετο του AB και βρίσκουμε το μέσο του Δ . Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τις μεσοκάθετες των ευθυγράμμων τμημάτων AD και ΔB και βρίσκουμε τα μέσα τους.
- Η μεσοκάθετος της KA τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ . Αυτά είναι τα ζητούμενα σημεία.
- Για να απέχει εξίσου η στάση πρέπει να βρίσκεται στη μεσοκάθετο της απόστασης των δύο οικισμών A και B .
- Για να απέχει εξίσου πρέπει να βρίσκεται στη μεσοκάθετο της απόστασης των δύο χωριών A και B .
- Με κανόνα και διαβήτη κατασκευάζουμε τις μεσοκάθετες των πλευρών του τριγώνου.
- (α) Συγκρίνουμε τα MA και MB και βρίσκουμε ότι είναι ίσα. Αλλά το M είναι το σημείο της μεσοκαθέτου του AB επομένως ισαπέχει από τα άκρα του, άρα $MA=MB$. (β) Ομοίως και το N είναι σημείο της μεσοκαθέτου, άρα $NA=NB$. (γ) Τα σημεία A και B είναι σημεία του κύκλου άρα $KA=KB$. Δηλαδή, το K είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AB .
- Διέρχονται από το κέντρο K του κύκλου. 9. Η τομή της μεσοκαθέτου του AB και της ϵ είναι το ζητούμενο σημείο.



B.2.4. Συμμετρία ως προς σημείο

- Έστω ότι τα συμμετρικά των B και Γ είναι τα B' και Γ' τότε το $B\Gamma$ θα έχει συμμετρικό το $B'\Gamma'$ άρα τα $B\Gamma$ και $B'\Gamma'$ είναι ίσα και τα μέσα τους, ως αντίστοιχα στοιχεία θα είναι μεταξύ τους συμμετρικά. Αλλά το συμμετρικό του M , ως προς το A , είναι το M' και επειδή το $B'\Gamma'$ έχει ένα μέσο συνεπάγεται ότι αυτό θα είναι το αντίστοιχο του $B'\Gamma'$ δηλαδή το συμμετρικό του M .
- Το O είναι μέσον της BD δηλαδή $OB=OD$. Τα A και Γ είναι συμμετρικά ως προς το O επομένως θα είναι $AO=OG$. Επομένως το τετράπλευρο $AB\Gamma D$ είναι παραλληλόγραμμο.

B.2.5. Κέντρο συμμετρίας

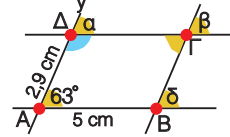
1.	ΚΕΝΤΡΟ ΣΥΜ.	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω
0		x	x	x	x	x					x	x	x				x	x	x	x	x			x	x
1							x	x	x	x				x	x	x						x	x		

2. Τα δύο πρώτα δεν έχουν κέντρο συμμετρίας. Από τα τραπουλόχαρτα έχουν η ντάμα, το 8 κούπα και το 8 καρό.

3.	Άξονες Συμμετρίας						Έχει κέντρο συμμετρίας
	Κανένα	Ένα	Δύο	Τρεις	Τέσσερις	Περισσότερους	
Ευθύγραμμο τμήμα			x				x
Ισοσκελές τρίγωνο		x					
Ισόπλευρο τρίγωνο				x			
Παραλληλόγραμμο	x						x
Ορθογώνιο			x				x
Ρόμβος			x				x
Τετράγωνο					x		x
Κύκλος						x	x

