ΜΕΡΟΣ Α΄

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Φυσικοί αριθμοί

1.1 Φυσικοί Αριθμοί - Διάταξη - Στρογγυλοποίηση
- *Κατανοώ τους φυσικούς αριθμούς*
- *Αντιστοιχίζω τους φυσικούς αριθμούς με σημεία του άξονα*
- *Συγκρίνω φυσικούς αριθμούς*
- *Στρογγυλοποιώ φυσικούς αριθμούς*

1.2. Πρόσθεση - Αφαίρεση και Πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών
- *Προσθέτω, αφαιρώ και πολλαπλασιάζω φυσικούς αριθμούς*
- *Γνωρίζω τις ιδιότητες των πράξεων και τις χρησιμοποιώ στον υπολογισμό της τιμής μιας παράστασης*
- *Εκτελώ τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση με την προβλεπόμενη προτεραιότητα*

1.3. Δυνάμεις φυσικών αριθμών
- *Κατανοώ την έννοια της δύναμης α^ν και διαβάζω δυνάμεις*
- *Υπολογίζω δυνάμεις με μικρό εκθέτη και για τις δυνάμεις του 10 εφαρμόζω τις ισότητες: $10^\nu = 10 \ldots 0$ (ν μηδενικά), $2 \cdot 10^\nu = 20 \ldots 0$ (ν μηδενικά) κ.λπ.*
- *Εφαρμόζω την προτεραιότητα των πράξεων στον υπολογισμό παραστάσεων με δυνάμεις και παρενθέσεις*

1.4. Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα
- *Γνωρίζω την ταυτότητα της ευκλείδιας διαίρεσης*
- *Υπολογίζω το πηλίκο και το υπόλοιπο της ευκλείδιας διαίρεσης δύο ακεραίων και γράφω την ισότητα αυτής*
- *Κατανοώ ότι οι εκφράσεις: "Ο Δ είναι πολλαπλάσιο του δ", "Ο δ είναι διαιρέτης του Δ" και "Ο Δ διαιρείται με τον δ" είναι ισοδύναμες με την έκφραση: "Η ευκλείδεια διαίρεση του Δ με τον δ είναι τέλεια"*

1.5. Χαρακτήρες διαιρετότητας - Μ.Κ.Δ. - Ε.Κ.Π. - Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
- *Γνωρίζω ποιοι αριθμοί λέγονται πρώτοι και ποιοι σύνθετοι*
- *Γνωρίζω και χρησιμοποιώ τα κριτήρια διαιρετότητας με το 2, το 4, το 5 και το 10 καθώς και με το 3 και το 9*
- *Αναλύω δύο ή περισσότερους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και βρίσκω μ' αυτόν τον τρόπο το Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. αυτών*

ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ Ο ΣΑΜΙΟΣ
(580 - 500 π.Χ.)

- Θέλεις να έχεις ή να ξέρεις; ρώτησε ο θείος τον ανηψιό του λίγο πριν τον αποχαιρετήσει στο αεροδρόμιο.
Το αγόρι κοίταξε το θείο του με μεγάλη απορία προσπαθώντας να καταλάβει τι εννοούσε με την ερώτησή του.

- Θέλεις να έχεις πράγματα ή να ξέρεις γι' αυτά;
συμπλήρωσε ο θείος του.
Πριν ακόμα προλάβει το παιδί να απαντήσει, ο θείος του συνέχισε:

- Περάσαμε όμορφα στις διακοπές. Τώρα είναι Σεπτέμβριος, εγώ γυρίζω στη δουλειά μου κι εσύ αρχίζεις το Γυμνάσιο. Θα σε ξαναδώ τον χρόνου το καλοκαίρι και θα είσαι ένα χρόνο και μία τάξη μεγαλύτερος. Έπιασε το αγόρι από τους ώμους και κοιτώντας το στα μάτια πρόσθεσε:

- Δε θέλω να μου απαντήσεις τώρα. Θα σε ξαναρωτήσω τον χρόνου. Έχεις, λοιπόν, καιρό να το ψάξεις, να κάνεις υποθέσεις, να φτιάξεις ιστορίες και πιθανά σενάρια, να σκεφτείς. Κυρίως αυτό: να σκεφτείς, είπε, σφίγγοντάς του τα χέρια.
"Παρακαλούνται οι επιβάτες της πτήσης για Παρίσι να προσέλθουν στον έλεγχο των εισιτηρίων", ακούστηκε η αναγγελία από τα μεγάφωνα.

- Και κοίτα, αν δεν έχεις σίγουρη απάντηση, δεν πειράζει. Η διαδρομή αυτή μπορεί να αξίζει περισσότερο. Το μυαλό μπορεί να φτιάξει μόνο τον έναν ολόκληρο κόσμο. "Καλή πορεία, αγόρι μου"

- Καλό ταξίδι, θείε...

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΑΞΗ

Η τάξη είναι η ίδια ένα ταξίδι. *Είναι μια διαδρομή από σκέψη σε σκέψη, από μία γνώμη σε μια άλλη, από μία έκφραση σε ένα συλλογισμό. Απόψεις που συμφωνούν, γνώμες που είναι διαφορετικές, ιδέες που διαμορφώνονται, συνθέτουν νέες γνώσεις και προσθέτουν εμπειρίες. Η θεωρία αναπτύσσεται μετά από το σχετικό προβληματισμό και το διάλογο που γίνεται μέσα στην τάξη. Είναι η τελική θέση στην οποία καταλήγουμε, αφού δοκιμάσουμε και επαληθεύσουμε τη σκέψη μας. Ακριβώς γι αυτό προηγούνται οι σχετικές δραστηριότητες. Μέσα απ' αυτές θα προβληματιστούμε και θα εκφράσουμε την άποψή μας. Δε σημαίνει ότι σε όλα θα έχουμε απαντήσεις και ότι όλα θα τα μπορέσουμε μόνοι μας. Γι' αυτό είναι και οι άλλοι. Αρκεί να μάθουμε ν' ακούμε τη γνώμη τους. Η σκέψη των άλλων θα πάει τη δική μας ένα βήμα παραπέρα. Σ' αυτό μας συντονίζει και μας βοηθάει ο καθηγητής μας. Όλοι μαζί και ομαδικά θα καταφέρουμε περισσότερα. Ας αρχίσουμε λοιπόν.*

Α.1.1. Φυσικοί αριθμοί - Διάταξη Φυσικών - Στρογγυλοποίηση

Από το Δημοτικό σχολείο μάθαμε την έννοια του φυσικού αριθμού. Στην παράγραφο αυτή γίνεται επανάληψη της έννοιας, της διάταξης και της στρογγυλοποίησης των φυσικών αριθμών. Μέσα από τις δραστηριότητες, που ακολουθούν, θα προσπαθήσουμε να ξαναθυμηθούμε αυτά που έχουμε μάθει και να τα διατυπώσουμε με πιο οργανωμένη σκέψη.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Διάλεξε ένα τριψήφιο αριθμό. Βρες όλους τους διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς που προκύπτουν όταν εναλλάξεις τα ψηφία του αριθμού που διάλεξες και γράψε αυτούς με όλους τους δυνατούς τρόπους.

- *Ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος;*
- *Γράψε όλους τους αριθμούς που βρήκες με σειρά αύξουσα, δηλαδή από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.*
- *Στη συνέχεια, γράψε τους ίδιους αριθμούς με φθίνουσα σειρά.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

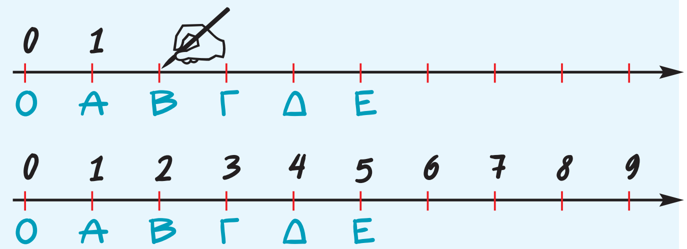
Για να βαθμολογήσουμε ένα θερμόμετρο ακολουθούμε μια συγκεκριμένη μέθοδο: Το αφήνουμε στον πάγο αρκετή ώρα και στο σημείο που θα σταθεί ο υδράργυρος σημειώνουμε το μηδέν (0°). Στη συνέχεια το αφήνουμε μέσα σε νερό που βράζει και στο σημείο που θα σταθεί ο υδράργυρος σημειώνουμε το εκατό (100°).

- *Σκέψου και διατύπωσε ένα τρόπο με τον οποίο θα μπορούσες να σημειώσεις και όλες τις ενδιάμεσες ενδείξεις.*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Οι αριθμοί **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 98, 99, 100, ..., 1999, 2000, 2001, ...** ονομάζονται **φυσικοί αριθμοί.**
  - **Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο και ένα προηγούμενο φυσικό αριθμό, εκτός από το 0 που έχει μόνο επόμενο, το 1.**
- Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τους **άρτιους ή ζυγούς** και τους **περιττούς ή μονούς**.
- **Άρτιοι** λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται με το **2** και **περιττοί** εκείνοι που δεν διαιρούνται με το **2**.
- Το **δεκαδικό σύστημα αρίθμησης** δίνει τη δυνατότητα να σχηματίζουμε το **απεριόριστο** πλήθος των φυσικών αριθμών χρησιμοποιώντας μόνο τα δέκα γνωστά ψηφία: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**.
  - **Η δυνατότητα αυτή υπάρχει γιατί η αξία ενός ψηφίου καθορίζεται και από τη θέση που κατέχει, δηλαδή τη δεκαδική τάξη του** (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες, δεκάδες χιλιάδες, εκατοντάδες χιλιάδες, ...).
- Στο εξής θα χρησιμοποιούμε τα παρακάτω σύμβολα:
  το $=$ που σημαίνει "**ίσος με**",
  το $<$ που σημαίνει "**μικρότερος από**" και
  το $>$ που σημαίνει "**μεγαλύτερος από**".
  - **Μπορούμε πάντα να συγκρίνουμε δύο φυσικούς αριθμούς μεταξύ τους.**
    Επομένως έχουμε τη δυνατότητα **να διατάξουμε** τους φυσικούς αριθμούς **από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο**, δηλαδή με **αύξουσα** σειρά μεγέθους. Για παράδειγμα: $0<1<2<3<$ .... $<10<11<12<$ ... $<297<$ ... $<1000<$ ...

