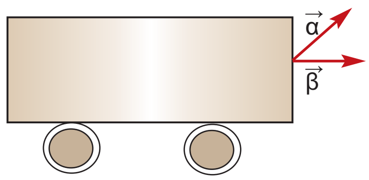
3 Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του παρακάτω σχήματος έχουν ίσα μέτρα. Να εξετάσετε αν τα διανύσματα αυτά είναι ίσα.

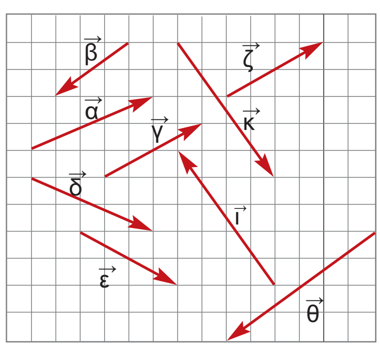


4 Ποια από τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος:

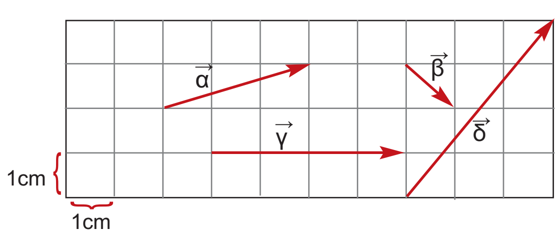
α) έχουν ίσα μέτρα;

β) είναι ίσα;

γ) είναι αντίθετα;



5 Να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ του σχήματος.



6 Σ' ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ να σχεδιάσετε με αρχή το σημείο Γ, ένα διάνυσμα $\overrightarrow{ΓΔ}$ αντίθετο του $\overrightarrow{ΑΒ}$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε με αρχή το σημείο Δ, το διάνυσμα $\overrightarrow{ΔΑ}$.

Να αποδείξετε ότι το $\overrightarrow{ΔΑ}$ είναι αντίθετο του $\overrightarrow{ΒΓ}$.

7 Στη δοκό ΑΓ έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{B}$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, $\vec{F}_5$.

Να βρείτε ποιες από αυτές:

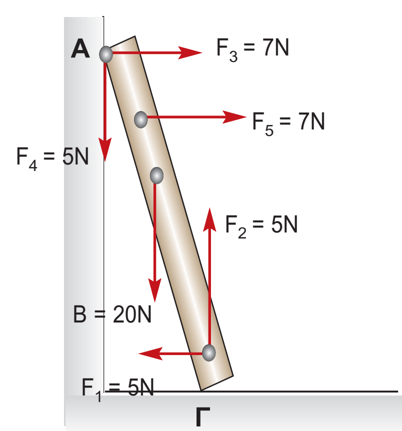
α) έχουν ίδια διεύθυνση

β) έχουν αντίθετη φορά

γ) είναι αντίθετες

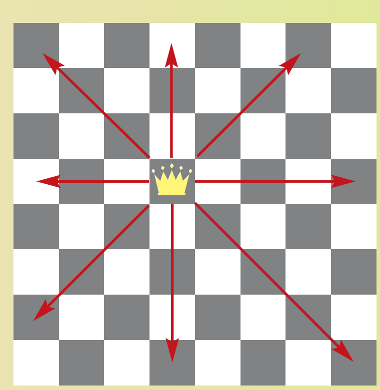
δ) είναι ίσες

ε) έχουν ίσα μέτρα

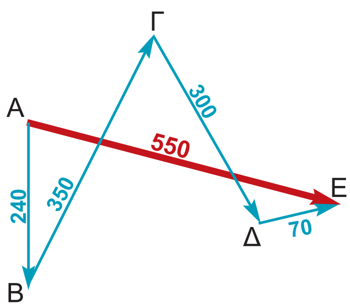


ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

Στο σκάκι, η βασίλισσα μπορεί να κινηθεί οριζόντια, κάθετα και διαγώνια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μπορείτε να τοποθετήσετε άλλες 4 βασίλισσες, έτσι ώστε, μαζί μ' αυτήν που έχει ήδη τοποθετηθεί, να καλύπτουν και τα 64 τετράγωνα του σκακιού;



2.6. Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων



Άθροισμα διανυσμάτων

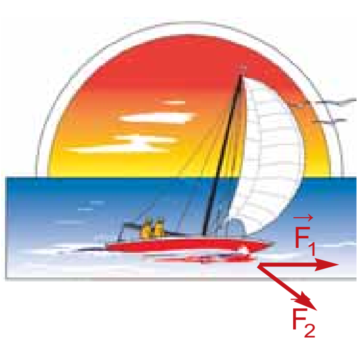
Στη δραστηριότητα 2 της προηγούμενης παραγράφου είδαμε ότι η τελική μετατόπιση ήταν το διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΕ}$. Οι διαδοχικές μετατοπίσεις ήταν τα διανύσματα: $\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$, $\overrightarrow{ΓΔ}$ και $\overrightarrow{ΔΕ}$, τα οποία λέγονται διαδοχικά διανύσματα, γιατί το τέλος του καθενός είναι η αρχή του επομένου. Είναι φανερό ότι το άθροισμα των διαδοχικών μετατοπίσεων ισούται με την τελική μετατόπιση, δηλαδή: $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΓ} + \overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΔΕ} = \overrightarrow{ΑΕ}$.