B.2.6. Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία

- Έστω $\hat{\alpha}=12^\circ$. Η γωνία $\hat{\alpha}$ και όλες οι οξείες γωνίες του σχήματος είναι ίσες με 12° . Η παραπληρωματική της $\hat{\alpha}$, έστω η γωνία $\hat{\gamma}$ θα είναι ίση με $180^\circ - \hat{\alpha} = 180^\circ - 12^\circ = 168^\circ$. Οι γωνίες $\hat{\gamma}$ και όλες οι αμβλείες γωνίες του σχήματος είναι ίσες με 168° .
- $\hat{\beta} = \hat{\gamma} = 70^\circ$ ως εντός-εκτός και επί τα αυτά των $e_3//e_4$ τεμνομένων από e_2 .
 $\hat{\beta} = \hat{\zeta} = 70^\circ$ ως εντός-εκτός και επί τα αυτά των $e_1//e_2$ τεμνομένων από e_3 .
 $\hat{\zeta} + \hat{\epsilon} = 180^\circ$ ως εντός-εκτός και επί τα αυτά των $e_3//e_4$ τεμνομένων από e_1 , άρα $\hat{\epsilon} = 180^\circ - \hat{\zeta} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.
 $\hat{\alpha} + \hat{\delta} = 180^\circ$ ως εντός-εκτός εναλλάξ των $e_1//e_2$ τεμνομένων από e_5 , άρα $\hat{\delta} = 180^\circ - \hat{\alpha} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.
- Θα έχουμε ότι $\hat{\alpha} = \hat{A} = 63^\circ$ επειδή είναι εντός-εκτός και επί τα αυτά των $AB//\Delta\Gamma$ τεμνομένων από την AD . Άρα $\hat{\Delta} = 180^\circ - \hat{\alpha} = 180^\circ - 63^\circ = 117^\circ$. Επίσης είναι $\hat{\beta} = \hat{\alpha} = 63^\circ$ επειδή είναι εντός-εκτός και επί τα αυτά των $B\Gamma//AD$ τεμνομένων από την $\Delta\Gamma$. Άρα $\hat{\Gamma} = \hat{\beta} = 63^\circ$ αφού είναι κατακορυφήν. Έχουμε και $\hat{\delta} = \hat{\beta} = 63^\circ$ γιατί είναι πάλι εντός-εκτός και επί τα αυτά των $AB//\Delta\Gamma$ τεμνομένων από την $B\Gamma$. Άρα $\hat{B} = 180^\circ - \hat{\delta} = 180^\circ - 63^\circ = 117^\circ$.
- Αφού η δ_2 είναι διχοτόμος θα είναι: $2\hat{\phi} = 56^\circ$, διότι είναι εντός εναλλάξ των $e_1//e_2$ τεμνομένων από την AB . Άρα $\hat{\phi} = 28^\circ$. Όμως $\hat{\phi} = \hat{\alpha} = 28^\circ$, ως εντός εναλλάξ των $e_1//e_2$ τεμνομένων από την δ_2 . Επειδή $\hat{\alpha}$ και $\hat{\gamma}$ είναι κατακορυφήν γωνίες θα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\gamma} = 28^\circ$. Τέλος οι $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι παραπληρωματικές, άρα είναι $\hat{\beta} = 180^\circ - \hat{\alpha} = 180^\circ - 28^\circ = 152^\circ$.
- Έχουμε $\hat{\phi} + 116^\circ = 180^\circ$ διότι είναι εντός και επί τα αυτά των $e_1//e_2$ τεμνομένων από την e_3 , άρα είναι: $\hat{\phi} = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$. Αλλά έχουμε $\hat{\phi} = \hat{\beta} = 64^\circ$ ως εντός-εκτός και επί τα αυτά των $e_3//e_4$ τεμνομένων από την e_2 . Τέλος είναι $\hat{\alpha} = 180^\circ - \hat{\beta} = 116^\circ$.
- Είναι $\hat{\omega} = 30^\circ$ ως εντός εναλλάξ των $AD//B\Gamma$ τεμνομένων από BD . Επίσης $\hat{\theta} = 105^\circ$ ως εντός εναλλάξ των $AD//B\Gamma$ τεμνομένων από $\Gamma\Delta$. Είναι όμως $\hat{\alpha} = \hat{\theta} = 105^\circ$ ως εντός-εκτός και επί τα αυτά των $AB//\Delta\Gamma$ τεμνομένων από AD . Αλλά έχουμε και $\hat{\theta} + (\hat{\omega} + \hat{\phi}) = 180^\circ$ επομένως $105^\circ + 30^\circ + \hat{\phi} = 180^\circ$ άρα $\hat{\phi} = 45^\circ$. Είναι όμως $\hat{\gamma} = \hat{\phi} = 45^\circ$ ως εντός εναλλάξ των $\Gamma\Delta//AB$ τεμνομένων από BD . Τέλος $\hat{\epsilon} = 75^\circ$.