- Η δυνατότητα αυτή, της διάταξης των φυσικών αριθμών, επιτρέπει να τους τοποθετήσουμε πάνω σε μια ευθεία γραμμή με τον παρακάτω τρόπο: Διαλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο **Ο** της ευθείας, που το λέμε **αρχή**, για να παραστήσουμε τον αριθμό **0**. Μετά δεξιά από το σημείο **Ο** διαλέγουμε ένα άλλο σημείο **Α**, που παριστάνει τον αριθμό **1**. Τότε, με μονάδα μέτρησης το **ΟΑ**, βρίσκουμε τα σημεία που παριστάνουν τους αριθμούς: **2, 3, 4, 5, ...**



Στρογγυλοποίηση

? ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Στις 13 Ιουνίου 2004, ακούστηκε στις ειδήσεις ότι από τα 450 *εκατομμύρια πολιτών της Ευρωπαϊκής Ένωσης, ψηφίζουν τα* 338 *εκατομμύρια για να εκλέξουν* 732 *βουλευτές του Ευρωκοινοβουλίου.*

- *Γιατί δεν αναφέρθηκε το ακριβές πλήθος των* 454.018.512 *πολιτών της Ε.Ε., καθώς και ο ακριβής αριθμός των* 337.922.145 *που είχαν δικαίωμα ψήφου;*
- *Γιατί, αντίθετα, στην περίπτωση των* 732 *ευρωβουλευτών, αναφέρθηκε ο ακριβής αριθμός;*
- *Πότε επιτρέπεται να χρησιμοποιούμε αυτή τη διαδικασία προσέγγισης ενός φυσικού αριθμού;*

Σκεφτόμαστε

Η δραστηριότητα αυτή μας οδηγεί να προβληματιστούμε γιατί σε αριθμούς, όπως το ακριβές πλήθος των πολιτών της Ε.Ε., δε χρειάζεται να αναφερθούμε με ακρίβεια, ενώ σε άλλους, όπως ο αριθμός των ευρωβουλευτών, απαιτείται ακρίβεια. Πότε, γενικότερα, η ακριβής διατύπωση ενός αριθμού είναι αναγκαία;

Στην περίπτωση του πλήθους των πολιτών ή των ψηφοφόρων της Ε.Ε., αυτό που κυρίως ενδιαφέρει είναι η "τάξη μεγέθους", π.χ. τα εκατομμύρια. Ενώ για τους ευρωβουλευτές ο ακριβής αριθμός είναι απαραίτητος, π.χ. στις ψηφοφορίες.

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι χρειάζεται μια διαδικασία που μας βοηθάει να εκφράσουμε, με τρόπο κοινά αποδεκτό, ένα φυσικό αριθμό για τον οποίο δεν απαιτείται ακρίβεια. Για παράδειγμα το ύψος ενός βουνού που είναι 1987 m., λέμε, συνήθως, 2000 m. Ενώ ο αριθμός ενός τηλεφώνου, το ΑΦΜ ή ο ταχυδρομικός κωδικός αναφέρονται πάντα με ακρίβεια.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Πολλές φορές αντικαθιστούμε ένα φυσικό αριθμό με μια προσέγγισή του, δηλαδή κάποιο άλλο λίγο μικρότερο ή λίγο μεγαλύτερό του. Τη διαδικασία αυτή την ονομάζουμε **στρογγυλοποίηση**.
- Για να στρογγυλοποιήσουμε ένα φυσικό αριθμό:
  - Προσδιορίζουμε τη τάξη στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση.
  - Εξετάζουμε το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης.
  - Αν αυτό είναι **μικρότερο** του **5** (δηλαδή **0, 1, 2, 3 ή 4**), το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων **μηδενίζονται**.
  - Αν είναι **μεγαλύτερο ή ίσο** του **5** (δηλαδή **5, 6, 7, 8 ή 9**), το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων αντικαθίστανται από το μηδέν και το ψηφίο της τάξης στρογγυλοποίησης **αυξάνεται κατά 1**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός 9.573.842 στις (α) εκατοντάδες, (β) χιλιάδες (γ) εκατομμύρια.

Λύση

(α) *Τάξη στρογγυλοποίησης:* **εκατοντάδες**.
Προηγούμενη τάξη: 4 < 5. Το 4 και όλα τα προς τα δεξιά ψηφία αντικαθίστανται από το μηδέν. 9.573.842 → 9.573.800

(β) *Τάξη στρογγυλοποίησης:* **χιλιάδες**
Προηγούμενη τάξη: 8 > 5. Όλα τα προς τα δεξιά ψηφία αντικαθίστανται από το μηδέν και το 3 γίνεται 4 9.573.842 → 9.574.000

(γ) *Τάξη στρογγυλοποίησης:* **εκατομμύρια**
Προηγούμενη τάξη: 5 = 5. Όλα τα προς τα δεξιά ψηφία αντικαθίστανται από το μηδέν και το 9 γίνεται 10 9.573.842 → 10.000.000

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Γράψε με ψηφία τους αριθμούς που δίνονται παρακάτω σε φυσική γλώσσα:*
(α) διακόσια πέντε, (β) επτακόσια τριάντα δύο (γ) είκοσι χιλιάδες οκτακόσια δέκα τρία.

2. *Γράψε σε φυσική γλώσσα τους αριθμούς: (α)* 38.951, *(β)* 5.000.812, *(γ)* 120.003.

3. *Ποιοι είναι οι τρεις προηγούμενοι αριθμοί του* 289 *και ποιοι οι δύο επόμενοι;*

4. *Τοποθέτησε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:* 3.515, 4.800, 3.620, 3.508, 4.801.

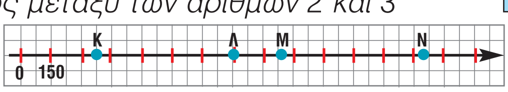
5. *Τοποθέτησε το κατάλληλο σύμβολο: <, =, >, στο κενό μεταξύ των ακόλουθων αριθμών:*
(α) 45...45 *(β)* 38...36, *(γ)* 456...465, *(δ)* 8.765...8.970, *(ε)* 90.876...86.945, *(στ)* 345...5.690

6. *Κατασκεύασε έναν άξονα με αρχή το σημείο* Ο *και μονάδα* ΟΑ *ίσο με* 2 cm. *Τοποθέτησε τα σημεία* Β, Γ, Δ, Ε *σε αποστάσεις* 6 cm, 10 cm, 12 cm *και* 14 cm *αντίστοιχα. Ποιοι αριθμοί αντιστοιχούν στα σημεία αυτά;*

7. *Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση*

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α) Στον αριθμό 5780901 *το μηδέν δηλώνει απουσία δεκάδων και χιλιάδων*	☐	☐
(β) Δέκα χιλιάδες είναι μία δεκάδα χιλιάδων	☐	☐
(γ) Σε μια πενταήμερη εκδρομή θα γίνουν πέντε διανυχτερεύσεις	☐	☐
(δ) Από τον αριθμό 32 *ως και τον αριθμό* 122 *υπάρχουν* 91 *αριθμοί*	☐	☐
(ε) Σε οκτώ ημέρες από σήμερα, που είναι Πέμπτη,θα είναι Παρασκευή	☐	☐
(στ) Από την 12η *σελίδα του βιβλίου μέχρι και την* 35η *είναι* 24 *σελίδες*	☐	☐
(ζ) Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός μεταξύ των αριθμών 2 *και* 3	☐	☐

Οι επόμενες τέσσερις ερωτήσεις αναφέρονται στο σχήμα



	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(η) Στο σημείο Κ *αντιστοιχεί ο αριθμός* 370	☐	☐
(θ) Στο σημείο Λ *αντιστοιχεί ο αριθμός* 1050	☐	☐
(ι) Στο σημείο Μ *αντιστοιχεί ο αριθμός* 1200	☐	☐
(ια) Στο σημείο Ν *αντιστοιχεί ο αριθμός* 1875	☐	☐

8. *Στρογγυλοποίησε στην πλησιέστερη εκατοντάδα τους αριθμούς:* 345, 761, 659, 2.567, 9.532, 123.564, 34.564, 31.549 *και* 8.765.

9. *Στρογγυλοποίησε τον αριθμό* 7.568.349 *στις πλησιέστερες: (α) δεκάδες, (β) εκατοντάδες, (γ) χιλιάδες, (δ) δεκάδες χιλιάδες, (ε) εκατοντάδες χιλιάδες.*

Α.1.2. Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με τις "πράξεις" των φυσικών αριθμών. Το ουσιαστικό "πράξη" προκύπτει από το ρήμα "πράττω" και δηλώνει μια δράση ή ενέργεια. Οι αριθμοί που έχουμε γνωρίσει μέχρι τώρα υλοποιούν ανάγκες μέτρησης. Σύνθετες μετρήσεις προκύπτουν από απλές μετρήσεις με τη διαδικασία των πράξεων, όπως για παράδειγμα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Ο διπλανός πίνακας δίνει τα αθροίσματα, δηλαδή τα αποτελέσματα της πρόσθεσης των μονοψήφιων φυσικών αριθμών.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

- *Τι παρατηρείς για την πρόσθεση με το 0;*
- *Πόσοι αριθμοί μπορούν να προστεθούν κάθε φορά;*
- *Δύο αριθμοί έχουν άθροισμα 12 και διαφορά 2. Μπορείς να βρεις τους αριθμούς αυτούς;*
- *Σύγκρινε τα αθροίσματα 3 + 6 και 6 + 3 και μετά τα αθροίσματα (5+4) + 2 και 5 + (4+2)*
- *Διατύπωσε τα συμπεράσματά σου.*
- *Φτιάξε ένα παρόμοιο πίνακα για τον πολλαπλασιασμό, διατύπωσε τα αντίστοιχα ερωτήματα και προσπάθησε να δώσεις τις κατάλληλες απαντήσεις.*

Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε ότι κάθε φορά μπορούμε να προσθέσουμε δύο μόνο αριθμούς, συνεπώς από τα ζευγάρια των αριθμών που έχουν άθροισμα 12, δηλαδή $9+3$, $8+4$, $7+5$, $6+6$, εκείνο που έχει διαφορά 2 είναι το ζευγάρι των αριθμών 7 και 5.
Επίσης, παρατηρούμε ότι: $0+1=1+0=1$, $0+2=2+0=2$, $0+3=3+0=3$, κ.ο.κ.
Η σύγκριση των αθροισμάτων $3+6=9$ και $6+3=9$, όπως και άλλων τέτοιων αθροισμάτων π.χ. $7+1=8$ και $1+7=8$ κ.λπ., μας οδηγούν στη διατύπωση της αντιμεταθετικής ιδιότητας.
Επίσης, η σύγκριση των αθροισμάτων: $(5+4)+2=11$ και $5+(4+2)=11$, αλλά και άλλων αθροισμάτων, όπως π.χ. $(9+1)+3=13$ και $9+(1+3)=13$ κ.λπ., μας οδηγούν στη διατύπωση της προσεταιριστικής ιδιότητας. Επομένως, μπορούμε να διατυπώσουμε τις ιδιότητες της πρόσθεσης και αντίστοιχα του πολλαπλασιασμού των φυσικών αριθμών.