Μέρος Β' Κεφάλαιο 3ο - Τρίγωνα - Παραλληλόγραμμα - Τραπεζίδια

B.3.1. Στοιχεία τριγώνου - Είδη τριγώνων

- (α) Σ, (β) Λ, (γ) Σ, (δ) Σ, (ε) Λ, (στ) Σ, (ζ) Σ, (η) Λ. $BK=KM=ML=ΛΓ=1,1\text{cm}$.
- Έχουμε ότι $BK=KM$, $ML=ΛΓ$ και $BM=MΓ$ οπότε **3.** $\Delta M=MZ$ **4.** $AP=PB$. **5.** $AN=ΝΓ$.

B.3.2. Άθροισμα γωνιών τριγώνου - Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

- (α) Σ, (β) Λ, (γ) Λ, (δ) Λ, (ε) Σ, (στ) Λ, (ζ) Σ, (η) Σ, (θ) Λ.
- Σχεδιάζουμε τμήμα $B\Gamma$ και φέρνουμε από το B την ημιευθεία Bx έτσι, ώστε να σχηματιστεί γωνία $\hat{B} = 75^\circ$. Μετά από το Γ φέρνουμε την ημιευθεία Γy έτσι, ώστε να σχηματιστεί γωνία $\hat{\Gamma} = 35^\circ$. Έστω A το σημείο που τέμνονται οι ημιευθείες Bx και Γy . Όμως $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ άρα είναι $\hat{A} = 180^\circ - 75^\circ - 35^\circ = 70^\circ$.
- Σχεδιάζουμε τμήμα $AB=4,2\text{cm}$ και φέρνουμε από το B την ημιευθεία Bx έτσι, ώστε να σχηματιστεί γωνία $\hat{B} = 60^\circ$. Μετά από το A φέρνουμε την ημιευθεία Ay έτσι, ώστε να σχηματιστεί γωνία $\hat{A} = 90^\circ$. Ονομάζουμε Γ το σημείο στο οποίο τέμνονται οι ημιευθείες Bx και Ay . Με το μοιρογνωμόνιο μετράμε τη γωνία $\hat{\Gamma}$. Όμως $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ άρα είναι $\hat{\Gamma} = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Μετράμε την πλευρά $B\Gamma$ και βρίσκουμε ότι είναι: $B\Gamma = 2,1\text{ cm}$.
- Είναι $\hat{\alpha} = 52^\circ$ και $\hat{\phi} = 48^\circ$ (κατακορυφήν). Έχουμε $\hat{\delta} = \hat{\phi} = 48^\circ$ γιατί είναι εντός εναλλάξ των $e_1//e_2$ τεμνομένων από δ_1 . Γνωρίζουμε ότι είναι $\hat{\alpha} + \hat{\delta} + \hat{\gamma} = 180^\circ$, άρα $\hat{\gamma} = 180^\circ - 52^\circ - 48^\circ = 80^\circ$. Τότε όμως θα είναι $\hat{\beta} = \hat{\gamma} = 80^\circ$ (κατακορυφήν).
- (α) Έχουμε $\hat{\phi} + 35^\circ + 72^\circ = 180^\circ$, οπότε $\hat{\phi} = 73^\circ$. (β) Έχουμε $\hat{\phi} + 35^\circ + (180^\circ - 102^\circ) = 180^\circ$, οπότε $\hat{\phi} = 67^\circ$.
- Φέρνουμε $E\chi//\Gamma\Delta//AB$, οπότε $\hat{\theta} = 40^\circ$ και $\hat{\phi} = 42^\circ$ (εντός εναλλάξ). Επομένως $\hat{\omega} = \hat{\theta} + \hat{\phi} = 40^\circ + 42^\circ = 82^\circ$.
- Έχουμε ότι $74^\circ + 2x = 180^\circ$, οπότε $2x = 180^\circ - 74^\circ$ άρα $2x = 106^\circ$, επομένως $x = 53^\circ$. Δηλαδή, οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι 53° η καθεμιά.
- Θα έχουμε ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$, επομένως $36^\circ + 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$, συνεπώς $3\hat{\Gamma} = 180^\circ - 36^\circ$, άρα $\hat{\Gamma} = 48^\circ$ και $\hat{B} = 96^\circ$.
- Γνωρίζουμε ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$, επομένως $2\hat{B} + \hat{B} + 3\hat{B} = 180^\circ$, συνεπώς $6\hat{B} = 180^\circ$ άρα $\hat{B} = 30^\circ$, δηλαδή $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $\hat{A} = 60^\circ$.
- Καθένα από τα τρίγωνα OAB , OBF , $O\Gamma\Delta$ και $O\Delta A$ έχει άθροισμα γωνιών 180° . Επομένως, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$. Αλλά $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 360^\circ$. Επομένως $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + 360^\circ = 720^\circ$. Άρα $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 720^\circ - 360^\circ = 360^\circ$.

B.3.3. Παραλληλόγραμμο-Ορθογώνιο-Ρόμβος-Τετράγωνο-Τραπεζίδιο-Ισοσκελές τραπέζιο

- (α) Σ, (β) Λ, (γ) Σ, (δ) Λ, (ε) Λ. **2.** Τέσσερα. **3.** Ρόμβος και τετράγωνο. **4.** Ορθογώνιο και πλάγιο παραλληλόγραμμο.

Αλφαβητικό ευρετήριο όρων

α/α	Όροι	Σελίδες	α/α	Όροι	Σελίδες
1	Άγνωστος της εξίσωσης	73	38	Διχοτόμος γωνίας	167, 196
2	Ακέραιο μέρος	57, 69	39	Δυνάμεις	20, 31, 61, 69, 137, 1344
3	Ακέραιοι αριθμοί	115, 144	40	Είδη γωνιών	170, 196
4	Ακτίνα κύκλου	188, 196	41	Είδη εξισώσεων	73, 78
5	Ανάγωγο κλάσμα	38, 54	42	Είδη τετραπλεύρων	225, 226
6	Ανάλογα ποσά	96, 110	43	Είδη τριγώνων	218
7	Αναλογία	91, 110	44	Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)	27, 31
8	Αντίθετοι αριθμοί	118, 123, 144	45	Εξίσωση	73, 78
9	Αντικείμενες ημιευθείες	149	46	Εξωτερική ευθεία κύκλου	193, 196
10	Αντιμεταθετική ιδιότητα	15, 31, 48, 54, 123, 130, 144	47	Επίκεντρο γωνία	190, 196
11	Αντίστοιχα στοιχεία	155	48	Επίλυση εξίσωσης	73, 75, 78
12	Αντίστοιχο τόξο επίκεντρος γωνίας	190, 196	49	Επιμεριστική ιδιότητα	15, 31, 48, 54, 130, 144
13	Αντίστροφοι αριθμοί	48, 54, 130, 144	50	Επίπεδο	150, 195
14	Αντιστρόφως ανάλογα ποσά	107, 111	51	Ετερόσημοι αριθμοί	115, 144
15	Άξονας συμμετρίας	204	52	Έτερόνυμα κλάσματα	38, 54
16	Απόλυτη τιμή αριθμού	118, 114	53	Ευθεία	149, 195
17	Απόσταση	159, 184, 195	54	Ευθύγραμμο σχήματα	154
18	Αριθμητής	35	55	Ευθύγραμμο τμήμα	148, 195
19	Αρνητικοί αριθμοί	115, 144	56	Ευκλείδεια διαίρεση	25, 31
20	Άρτιος αριθμός	11, 31	57	Εφαπτόμενα τμήματα	193, 196
21	Αφαίρεση	15, 31, 45, 54, 60, 69, 126, 144,	58	Εφαπτομένη	193, 196
22	Αφαιρετέος	15, 31	59	Εφεξής γωνίες	173, 196
23	Γινόμενο "χιαστί"	38	60	Ημιεπίπεδο	150, 195
24	Γραφική παράσταση	99, 107, 110, 111	61	Ημιευθεία	149, 195
25	Γωνία	153, 196	62	Θετικοί αριθμοί	115
26	Δεκαδική τάξη	11	63	Ιδιότητες δυνάμεων	140, 144
27	Δεκαδικό κλάσμα	56, 69	64	Ιδιότητες πράξεων	123, 130, 144
28	Δεκαδικό μέρος	57, 69	65	Ιδιότητες τετραπλεύρων	229, 230
29	Δεκαδικό σύστημα	11	66	Ίσα σχήματα	155
30	Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου	219	67	Ισοδύναμα κλάσματα	38, 54
31	Διαδοχικές γωνίες	173, 196	68	Κάθετα ευθύγραμμο τμήματα	171, 195
32	Διαίρεση	25, 31, 50, 54, 60, 69, 133, 144	69	Κάθετες ευθείες	171, 195
33	Διαιρετέος	25, 31	70	Κατακορυφήν γωνίες	176, 196
34	Διαιρέτης	25, 31	71	Κέντρο συμμετρίας σχήματος	212
35	Διάμετρος κύκλου	188, 196	72	Κλίμακα	91
36	Διάταξη αριθμών	11	73	Κόσκινο του Ερατοσθένη	29
37	Διατεταγμένο ζεύγος	88	74	Κριτήρια διαιρετότητας	28, 31
			75	Κύβος αριθμού	20