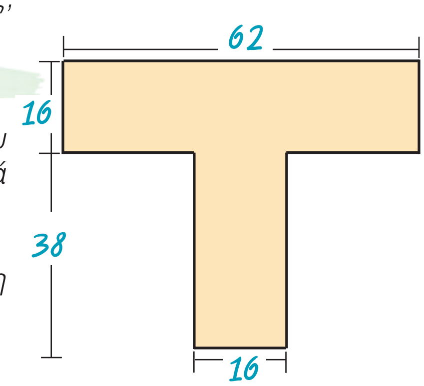
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Σε όλο το μήκος του εθνικού δρόμου Αθήνας - Αλεξανδρούπολης υπάρχουν χιλιομετρικές ενδείξεις. Οι ενδείξεις αυτές γράφουν: στη Λαμία 214, στη Λάρισα 362, στην Κατερίνη 445, στη Θεσσαλονίκη 514, στην Καβάλα 677, στην Ξάνθη 732, στην Κομοτηνή 788 και στην Αλεξανδρούπολη 854.

- *Μπορείς να βρεις τις μεταξύ των πόλεων αποστάσεις;*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Ο Σπύρος υπολόγισε με το μυαλό του το εμβαδόν του διπλανού σχήματος και το βρήκε 1600 τετραγωνικά χιλιοστά.



- *Υπολόγισε και συ το εμβαδόν και δώσε μια εξήγηση για το τι ακριβώς έκανες για να το βρεις.*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Πρόσθεση

$$\underbrace{13 + 5}_{\text{Προσθετέοι}} = \underbrace{18}_{\text{Άθροισμα}}$$

Ιδιότητες της πρόσθεσης:

- Το **άθροισμα ενός φυσικού αριθμού με το μηδέν** ισούται με τον **ίδιο τον αριθμό** $\quad \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$
- **Αντιμεταθετική ιδιότητα** (Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος) $\quad \alpha + \beta = \beta + \alpha$
- **Προσεταιριστική ιδιότητα** $\quad (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

● **Αφαίρεση** είναι η πράξη με την οποία, όταν δίνονται δύο αριθμοί, **Μ (μειωτέος)** και **Α (αφαιρετέος)** βρίσκουμε έναν αριθμό **Δ (διαφορά)**, ο οποίος όταν προστεθεί στο **Α** δίνει το **Μ**.

$$M = A + \Delta$$

και γράφουμε

$$\Delta = M - A$$

◆ **Στους φυσικούς αριθμούς ο αφαιρετέος Α πρέπει να είναι πάντα μικρότερος ή ίσος του μειωτέου Μ.** Σε αντίθετη περίπτωση η πράξη της αφαίρεσης δεν είναι δυνατόν να εκτελεστεί.

Πολλαπλασιασμός

$$\underbrace{7 \cdot 6}_{\text{Παράγοντες}} = \underbrace{42}_{\text{Γινόμενο}}$$

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού:

- **Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού με τη μονάδα** ισούται με τον **ίδιο τον αριθμό** $\quad \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$
- **Αντιμεταθετική ιδιότητα** (Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των παραγόντων ενός γινομένου) $\quad \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
- **Προσεταιριστική ιδιότητα** $\quad (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$
- **Επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού **ως προς την πρόσθεση** $\quad \alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$
- **Επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού **ως προς την αφαίρεση** $\quad \alpha\cdot(\beta-\gamma)=\alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma$
- **Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού επί το μηδέν** ισούται με **το μηδέν** $\quad \alpha\cdot 0 = 0\cdot\alpha = 0$

Η πρώτη εμφάνιση των συμβόλων **+** *και* **–** *χρονολογείται από τα τέλη του 15ου αιώνα, αλλά η γενικευμένη χρήση τους εμφανίζεται τον 19ο αιώνα. Αρχικά για την αφαίρεση χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο «:». Λέγεται ότι η καταγωγή των συμβόλων αυτών οφείλεται στους εμπόρους που τα χρησιμοποιούσαν για να δηλώσουν ότι ένα βάρος βρέθηκε πιο πολύ ή πιο λίγο, αντίστοιχα, από το κανονικό. Τα σύμβολα* **x** *και* **=** *καθιερώθηκαν από Άγγλους μαθηματικούς το 1632 και το 1557 αντίστοιχα.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να υπολογιστούν τα γινόμενα: (α) 35 · 10, (β) 421 · 100, (γ) 5 · 1.000, (δ) 27 · 10.000*

Λύση

(α) 35 · 10 = 350
(β) 421 · 100 = 42.100
(γ) 5 · 1.000 = 5.000
(δ) 27 · 10.000 = 270.000

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι για να πολλαπλασιάσουμε ένα αριθμό επί 10, 100, 1.000, ... γράφουμε στο τέλος του αριθμού τόσα μηδενικά όσα έχει κάθε φορά ο παράγοντας 10, 100, 1.000 ....

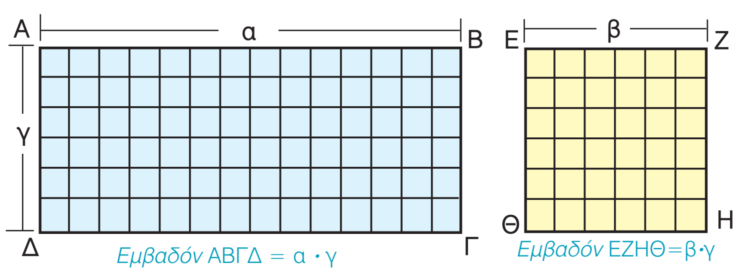
2. *Να εκτελεστούν οι ακόλουθες πράξεις:*
(α) 89 · 7 + 89 · 3, (β) 23 · 49 + 77 · 49, (γ) 76 · 13 – 76 · 3, (δ) 284 · 99

Λύση

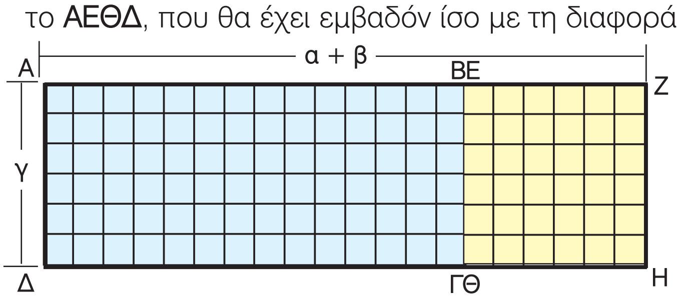
(α) 89 · 7 + 89 · 3 = 89 · (7 + 3) = 89 · 10 = 890
(β) 23 · 49 + 77 · 49 = (23 + 77) · 49 = 100 · 49 = 4.900
(γ) 76 · 13 - 76 · 3 = 76 · (13-3) = 76 · 10 = 760
(δ) 284 · 99 = 284 · (100 - 1) = 284 · 100 - 284 · 1 = 28.400 - 284 = 28.116

3. *Να ερμηνευτούν με γεωμετρικό τρόπο οι επιμεριστικές ιδιότητες:*
(α + β) · γ = α · γ + β · γ και (α – β) · γ = α · γ – β · γ

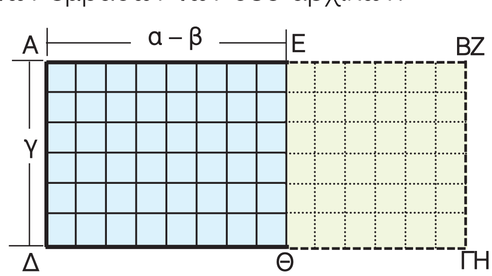
Λύση



Δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα (μπλέ και κίτρινο) έχουν μία διάσταση με το ίδιο μήκος **γ**. Για αυτό το λόγο μπορούμε, αν τα "κολλήσουμε", όπως φαίνεται στο σχήμα, να φτιάξουμε ένα τρίτο, το **ΑΖΗΔ**, με εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών τους. Αν βάλουμε το μικρότερο πάνω στο μεγαλύτερο, όπως φαίνεται στο σχήμα, θα αποκτήσουμε ένα άλλο, το **ΑΕΘΔ**, που θα έχει εμβαδόν ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των δύο αρχικών.



Εμβ. ΑΖΗΔ *= Εμβ.* ΑΒΓΔ *+ Εμβ.* ΕΖΗΘ
Οπότε: (α+β) · γ = α · γ + β · γ



Εμβ. ΑΕΘΔ *= Εμβ.* ΑΒΓΔ *– Εμβ.* ΕΖΗΘ
Οπότε: (α–β) · γ = α · γ – β · γ

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Μερικές φορές ένας απλός συλλογισμός κάποιου ανθρώπου αξίζει πιο πολύ απ' όλο το χρυσάφι του κόσμου. Με κάποιες έξυπνες ιδέες κερδίζονται μάχες, γίνονται μνημειώδη έργα και δοξάζονται άνθρωποι, ενώ παράλληλα αναπτύσσεται η επιστήμη, εξελίσσεται η τεχνολογία, διαμορφώνεται η ιστορία και αλλάζει η ζωή.

Ένα μικρό παράδειγμα είναι η "έξυπνη πρόσθεση" που σκέφτηκε να κάνει ο Γκάους *(Karl Friedrich Gauss, 1777 - 1855), όταν σε ένα χωριό της Γερμανίας γύρω στα 1784, στην πρώτη τάξη του σχολείου, άρχισε να μαθαίνει για τους αριθμούς και τις αριθμητικές πράξεις. Όταν ο δάσκαλος ζήτησε από τους μαθητές του να υπολογίσουν το άθροισμα:*

1+2+3+....+98+99+100, *πριν οι υπόλοιποι αρχίσουν τις πράξεις, ο μικρός Γκάους το είχε ήδη υπολογίσει. Ο δάσκαλος έκπληκτος τον ρώτησε πώς το βρήκε. Τότε εκείνος έγραψε στον πίνακα:*

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (48 + 53) + (49 + 52) + (50 + 51) =$$
$$= \underbrace{101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101}_{50 \text{ φορές}} = 101 \cdot 50 = 5.050$$

Προσπάθησε να υπολογίσεις με τον τρόπο του Γκάους το άθροισμα 1+2+3+...+ 998 + 999 + 1000 *και να μετρήσεις το χρόνο που χρειάστηκες. Πόσο χρόνο θα έκανες άραγε να το υπολογίσεις με κανονική πρόσθεση;*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:*

(α) *Η ιδιότητα* $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ *λέγεται* ....