Αλφαβητικό ευρετήριο όρων

α/α	Όροι	Σελίδες	α/α	Όροι	Σελίδες
76	Κυκλικός δίσκος	188, 196	111	Προσεταιριστική ιδιότητα	15, 31, 48, 54,
77	Κύκλος	188, 196			123, 130, 144
78	Λόγος ομοειδών μεγεθών	91, 110	112	Πρόσημα	115
79	Λύση	73, 75, 78	113	Πρόσθεση	15, 31, 34, 45, 54,
80	Μεγέθυνση	91			60, 69, 122, 144
81	Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)	27, 31	114	Προσθετέοι	11, 31
82	Μεικτός αριθμός	45	115	Προσκειμένες γωνίες	154
83	Μειωτέος	15, 31	116	Προτεραιότητα των πράξεων	21, 31, 69, 144
84	Μέσο ευθυγράμμου τμήματος	160	117	Πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί	27, 31
85	Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος	206	118	Πρώτος αριθμός	27, 29, 31
86	Μέτρο γωνίας	165	119	Ρητοί αριθμοί	115
87	Μήκος ευθυγράμμου τμήματος	159	120	Ρίζα εξίσωσης	73, 78
88	Μοίρες	165	121	Σημείο	148, 195
89	Μοιρογνωμόνιο	165	122	Σμίκρυνση	91
90	Μονάδες μέτρησης	65, 66, 69, 158, 159	123	Στοιχεία τριγώνου	218
91	Νιοστή δύναμη	20, 31	124	Στρογγυλοποίηση	12, 57
92	Νιοστό	35	125	Συμμετρικά ως προς ευθεία	200
93	Ομόσημοι αριθμοί	115, 144	126	Συμμετρικά ως προς σημείο	210
94	Ομώνυμα κλάσματα	38, 54	127	Συμπληρωματικές γωνίες	176, 196
95	Ορθοκανονικό σύστημα	88	128	Σύνθετο κλάσμα	50, 54
96	Παράγοντες γινομένου	11, 31	129	Σύνθετος αριθμός	27, 29, 31
97	Παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα	180, 195	130	Συντελεστής αναλογίας	96, 110
98	Παράλληλες ευθείες	180, 195	131	Συντεταγμένες	88
99	Παραπληρωματικές γωνίες	176, 196	132	Σχέση αναλογίας	91, 110
100	Παράσταση αριθμητική	21	133	Τεθλασμένη γραμμή	154, 163
101	Παράσταση αριθμών	116	134	Τέλεια διαίρεση	25, 31
102	Παρονομαστής	35	135	Τεμνόμενες ευθείες	180, 195
103	Περίμετρος	163	136	Τέμνουσα κύκλου	193, 196
104	Περιοδικός δεκαδικός αριθμός	135	137	Τεταγμένη	88
105	Περιπτός αριθμός	11, 31	138	Τετμημένη	88
106	Πηλίκιο	25, 31	139	Τετράγωνο αριθμού	20
107	Πολλαπλασιασμός	15, 31, 48, 54, 60, 69, 130, 144	140	Τόξο κύκλου	188, 196
108	Πολλαπλάσιο αριθμού	27, 31	141	Τυποποιημένη μορφή αριθμού	63, 143
109	Ποσοστό	80	142	Υπερβολή	107, 111
110	Πρόβλημα	75, 82, 102	143	Υποδιαστολή	57, 69
			144	Υπόλοιπο διαίρεσης	25, 31
			145	Ύψος	219, 225, 226
			146	Φυσικός αριθμός	11, 31
			147	Χορδή κύκλου	188, 196

Με απόφαση της Ελληνικής Κυβέρνησης τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου και του Λυκείου τυπώνονται από τον Οργανισμό Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν βιβλιόσημο προς απόδειξη της γνησιότητάς τους. Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δε φέρει βιβλιόσημο, θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του Νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946, 108, Α')

ΒΙΒΛΙΟΣΗΜΟ

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.