(β) *Η ιδιότητα* $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ *λέγεται* ....

(γ) *Ο αριθμός που προστίθεται σε αριθμό* α *και δίνει άθροισμα* α *είναι* ....

(δ) *Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης λέγεται* ....

(ε) *Σε μια αφαίρεση οι αριθμοί* Μ, Α *και* Δ *συνδέονται με τη σχέση:* ....

(στ) *Η ιδιότητα* $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ *λέγεται* ....

(ζ) *Η ιδιότητα* $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ *λέγεται* ....

(η) *Η ιδιότητα* $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ *λέγεται* ....

2. *Συμπλήρωσε τα γινόμενα: (α)* $52 \cdot \square = 5.200$, *(β)* $37 \cdot \square = 370$, *(γ)* $490 \cdot \square = 4.900.000$

3. *Συμπλήρωσε τα κενά με τους κατάλληλους αριθμούς, ώστε να προκύψουν σωστά αθροίσματα:*

(α) $\begin{array}{r} \square\,5\,8\,2 \\ +\ 7\,5\,\square\,1 \\ \hline \square\,1\,\square\,7\,3 \end{array}$ *(β)* $\begin{array}{r} 4\,\square\,5 \\ +\ 5\,2\,\square \\ \hline \square\,\square\,1\,0 \end{array}$ *(γ)* $\begin{array}{r} \square\,5\,\square\,5 \\ +\ 5\,2\,\square \\ \hline 4\,\square\,9\,3 \end{array}$

4. *Αντιστοίχισε κάθε γραμμή του πρώτου πίνακα με ένα από τα αποτελέσματα που υπάρχουν στο δεύτερο πίνακα.*

$1 + 2 + 3 + 4$
$1 + 2 + 3 \cdot 4$
$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4$
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$

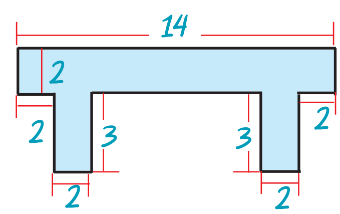
14
24
10
15

5. *Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση*

(α)	157 + 33 =	190 ☐	200 ☐	180 ☐
(β)	122 + 25 + 78 =	200 ☐	250 ☐	225 ☐
(γ)	785 – 323 =	462 ☐	458 ☐	562 ☐
(δ)	7.321 – 4.595 =	2.724 ☐	2.627 ☐	2.726 ☐
(ε)	60 – (18 – 2) =	60+18–2 ☐	(60–18)–2 ☐	60–18+2 ☐
(στ)	52 – 11 – 9 =	52–(11+9) ☐	(52–11)–9 ☐	52–20 ☐
(ζ)	23 · 10 =	230 ☐	240 ☐	2.300 ☐
(η)	97 · 100 =	970 ☐	9.700 ☐	9.800 ☐
(θ)	879 · 1000 =	87900 ☐	879000 ☐	880000 ☐

6. *Υπολόγισε τα παρακάτω γινόμενα, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα:*
(α) 3·13, *(β)* 7·11, *(γ)* 45·12, *(δ)* 12·101, *(ε)* 5·110, *(στ)* 4·111, *(ζ)* 34·99, *(η)* 58·98.

7. *Υπολόγισε το εμβαδόν του σχήματος, χρησιμοποιώντας κατάλληλα την επιμεριστική ιδιότητα.*



8. *Αγοράσαμε διάφορα σχολικά είδη που κόστιζαν:* 156 €, 30 €, 38 €, 369 € *και* 432 €.
(α) Υπολόγισε πρόχειρα αν αρκούν 1.000 € *για να πληρώσουμε τα είδη που αγοράσαμε.*
(β) Βρες πόσα ακριβώς χρήματα θα πληρώσουμε.

9. *Ο Νίκος κατέβηκε για ψώνια με* 160 €. *Σε ένα μαγαζί βρήκε ένα πουκάμισο που κόστιζε* 35 €, *ένα πανταλόνι που κόστιζε* 48 € *και ένα σακάκι που κόστιζε* 77 €. *Του φτάνουν τα χρήματα για να τα αγοράσει όλα;*

10. *Σε ένα αρτοποιείο έφτιαξαν μία μέρα* 120 *κιλά άσπρο ψωμί,* 135 *κιλά χωριάτικο,* 25 *κιλά σικάλεως και* 38 *κιλά πολύσπορο. Πουλήθηκαν* 107 *κιλά άσπρο ψωμί,* 112 *κιλά χωριάτικο,* 19 *κιλά σικάλεως και* 23 *κιλά πολύσπορο. Πόσα κιλά ψωμί έμειναν απούλητα;*

11.

Ο Άρης γεννήθηκε το 1983 *και είναι* 25 *χρόνια μικρότερος από τον πατέρα του.*
(α) Πόσων χρονών είναι ο Άρης σήμερα;
(β) Πότε γεννήθηκε ο πατέρας του;

12. *‘Ενα γκαράζ έχει* 12 *πατώματα. Τα* 7 *πατώματα έχουν* 20 *διπλές θέσεις το καθένα και τα υπόλοιπα από* 12 *διπλές θέσεις. Στο γκαράζ μπήκαν* 80 *μοτοσυκλέτες,* 58 *επιβατικά και* 61 *ημιφορτηγά. Επαρκούν οι θέσεις για όλα αυτά;*

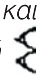
ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Αρχικά ο άνθρωπος έκανε μόνο το διαχωρισμό: **ένα, δύο, πολλά**. *Με την πρόοδο του πολιτισμού, την ανάπτυξη των τεχνών και του εμπορίου διαμορφώνει τις έννοιες των αριθμών. Σ' αυτό βοήθησαν και τα* **φυσικά πρότυπα αρίθμησης**, *όπως π.χ. τα δάκτυλα του ενός χεριού (αρίθμηση βάση το 5) ή των δύο χεριών (βάση το 10). Μετά, τα πρώτα αυτά αριθμητικά συστήματα, συμπληρώνονται με τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.*

Τα αποτελέσματα της αρίθμησης καταγράφονταν με τη βοήθεια χαραγών πάνω σε ξύλα ή κόκαλα ή με κόμπους σε σχοινιά. Το αρχαιότερο εύρημα ανάγεται στους προϊστορικούς χρόνους και είναι το κόκαλο ποδιού ενός μικρού λύκου μήκους 18 εκατοστών που βρέθηκε, το 1937, στην πόλη Βεστόνιτσε της Μοραβίας (εικόνα).

Η ανάγκη υπολογισμού μεγεθών απαιτεί σύγκριση με ένα σταθερό υπόδειγμα, τη **μονάδα μέτρησης**. *Οι πρώτες μονάδες αντιστοιχούν πάλι σε μέλη του σώματος, όπως παλάμες, δάχτυλους, πόδια, οργιά, πήχη. Από τα φυσικά πρότυπα, τις χαραγές, τους κόμπους, τα βότσαλα περάσαμε μέσα σε περίοδο χιλιάδων ετών στα* **σύμβολα που παρίσταναν αριθμούς**. *Τα σύμβολα αυτά ήταν διαφορετικά στους διάφορους αρχαίους πολιτισμούς. Η ενοποίηση του συμβολισμού των αριθμών που υπάρχει σήμερα χρειάστηκε χιλιάδες χρόνια για να γίνει.*

Η **ιστορία του μηδενός** *και ο συμβολισμός του ακολουθεί διαφορετική πορεία. Κι αυτό γιατί η ανάγκη ύπαρξης ξεχωριστού συμβόλου για το* **"τίποτα"** *εμφανίστηκε πολύ αργότερα.*

Οι **Σουμέριοι** *και οι* **Βαβυλώνιοι** *άφηναν ένα* **κενό** *διάστημα για να δηλώσουν την απουσία αριθμητικού ψηφίου σε κάποια θέση. Οι παρανοήσεις και τα λάθη που προέκυπταν τους οδήγησαν στην υιοθέτηση του ειδικού συμβόλου*  *ή*  *ή*  *κατά την Περσική περίοδο.*

Το σύμβολο αυτό το τοποθετούσαν μόνο μεταξύ δύο ψηφίων και όχι στο τέλος ενός αριθμού. Από τον 3ο - 12ο αιώνα μ.Χ. το μηδέν είναι μια κουκίδα. Ο μαθηματικός και αστρονόμος Βραχμαγκούπτα, το 628 μ.Χ. ονομάζει το μηδέν ως "το τίποτα". Τον 9ο αιώνα συναντάμε επιγραφή με σαφή συμβολισμό για το μηδέν.

Οι **Ινδοί** *χρησιμοποιούν το σύμβολο του μηδενός και ως τελευταίο ψηφίο αριθμού. Έτσι είχαν 10 ισότιμα ψηφία τα:* • *ή* **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8** *και* **9**.

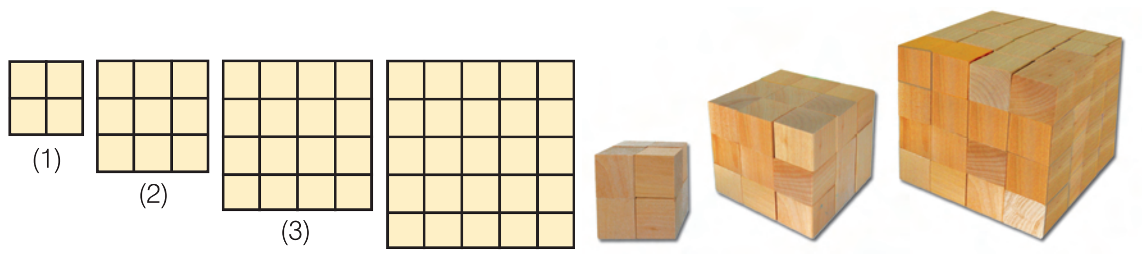
Ο Άραβας μαθηματικός Αλ-Χουαρίζμι (787 - 850 μ.Χ.), στο έργο του "Αλγόριθμοι των Ινδικών αριθμών" γράφει το 820 μ.Χ. για το μηδέν: **"Όταν μια αφαίρεση δεν αφήνει τίποτα, τότε, για να μη μείνει άδεια η θέση πρέπει να μπαίνει ένας μικρός κύκλος, γιατί διαφορετικά οι θέσεις θα λιγοστέψουν και μπορεί π.χ. η δεύτερη να θεωρηθεί ως πρώτη"**.

Ο Έλληνας μαθηματικός **Κλαύδιος Πτολεμαίος** *(100 - 178 μ.Χ.) χρησιμοποιεί το σύμβολο* 0 *για να παραστήσει το μηδέν, στο βιβλίο του "Μεγάλη Μαθηματική Σύνταξη" ή* **"Αλμαγέστη"** *(150 μ.Χ.). Το επινόησε από το αρχικό γράμμα της λέξης* **"ουδέν"** *που σημαίνει* **κανένα** *(ψηφίο).*

Α.1.3. Δυνάμεις φυσικών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Από πόσα τετράγωνα ▢ *αποτελούνται τα τέσσερα πρώτα σχήματα και από πόσους* κύβους ▢ *τα επόμενα τρία;*



(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε ότι έχουμε: (1) $4=2\cdot2=2^2$, (2) $9=3\cdot3=3^2$, (3) $16=4\cdot4=4^2$, (4) $25=5\cdot5=5^2$

Και αντίστοιχα: (5) $8=2\cdot2\cdot2=2^3$, (6) $27=3\cdot3\cdot3=3^3$, (7) $64=4\cdot4\cdot4=4^3$

Οι περιπτώσεις (1) έως και (4) αφορούν τα **τετράγωνα** των φυσικών αριθμών 2, 3, 4 και 5.

Οι περιπτώσεις (5) έως και (7) αφορούν τους **κύβους** των φυσικών αριθμών 2, 3 και 4.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Πολλές φορές συναντάμε γινόμενα των οποίων όλοι οι παράγοντες είναι ίσοι. Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούμε ονομασίες και συμβολικές εκφράσεις όπως φαίνεται παρακάτω.

- Το γινόμενο **α·α·α· ... · α,** που έχει **ν** παράγοντες ίσους με το **α**, λέγεται **δύναμη του α στη ν** ή **νιοστή δύναμη του α** και συμβολίζεται με α^ν.

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

- Ο αριθμός **α** λέγεται **βάση της δύναμης** και ο **ν** λέγεται **εκθέτης.**
- Η **δύναμη** του αριθμού στη **δευτέρα**, δηλαδή το α^2, λέγεται και **τετράγωνο του α.** α^2
- Η **δύναμη** του αριθμού στην **τρίτη**, δηλαδή το α^3, λέγεται και **κύβος του α.** α^3

▶ Το α^1, δηλαδή η **πρώτη δύναμη** ενός αριθμού α είναι **ο ίδιος ο αριθμός α.** $\alpha^1=\alpha$

◆ Οι **δυνάμεις του 1**, δηλαδή το 1^ν, είναι **όλες ίσες με 1**. $1^\nu=1$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Ο Κωστάκης, η Ρένα και ο Δημήτρης έκαναν τις πράξεις στην αριθμητική παράσταση: 4 · (7 + 7 · 9) + 20 και βρήκαν ο καθένας διαφορετικό αποτέλεσμα. Ο Κωστάκης βρήκε 335, η Ρένα 300 και ο Δημήτρης 524.

➢ *Ποιός νομίζεις ότι έχει δίκιο; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Αριθμητική παράσταση** λέγεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.
- Σε μία αριθμητική παράσταση συμφωνούμε η **προτεραιότητα των πράξεων** να είναι η ακόλουθη:
  1. Υπολογισμός **δυνάμεων**.
  2. Εκτέλεση **πολλαπλασιασμών** και **διαιρέσεων**
  3. Εκτέλεση **προσθέσεων** και **αφαιρέσεων**.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, εκτελούμε **πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις** με την παραπάνω σειρά. Το τελικό αποτέλεσμα που βρίσκουμε μετά την εκτέλεση όλων των πράξεων σε μία αριθμητική παράσταση το λέμε **τιμή** της.

Η χρήση των παρενθέσεων ξεκίνησε από τον 17ο αιώνα με στόχο να υποδείξει την προτεραιότητα των πράξεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να υπολογιστούν το τετράγωνο, ο κύβος, η τέταρτη, η πέμπτη και η έκτη δύναμη του αριθμού 10. Τι παρατηρείτε;*

Λύση

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$
$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100 \cdot 10 = 1.000$$
$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000 \cdot 10 = 10.000$$
$$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000 \cdot 10 = 100.000$$
$$10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100.000 \cdot 10 = 1.000.000$$

Παρατηρούμε ότι κάθε μία από τις δυνάμεις του 10, που υπολογίστηκαν, έχει τόσα μηδενικά όσος είναι και ο εκθέτης της δύναμης. Για παράδειγμα: $10^6 = 1.000.000$ *(έξι μηδενικά).*

2. *Να εκτελεστούν οι πράξεις: (α) $(2 \cdot 5)^4 + 4 \cdot (3 + 2)^2$ (β) $(2 + 3)^3 - 8 \cdot 3^2$*

Λύση

(α) $(2 \cdot 5)^4 + 4 \cdot (3+2)^2 = 10^4 + 4 \cdot 5^2 = 10.000 + 4 \cdot 25 = 10.000 + 100 = 10.100$

(β) $(2+3)^3 - 8 \cdot 3^2 = 5^3 - 8 \cdot 9 = 125 - 72 = 53$

3. *Να γραφεί το ανάπτυγμα του αριθμού 7.604 με χρήση των δυνάμεων του 10.*

Λύση

Είναι: $7.604 = 7_{\text{χιλιάδες}} + 6_{\text{εκατοντάδες}} + 0_{\text{δεκάδες}} + 4_{\text{μονάδες}}$
$= 7 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 4 \cdot 1 =$
$= 7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4$

Η μορφή αυτή $7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4$ του αριθμού 7.604 είναι **το ανάπτυγμα του αριθμού σε δυνάμεις του 10**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε στον πίνακα τα τετράγωνα και τους κύβους των αριθμών:

α	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	25
$α^2$														
$α^3$														

2. Γράψε με τη μορφή των δυνάμεων τα γινόμενα: (α) $5{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}5$ (β) $8{\cdot}8{\cdot}8{\cdot}8{\cdot}8{\cdot}8{\cdot}6{\cdot}6{\cdot}6$ (γ) $1{\cdot}1{\cdot}1{\cdot}1{\cdot}1{\cdot}1$ (δ) $α{\cdot}α{\cdot}α{\cdot}α$ (ε) $x{\cdot}x{\cdot}x$ (στ) $2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}α{\cdot}α{\cdot}α$

3. Υπολόγισε τις δυνάμεις: 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}.

4. Βρες τα τετράγωνα των αριθμών: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 και 90.

5. Βρες τους κύβους των αριθμών: 10, 20, 30, 40, 50.

6. Κάνε τις πράξεις: (α) $3{\cdot}5^2$, (β) $3{\cdot}5^2 + 2$, (γ) $3{\cdot}5^2 + 2^2$, (δ) $3{\cdot}5 + 2^2$, (ε) $3{\cdot}(5 + 2)^2$.

7. Κάνε τις πράξεις: (α) $3^2+3^3+2^3+2^4$, (β) $(13–2)^4 + 5{\cdot}3^2$.

8. Βρες τις τιμές των παραστάσεων: (α) $(6+5)^2$και 6^2+5^2, (β) $(3+6)^2$ και 3^2+6^2. Τι παρατηρείς;

9. Γράψε πιο σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα:
(α) $α+α+α$, (β) $α{\cdot}α{\cdot}α$, (γ) $x+x+x+x$ (δ) $x{\cdot}x{\cdot}x{\cdot}x$

10. Γράψε τους αριθμούς: (α) 34.720, (β) 123.654, (γ) 890.650 σε αναπτυγμένη μορφή με χρήση των δυνάμεων του 10.

11. Αντιστοίχισε τα αποτελέσματα που υπάρχουν στο δεύτερο πίνακα με το εξαγόμενο των πράξεων κάθε γραμμής του πρώτου πίνακα.

$(1+2) \cdot (3+4)$	20
$1 \cdot (2+3{\cdot}4)$	21
$(1{\cdot}2+3){\cdot} 4$	9
$1 + (2+3) \cdot 4$	14

12. Αντιστοίχισε τα αποτελέσματα που υπάρχουν στο δεύτερο πίνακα με την αριθμητική παράσταση κάθε γραμμής του πρώτου πίνακα.

$2 + 2{\cdot} 2$	150
$3 + 3{\cdot} 3$	68
$4 + 4{\cdot} 4{\cdot} 4$	16
$5+5{\cdot} 5+5{\cdot} 5$	6
$5 \cdot 5+5 \cdot 5{\cdot} 5$	12
$4 + 4{\cdot} 4 – 4$	55

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. Χρησιμοποίησε μόνο τα σύμβολα των πράξεων: + και • και τις παρενθέσεις “(” και “)” για να συμπληρώσεις τις γραμμές ώστε να προκύψουν σωστές ισότητες.

1	2	3	4 = 13
1	2	3	4 = 14
1	2	3	4 = 15
1	2	3	4 = 36

2. Συμπλήρωσε τα μαγικά τετράγωνα.

20		18
	17	
		14

26		
27	25	23

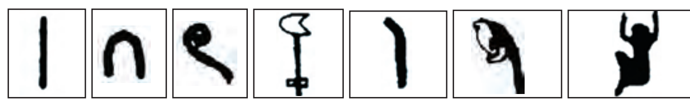
8	1	6
		7

	19	
	15	17
	11	

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Οι πιο παλιοί αριθμοί γράφτηκαν από τους **Σουμέριους** *σε πήλινα πινακίδια της 3ης - 2ης χιλιετηρίδας π.Χ. Οι αριθμοί γράφονταν από τα δεξιά προς τα αριστερά. Πρώτα οι μονάδες, μετά οι δεκάδες κ.λπ. Το 1854 ανακαλύφθηκαν κοντά στις όχθες του Ευφράτη, πήλινα πινακίδια γραμμένα στην περίοδο 2300 - 1600 π.Χ. από τους* **Βαβυλώνιους** *που χρησιμοποιούσαν και το δεκαδικό σύστημα.*

Οι **Αιγύπτιοι** *από το 3000 - 2500 π.Χ. είχαν ειδικά ιερογλυφικά για την παράσταση των αριθμών. Τα ειδικά σύμβολα που είχαν για να παριστάνουν τις μονάδες κάθε δεκαδικής τάξης φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:*



1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000

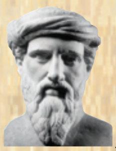
Τον 5ο αιώνα π.Χ. στην **Ιωνία** *δημιουργήθηκε το* **αλφαβητικό** *σύστημα αρίθμησης, που ήταν το τελειότερο σύστημα αρίθμησης μετά το αραβικό και έμεινε σε χρήση μέχρι και την Αναγέννηση, παράλληλα με το ρωμαϊκό. Σ' αυτό κάθε αριθμός από το 1 ως το 9, κάθε δεκάδα 10, 20, 30,..., 90, κάθε εκατοντάδα 100, 200, ..., 900, συμβολίζονταν από ένα γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου με μια οξεία πάνω αριστερά για να τα ξεχωρίζουν από τα γράμματα των λέξεων. Επειδή χρειάζονταν 27 γράμματα για το συμβολισμό όλων αυτών των αριθμών και το αλφάβητο έχει μόνο 24, χρησιμοποίησαν ακόμη τρία σύμβολα το* **στίγμα** ϛ *που παρίστανε τον αριθμό 6, το* **κόππα** ϟ *που παρίστανε τον αριθμό 90 και το* **σαμπί** ϡ *που παρίστανε τον αριθμό 900.*
Έτσι είχαν:
Για μεγαλύτερους αριθμούς είχαν μια μικρή γραμμή κάτω αριστερά, που δήλωνε ότι η αξία του γράμματος πολλαπλασιαζόταν επί 1.000. Δηλαδή: ͵δ=4x1.000=4.000 και ͵η=8 x 1.000 = 8.000. Με το αλφαβητικό αριθμητικό σύστημα γράφουμε: ͵βδ′ για τον αριθμό 2004 *και ω′λ′α′ για τον* 831.
Οι **Ρωμαίοι** *εισήγαγαν ένα δεκαδικό αριθμητικό σύστημα με ξεχωριστά σύμβολα για τους αριθμούς 1, 5, 10, 50, 100, 500 και 1000. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιούσαν τα σύμβολα:*

I	V	X	L	C	D	M	$\overline{L}$	$\lvert\overline{C}\rvert$
1	5	10	50	100	500	1.000	50x1.000=50.000	100x100x1.000=10.000.000

Στη γραφή των αριθμών τους χρησιμοποιούσαν την προσθετική αρχή από τα αριστερά προς τα δεξιά αλλά και την αφαιρετική αρχή. Το 2 *γράφεται* II, *το* 3 *γράφεται* III, *κ.λπ. Το* 4 *γράφεται* IV *(5–1), το* 9 *γράφεται* IX *(10–1), το* 40 *γράφεται* XL *(50–10), το* 900 *γράφεται* CM *(1.000–100), κ.λπ.*

Για πολλούς αιώνες κυριάρχησε το ελληνικό και το ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης. Το 1299 οι Κανονισμοί της "Τέχνης της Συναλλαγής" (Arte del Cambio) απαγόρευαν στους τραπεζίτες της Φλωρεντίας να χρησιμοποιούν τα Ινδοαραβικά αριθμητικά ψηφία και επέβαλαν τα ρωμαϊκά.

Τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε σήμερα του **δεκαδικού συστήματος** *έφτασαν και διαδόθηκαν στην Ευρώπη μέσω των Αράβων, για το λόγο αυτό ονομάστηκαν* **Αραβικά**, *αλλά είναι* **Ινδοαραβικά**, *διότι από τα συστήματα αρίθμησης που υπήρχαν στους Άραβες, το δεκαδικό σύστημα ήρθε απ' τους Ινδούς. Αυτό εμφανίζεται για πρώτη φορά στο έργο του Αλ-Χουαρίζμι (787 - 850 μ.Χ.) "Αλγόριθμοι των Ινδικών αριθμών". Ήρθε στη Μέση Ανατολή με τα καραβάνια από την Περσία και την Αίγυπτο την περίοδο 224 - 641 μ.Χ. Οι τύποι Ινδικών συμβόλων είναι τα λεγόμενα* **"γκομπάρ"** *που χρησιμοποιούσαν οι Άραβες στην Ισπανία που την είχαν καταλάβει από το 711 μ.Χ.*



Οι αριθμοί είχαν αναχθεί από τη σχολή του **Πυθαγόρα** *σε θεμέλιο όλων των επιστημών. Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι όλοι οι νόμοι του σύμπαντος μπορούν να εκφραστούν με την βοήθεια των φυσικών αριθμών και των λόγων τους. Αυτή η τολμηρή υπόθεση εκφράζεται παραστατικά στην περίφημη θέση τους* “τα πάντα είναι αριθμός”. *Οι Πυθαγόρειοι είχαν αναπτύξει ένα ιδιότυπο τρόπο συμβολισμού των αριθμών με τη βοήθεια “ψήφων” διατεταγμένων στη μορφή κανονικών γεωμετρικών σχημάτων. Έτσι σχημάτιζαν ακολουθίες “τρίγωνων αριθμών”, που ήταν διατεταγμένοι σε σχήμα τριγώνων, τετράγωνων αριθμών, που ήταν διατεταγμένοι σε σχήμα τετραγώνων:*

Είδαμε ότι υπάρχουν αριθμητικά συστήματα που χρησιμοποιούν διαφορετικό αριθμό ψηφίων, όπως π.χ. είναι το δυαδικό αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιεί μόνο τα ψηφία 0 και 1. Στο δυαδικό σύστημα αντί για μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες κ.λπ. έχουμε: μονάδες, δυάδες, τετράδες, οκτάδες, δεκαεξάδες κ.λπ. Έτσι στο τριαδικό *σύστημα αρίθμησης αντίστοιχα θα χρησιμοποιούμε μόνο τρία ψηφία: 0, 1, 2, θα έχουμε μονάδες, τριάδες, εννιάδες κ.λπ.*

Δεκαδικό	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
Δυαδικό	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000	...
Τριαδικό	0	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101	102	110	111	112	120	121	...

ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

► *Με βάση την παραπάνω ιστορική αναδρομή κάνε ένα νοερό ταξίδι στο χρόνο προς το παρελθόν και φαντάσου ότι ζεις στη χώρα των Σουμερίων το 3000 π.Χ., των Αιγυπτίων από το 2500 π.Χ., των Ιώνων το 500 π.Χ., των Ρωμαίων το 1200 μ.Χ., των Ισπανών το 1300 μ.Χ., μέχρι την εποχή μας του 21ου αιώνα και γράψε δύο αριθμούς δικής σου επιλογής, όπως τους έγραφαν εκείνοι τότε.*

Α.1.4. Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ο καθηγητής φυσικής αγωγής πρέπει να αποφασίσει με ποιο τρόπο μπορεί να παρατάξει τους 168 μαθητές του σχολείου.

- *Μπορεί να φτιάξει πλήρεις τριάδες, τετράδες, πεντάδες, εξάδες ή επτάδες;*
- *Πόσες από αυτές θα σχηματιστούν σε κάθε περίπτωση;*

Σκεφτόμαστε

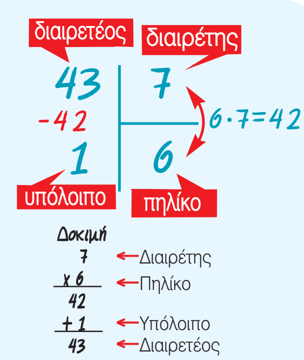
Για να αποφασίσει ο καθηγητής με ποιο τρόπο θα παρατάξει τους 168 μαθητές, πρέπει να διαιρέσει το 168 με τους αριθμούς 3, 4, 5, 6 και 7.

Παρατηρούμε ότι το 168 διαιρείται ακριβώς με το 3 και δίνει πηλίκο 56, οπότε μπορεί να παρατάξει τους 168 μαθητές σε 56 τριάδες.

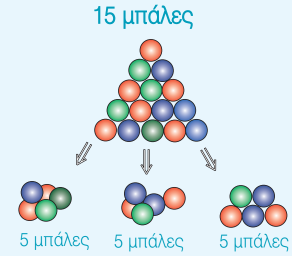
Παρόμοια, η διαίρεση του αριθμού 168 με τους αριθμούς 4, 6, και 7 δίνει τα πηλίκα: 42, 28 και 24 αντίστοιχα. Επομένως, μπορούν να παραταχθούν οι μαθητές σε 42 τετράδες ή 28 εξάδες ή σε 24 επτάδες. Τέλος, η διαίρεση του 168 με το 5 δίνει πηλίκο 33 και αφήνει υπόλοιπο 3. Άρα, δεν μπορεί ο καθηγητής να παρατάξει τους μαθητές σε πλήρεις πεντάδες.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Όταν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί Δ και δ, τότε υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί π και υ, έτσι ώστε να ισχύει: $\boxed{\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon}$
- Ο αριθμός **Δ** λέγεται **διαιρετέος**, ο **δ** λέγεται **διαιρέτης**, ο αριθμός **π** ονομάζεται **πηλίκο** και το **υ** **υπόλοιπο** της διαίρεσης.



- Το υπόλοιπο είναι αριθμός πάντα μικρότερος του διαιρέτη: $\boxed{\upsilon < \delta}$
- Η διαίρεση της παραπάνω μορφής λέγεται **Ευκλείδεια Διαίρεση**.
- Αν το υπόλοιπο υ είναι 0, τότε λέμε ότι έχουμε μία **Τέλεια Διαίρεση**: $\boxed{\Delta = \delta \cdot \pi}$



- Στους φυσικούς αριθμούς η **τέλεια διαίρεση** είναι πράξη **αντίστροφη του πολλαπλασιασμού**, δηλαδή: αν Δ = δ · π τότε Δ : δ = π ή Δ : π = δ.
  - Ο διαιρέτης **δ** μιας διαίρεσης δεν μπορεί να είναι **0**. $\delta \neq 0$
  - Όταν **Δ = δ**, τότε το πηλίκο **π = 1** $\alpha : \alpha = 1$
  - Όταν ο διαιρέτης **δ = 1**, τότε το πηλίκο **π = Δ** $\alpha : 1 = \alpha$
  - Όταν ο διαιρετέος **Δ = 0**, τότε το πηλίκο **π = 0** $0 : \alpha = 0$

Ονομάζουμε **"Ευκλείδεια Διαίρεση"** *τη διαίρεση δύο αριθμών, προς τιμήν του* **Ευκλείδη,** *μεγάλου Έλληνα Μαθηματικού, ο οποίος άκμασε περίπου το 300 π.Χ. Μετά τις σπουδές του στην Αθήνα πήγε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, πόλη που αναδείχθηκε σε μεγάλο πολιτιστικό κέντρο του κόσμου εκείνης της εποχής με τη φροντίδα του Πτολεμαίου του Α'. Το πιο σημαντικό έργο του Ευκλείδη είναι* **"Τα Στοιχεία"** *που αποτελούνται από 13 βιβλία και αποκρυσταλλώνουν την επιτυχημένη προσπάθεια του Ευκλείδη να αξιοποιήσει και να συστηματοποιήσει τις μαθηματικές γνώσεις της εποχής του.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν "Ευκλείδεια διαίρεση";*
(α) $120 = 28 \cdot 4 + 8$ (β) $1.345 = 59 \cdot 21 + 106$ (γ) $374 = 8 \cdot 46 + 6$

Λύση

(α) Έχουμε $v = 8$, που είναι μικρότερος από το 28 και μεγαλύτερος από το 4. Άρα, είναι υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη μόνο το 28 και όχι το 4.

(β) Έχουμε $v = 106$, που είναι μεγαλύτερος από το 59 και από το 21. Άρα δεν είναι υπόλοιπο μιας Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη το 59 ή το 21.

(γ) Έχουμε $v = 6$, που είναι μικρότερος από το 8 και από το 48. Άρα είναι υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη είτε το 46 είτε το 8.

2. *Στη μονάδα μνήμης μιας φωτογραφικής μηχανής μπορούν να αποθηκευτούν 11 φωτογραφίες. (α) Πόσες τέτοιες ίδιες μνήμες χρειάζονται για να αποθηκευτούν 5 φωτογραφίσεις των 36 φωτογραφιών η καθεμιά; (β) Για πόσες φωτογραφίες θα μείνει χώρος στην τελευταία μονάδα;*

Λύση

(α) Οι 5 φωτογραφήσεις των 36 φωτογραφιών η καθεμιά είναι συνολικά $5 \cdot 36 = 180$ φωτογραφίες. Η διαίρεση των 180 φωτογραφιών με τις 11 που μπορούν να αποθηκευτούν σε μια μονάδα, έχει πηλίκο 16 και υπόλοιπο 4, δηλαδή έχουμε $180 = 11 \cdot 16 + 4$. Έτσι, χρειαζόμαστε 16 μονάδες, περισσεύουν όμως 4 φωτογραφίες ακόμη, επομένως, θα πρέπει να πάρουμε επιπλέον μία μονάδα, άρα θα χρειασθούν $16 + 1 = 17$ μονάδες μνήμης.

(β) Αφού στην τελευταία μονάδα μνήμης θα αποθηκευτούν οι 4 φωτογραφίες, που περίσσεψαν, θα μείνει χώρος για $11 - 4 = 7$ φωτογραφίες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Να κάνεις τις ακόλουθες διαιρέσεις και τις δοκιμές τους:*
(α) 4002:69 (β) 1445:17, (γ) 925:37 (δ) 3621:213, (ε) 35280:2940, (στ) 5082:77.

2. *Να υπολογίσεις: (α) Πόσο κοστίζει το 1 μέτρο υφάσματος αν τα 5 μέτρα κοστίζουν 65 €; (β) Πόσο κοστίζει το 1 κιλό κρέας αν για τα 3 κιλά πληρώσαμε 30 €; (γ) Πόσα δοχεία των 52 λίτρων θα χρειαστούν για 46.592 λίτρα κρασιού;*

3. *Να εξετάσεις ποιες από τις παρακάτω ισότητες παριστάνουν Ευκλείδειες διαιρέσεις: (α) $125=35 \cdot 3+20$, (β) $762=38 \cdot 19+40$, (γ) $1500=42 \cdot 35+30$, (δ) $300=18 \cdot 16+12$*

4. *Αν ο ν είναι φυσικός αριθμός, ποια μπορεί να είναι τα υπόλοιπα της διαίρεσης ν:8;*

5. *Αν ένας αριθμός διαιρεθεί δια 9 δίνει πηλίκο 73 και υπόλοιπο 4. Ποιος είναι ο αριθμός;*

6. *Αν σήμερα είναι Τρίτη, τι μέρα θα είναι μετά από 247 ημέρες;*

Α.1.5. Χαρακτήρες διαιρετότητας - ΜΚΔ - ΕΚΠ - Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Το τοπικό γραφείο της UNISEF θα μοιράσει 150 τετράδια, 90 στυλό και 60 γόμες σε πακέτα δώρων, ώστε τα πακέτα να είναι τα ίδια και να περιέχουν και τα τρία είδη.

- *Μπορεί να γίνουν 10 πακέτα δώρων; Αν ναι, πόσα από κάθε είδος θα έχει κάθε πακέτο;*
- *Πόσα όμοια πακέτα δώρων μπορεί να γίνουν με όλα τα διαθέσιμα είδη;*
- *Πόσα το πολύ όμοια πακέτα δώρων μπορεί να γίνουν με όλα τα διαθέσιμα είδη;*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Πολλαπλάσια** ενός φυσικού αριθμού **α** είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του με όλους τους φυσικούς αριθμούς. *0, α, 2α, 3α, 4α, ...*
  - **Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.**
  - **Κάθε φυσικός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του.**
  - **Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.**
- Το μικρότερο ($\neq 0$) από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών ($\neq 0$) το ονομάζουμε **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** των αριθμών αυτών.
- **Διαιρέτες** ενός φυσικού αριθμού **α** λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.
  - **Κάθε αριθμός α έχει διαιρέτες του αριθμούς 1 και α.**
- Ένας αριθμός, εκτός από το 1, που έχει διαιρέτες μόνο τον **εαυτό του** και το **1** λέγεται **πρώτος αριθμός,** διαφορετικά λέγεται **σύνθετος**.
- Δύο φυσικοί αριθμοί **α** και **β** μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** (ΜΚΔ) των **α** και **β** και συμβολίζεται **ΜΚΔ(α, β)**.
- Δύο αριθμοί **α** και **β** λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** αν είναι **ΜΚΔ(α, β) = 1.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Δύο πλοία επισκέπτονται ένα νησάκι. Το πρώτο ανά 3 ημέρες, το δεύτερο ανά 4 ημέρες. Αν ξεκίνησαν από το νησάκι ταυτόχρονα, σε πόσες ημέρες θα ξαναβρεθούν στο λιμάνι του νησιού;*

Λύση

Βρίσκουμε τα πολλαπλάσια των αριθμών 3 και 4.

Πολλαπλάσια του 3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	...
Πολλαπλάσια του 4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	...

Οι αριθμοί **0, 12, 24, 36,** ... είναι κοινά πολλαπλάσια των αριθμών **3** και **4**. Επειδή, το μικρότερο ($\neq 0$) από τα κοινά πολλαπλάσια είναι το **12,** γράφουμε: *ΕΚΠ(3, 4) = 12.*

Δηλαδή, ακριβώς μετά από 12 ημέρες θα ξαναβρεθούν τα δύο πλοία στο λιμάνι του νησιού και αυτό θα επαναλαμβάνεται κάθε 12 ημέρες.

Κριτήρια Διαιρετότητας

- **Κριτήρια Διαιρετότητας** με **2, 3, 4, 5, 9, 10 ή 25** λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να συμπεραίνουμε, χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τους αριθμούς αυτούς.

  - Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με **10** αν λήγει σε **ένα μηδενικό.**
  - Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **2**, αν το τελευταίο ψηφίο είναι 0, 2, 4, 6, 8.
  - Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **5**, αν λήγει σε **0** ή **5**.
  - Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **3** ή το **9**, αν το **άθροισμα των ψηφίων του** διαιρείται με το **3** ή το **9** αντίστοιχα.
  - Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται συγχρόνως με το **4** ή και το **25**, αν τα **δύο τελευταία ψηφία** του είναι μηδέν.

2. *Να αναλυθούν οι αριθμοί 2520, 2940, 3780 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Με τη βοήθεια αυτής της ανάλυσης να βρεθεί ο ΜΚΔ και το ΕΚΠ αυτών των αριθμών.*

Λύση

Αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενα πρώτων παραγόντων και παίρνουμε μόνο τους κοινούς παράγοντες με το μικρότερο εκθέτη για το ΜΚΔ και τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες με το μεγαλύτερο εκθέτη για το ΕΚΠ.

2520	2	διαιρώ με το 2
1260	2	»
630	2	»
315	3	διαιρώ με το 3
105	3	»
35	5	διαιρώ με το 5
7	7	διαιρώ με το 7
1		

2940	2	διαιρώ με το 2
1470	2	»
735	3	διαιρώ με το 3
245	5	διαιρώ με το 5
49	7	διαιρώ με το 7
7	7	»
1		

3780	2	διαιρώ με το 2
1890	2	»
945	3	διαιρώ με το 3
315	3	»
105	3	»
35	5	διαιρώ με το 5
7	7	διαιρώ με το 7
1		

$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ $\quad 2940 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$ $\quad 3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

ΜΚΔ(2520, 2940, 3780) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$ και

ΕΚΠ(2520, 2940, 3780) = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 52920$

3. *Να βρεθεί αν διαιρούνται οι αριθμοί 12510, 772, 225, 13600 με 2, 3, 4, 5, 9. 10. 25. 100.*

Λύση

	2	3	4	5	9	10	25	100
12510	✔	✔	–	✔	✔	✔	–	–
772	✔	–	✔	–	–	–	–	–
225	–	✔	–	✔	✔	–	✔	–
13600	✔	–	✔	✔	–	✔	✔	✔

4. *Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι αριθμοί μεταξύ του 1 και του 100.*

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Λύση

Οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν ότι **δεν υπάρχει μέγιστος πρώτος αριθμός**, δηλαδή ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι στο πλήθος. Γνώριζαν ακόμη ότι δεν υπάρχει ένας απλός κανόνας που να δίνει τους διαδοχικούς πρώτους αριθμούς. Με την απλή μέθοδο του Ερατοσθένη, γνωστή ως **"Κόσκινο του Ερατοσθένη"**, που χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα, βρίσκουμε όλους τους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι από δοσμένο αριθμό.

Στον διπλανό πίνακα διαγράφουμε τον αριθμό 1 που δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος.

Μετά σημαδεύουμε το 2 και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του. Το ίδιο κάνουμε και με τους αριθμούς 3, 5 και 7. Μ' αυτόν τον τρόπο διαγράφονται όλοι οι σύνθετοι αριθμοί και μένουν μόνο οι πρώτοι, από το 1 έως το 100:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 και 97.

Ο **Ερατοσθένης** *(γεννήθηκε στην Κυρήνεια και πέθανε στην Αλεξάνδρεια) διακρίθηκε ως Μαθηματικός, Φυσικός, Γεωγράφος, Αστρονόμος, Ιστορικός και Φιλόλογος. Από το 234 π.Χ. και επί περίπου 40 χρόνια, διετέλεσε υπεύθυνος της περίφημης βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και δίδαξε στο Μουσείο της. Στα περίφημα* **"Γεωγραφικά"** *που παρουσίασε την πρώτη ακριβή μαθηματική μέτρηση της* **περιμέτρου (μεσημβρινού) της Γης,** *ως* **250.000 στάδια** *(=39.400 - 41.000 km, έναντι της πραγματικής 40.000 km) (Κλεομήδης, Στράβων). Επίσης, υπολόγισε την απόσταση της σελήνης* **780.000 στάδια** *και του Ήλιου* **804.000.000 στάδια.**

Μέτρησε την κλίση του άξονα της γης με μεγάλη ακρίβεια και έφτιαξε ένα κατάλογο που περιελάμβανε **675** *αστέρες. Λάτρης της ταξινόμησης της ανθρώπινης γνώσης, ο Ερατοσθένης δεν μπόρεσε να αντέξει τη στέρηση της μελέτης, που του επέβαλε η τύφλωση που τον έπλειξε στα γεράματα και τελικά τερμάτισε τη ζωή του, αφού αρνιόταν να φάει οτιδήποτε.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Ένα κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 8 είναι ο αριθμός .... και το ΕΚΠ(5, 8) = ...

(β) Αν το ΕΚΠ(α, β) = β, ο β είναι .... του α.

(γ) Πρώτοι λέγονται οι αριθμοί που ....
και σύνθετοι λέγονται οι αριθμοί που ....

(δ) Δύο αριθμοί ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους όταν..

2. Συμπλήρωσε το κενό με το κατάλληλο ψηφίο ώστε, ο αριθμός που θα σχηματιστεί να διαιρείται με το 9: (α) 6□4, (β) 95□4, (γ) 601□.

3. Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση

(α)	ΕΚΠ (3, 5) =	8 □	9 □	15 □	30 □
(β)	ΕΚΠ (11, 6) =	17 □	36 □	66 □	132 □
(γ)	ΕΚΠ (5, 10) =	10 □	15 □	45 □	50 □
(δ)	ΕΚΠ (3, 2, 5) =	15 □	20 □	30 □	60 □
(ε)	ΕΚΠ (3, 6, 9) =	9 □	18 □	36 □	27 □
(στ)	ΕΚΠ (8, 12, 15) =	15 □	30 □	60 □	120 □

4. Η εταιρεία Α βγάζει νέο μοντέλο αυτοκινήτου κάθε 2 χρόνια ενώ η εταιρεία Β κάθε 3 χρόνια και η εταιρεία Γ κάθε 5 χρόνια. Αν το 2001 έβγαλαν και οι τρεις εταιρείες νέα μοντέλα, πότε θα ξαναβγάλουν και οι τρεις μαζί νέο μοντέλο;

5. Ένας γυμναστής παρατήρησε ότι όταν τοποθετεί τους μαθητές της α' γυμνασίου ανά 3, ανά 5 και ανά 7 δεν περισσεύει κανένας. Πόσοι ήταν οι μαθητές της α' γυμνασίου στο σχολείο αυτό, αν γνωρίζουμε ότι το πλήθος τους είναι μεταξύ 100 και 200;

6. Ο Γιάννης πηγαίνει στον κινηματογράφο κάθε 10 ημέρες και ο Νίκος κάθε 12 ημέρες. Αν συναντήθηκαν στις 10 Μαρτίου στον κινηματογράφο, πότε θα ξανασυναντηθούν; Στο διάστημα μεταξύ των δύο συναντήσεών τους πόσες φορές έχει πάει ο καθένας τους χωριστά στον κινηματογράφο;

7. Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση

(α)	ΜΚΔ (5, 8) =	1 □	5 □	8 □	40 □
(β)	ΜΚΔ (16, 24) =	4 □	8 □	16 □	24 □
(γ)	ΜΚΔ (30, 15) =	3 □	5 □	15 □	30 □
(δ)	ΜΚΔ (10, 30, 60) =	5 □	10 □	30 □	60 □
(ε)	ΜΚΔ (22, 32, 50) =	2 □	11 □	72 □	82 □

8. Δύο αριθμοί έχουν ΜΚΔ το 24. Να δικαιολογήσεις γιατί έχουν και άλλους κοινούς διαιρέτες διαφορετικούς από τη μονάδα.

9. Βρες τους διαιρέτες των αριθμών: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Ποιοι από τους αριθμούς αυτούς είναι πρώτοι; Ποιοι είναι σύνθετοι;

10. Το διπλάσιο ενός πρώτου αριθμού είναι πρώτος αριθμός ή σύνθετος και γιατί;

11. Να βρεις όλους τους διαιρέτες των παρακάτω αριθμών: (α) 28, (β) 82, (γ) 95, (δ) 105, (ε) 124, (στ) 345, (ζ) 1.232, (η) 3.999.

12. Να αναλυθούν οι ακόλουθοι αριθμοί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:
(α) 78, (β) 348, (γ) 1.210, (δ) 2.344.

Ανακεφαλαίωση

ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ: 0, 1, 2, 3, 4,...

Άρτιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί που διαιρούνται με το 2
Περιττοί αριθμοί είναι οι φυσικοί που δεν διαιρούνται με το 2

Πράξεις μεταξύ φυσικών αριθμών

Πρόσθεση: $\alpha + \beta = \gamma$

α και **β** λέγονται **προσθετέοι** και το **γ** λέγεται **άθροισμα** των α και β.

Ιδιότητες της πρόσθεσης:
- $\alpha+\beta = \beta+\alpha$ *(Αντιμεταθετική)*
- $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$ *(Προσεταιριστική)*
- $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$ *(το 0 δεν τον μεταβάλλει)*

Πολλαπλασιασμός: $\alpha \cdot \beta = \gamma$

α και **β** λέγονται **παράγοντες** και το **γ** λέγεται **γινόμενο** των α και β.

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού:
- $\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$ *(Αντιμεταθετική)*
- $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$ *(Προσεταιριστική)*
- $\alpha\cdot1=1\cdot\alpha=\alpha$ *(το 1 δεν τον μεταβάλλει)*

Αφαίρεση: $\alpha - \beta = \gamma, \quad \alpha>\beta$

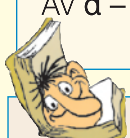
Το **α** λέγεται **μειωτέος**, το **β** λέγεται **αφαιρετέος** και το **γ** λέγεται **διαφορά**.

Αν $\alpha-\beta=\gamma$ τότε $\alpha=\beta+\gamma$ ή $\alpha-\gamma=\beta$
- $\alpha-0=\alpha$

Τέλεια Διαίρεση $\alpha : \beta = \gamma, \quad \beta \neq 0$

Το **α** λέγεται **διαιρετέος**, το **β** λέγεται **διαιρέτης** και το **γ** λέγεται **πηλίκο**.

Αν $\alpha:\beta=\gamma$ τότε $\alpha=\beta\cdot\gamma$ ή $\alpha:\gamma=\beta$
- $\alpha:1=\alpha$ και $\alpha:\alpha=1$ και $0:\alpha=0$



ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση: $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$
Του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση: $\alpha\cdot(\beta-\gamma)=\alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma$

Δύναμη: $\alpha^\nu = \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha$ **(ν παράγοντες)** Το α λέγεται βάση και το ν εκθέτης

Ευκλείδεια Διαίρεση: $\Delta= \delta\cdot\pi + \upsilon, \quad \upsilon < \delta$
Το Δ λέγεται διαιρετέος, το δ διαιρέτης, το π πηλίκο και το υ υπόλοιπο

Προτεραιότητα Πράξεων

❶ Δυνάμεις ➜ ❷ Πολλαπλασιασμοί και Διαιρέσεις ➜ ❸ Προσθέσεις και Αφαιρέσεις
Οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις προηγούνται και γίνονται με την παραπάνω σειρά

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Το **μικρότερο** ($\neq 0$) **από τα κοινά πολλαπλάσια** που έχουν δύο αριθμοί ($\neq 0$) λέγεται **ΕΚΠ** αυτών.
- Ο **μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες** που έχουν δύο αριθμοί λέγεται **ΜΚΔ** αυτών.
- Ένας αριθμός **α** που έχει **διαιρέτες** μόνο τον **α** και το **1** λέγεται **πρώτος αριθμός**, αλλιώς λέγεται **σύνθετος**.
- Δύο αριθμοί **α** και **β** λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** όταν **ΜΚΔ(α, β)** = 1

Κριτήρια Διαιρετότητας: *Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται:*

- με το **10, 100, 1000**, ... αν λήγει σε **1, 2, 3,... μηδενικά**
- με το **2**, αν το τελευταίο ψηφίο του είναι **0, 2, 4, 6, 8**.
- με το **5**, αν λήγει σε **0** ή **5**
- με το **3** ή το **9**, αν το **άθροισμα των ψηφίων** του διαιρείται με το **3** ή το **9**
- με το **4** ή **25**, αν τα **δύο τελευταία ψηφία** του είναι αριθμός που διαιρείται με το **4** ή **25**.

Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους

Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση

		ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
1.	*Ισχύει ότι:* $(100 - 30) - 10 = 100 - (30 - 10)$		
2.	*Για να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με το 11 τον πολλαπλασιάζουμε με το 10 και προσθέτουμε 1.*		
3.	*Το γινόμενο* $3 \cdot 3 \cdot 3$ *γράφεται* 3^3.		
4.	*Το* 2^5 *ισούται με 10.*		
5.	$\alpha + \alpha + \alpha + \alpha = 4 \cdot \alpha$.		
6.	$\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^5$.		
7.	$2^3 + 3 = 11$.		
8.	$3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2 = 322$.		
9.	$20 - 12 : 4 = 2$.		
10.	$9 \cdot 3 - 2 + 5 = 30$.		
11.	$(3 \cdot 1 - 3) : 3 = 0$.		
12.	*Στη σειρά των πράξεων:* $7 + (6 \cdot 5) + 4$*, οι παρενθέσεις δεν χρειάζονται.*		
13.	*Η διαφορά δύο περιττών αριθμών είναι πάντα περιττός αριθμός.*		
14.	*Αν ο αριθμός α είναι πολλαπλάσιο του αριθμού β, τότε ο α διαιρείται με το β.*		
15.	*Το 38 είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3.*		
16.	*Ο αριθμός 450 διαιρείται με το 3 και το 9.*		
17.	*Ο 35 και ο 210 έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον αριθμό 5.*		
18.	*Το ΕΚΠ των 2 και 24 είναι ο αριθμός 48.*		
19.	*Η διαίρεση 420 : 15 δίνει υπόλοιπο 18.*		
20.	*Η σχέση* $177 = 5 \cdot 35 + 2$ *είναι μια ευκλείδια διαίρεση.*		
21.	*Ο αριθμός* $3 \cdot \alpha + 9$ *διαιρείται με το 3.*		
22.	*Ο αριθμός 300 αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως* $3 \cdot 10^2$.		
23.	*Ο αριθμός 224 διαιρείται με το 4 και το 8.*