Με τον τρόπο αυτό ορίζεται το άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων. Τι γίνεται, όμως, όταν τα διανύσματα δεν είναι διαδοχικά; Ας δούμε ένα διαφορετικό παράδειγμα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

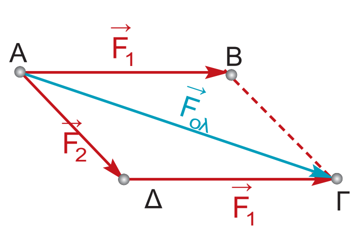
Ο Σέργιος είναι καπετάνιος ενός ιστιοπλοϊκού, που έχει αναμμένη τη μηχανή του και κρατάει σταθερή πορεία. Χωρίς να ελέγξει την κατεύθυνση του ανέμου που φυσάει, σηκώνει το ένα πανί. Το ιστιοπλοϊκό αρχίζει να αλλάζει πορεία, καθώς ο άνεμος φυσά προς άλλη κατεύθυνση, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Αν $\vec{F_1}$ είναι η δύναμη που ασκεί στο σκάφος η μηχανή και $\vec{F_2}$ η δύναμη που ασκεί στο σκάφος ο άνεμος, προς ποια κατεύθυνση θα κινηθεί το ιστιοπλοϊκό;



Λύση

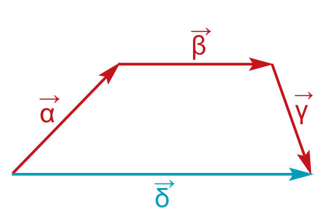
Έχουμε λοιπόν δύο δυνάμεις $\vec{F_1}$ (μηχανή) και $\vec{F_2}$ (άνεμος) που ασκούνται στο ιστιοπλοϊκό ταυτόχρονα και θέλουμε να βρούμε τη συνισταμένη δύναμη, όπως λέμε στη Φυσική, δηλαδή το άθροισμα των δύο διανυσμάτων $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$.



Μεταφέρουμε παράλληλα το διάνυσμα $\vec{F_1}$, έτσι ώστε να γίνει διαδοχικό με το $\vec{F_2}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε:
$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΔ} = \overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΔΓ} = \overrightarrow{ΑΓ} = \vec{F_{ολ}}$.
Οι δυνάμεις $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ λέγονται **συνιστώσες** της $\vec{F_{ολ}}$.

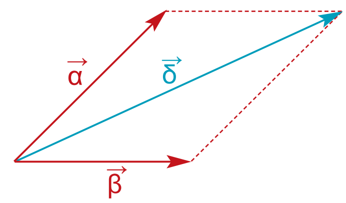
Ένας άλλος τρόπος για να βρούμε το $\vec{F_{ολ}}$ είναι να δούμε ότι αποτελεί τη διαγώνιο $\overrightarrow{ΑΓ}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Επομένως, έχουμε δύο μεθόδους, για να βρίσκουμε το άθροισμα διανυσμάτων.



Α. Η μέθοδος του πολυγώνου

Μεταφέρουμε παράλληλα τα διανύσματα που θέλουμε να προσθέσουμε, ώστε να γίνουν όλα διαδοχικά.
Το άθροισμα των $\vec{α}$, $\vec{β}$, $\vec{γ}$, θα είναι το διάνυσμα $\vec{δ}$, που θα έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου.



Β. Η μέθοδος του παραλληλογράμμου

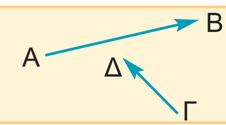
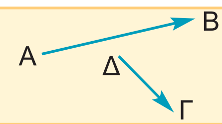
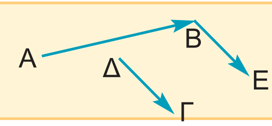
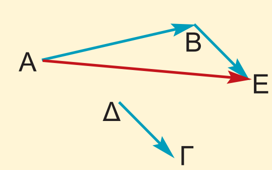
Μεταφέρουμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή και σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο που έχει πλευρές τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Η διαγώνιος $\vec{\delta}$ του παραλληλογράμμου που έχει ως αρχή την κοινή τους αρχή είναι το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

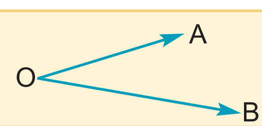
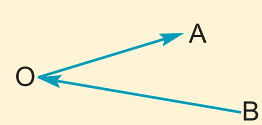
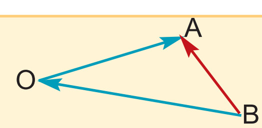
Διαφορά διανυσμάτων

Η διαφορά δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και ορίζεται ως άθροισμα του $\overrightarrow{AB}$ με το αντίθετο διάνυσμα του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, δηλαδή με το $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$:

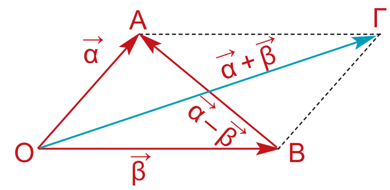
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{\Gamma\Delta}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}.$$

Για να αφαιρέσουμε δύο διανύσματα,	$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$	
προσθέτουμε στο $\overrightarrow{AB}$ το αντίθετο του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, δηλαδή το $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$	
Για να γίνει αυτό, σχεδιάζουμε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{BE}$ ίσο με το $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$	
Το διάνυσμα $\overrightarrow{AE}$ είναι η διαφορά του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ από το $\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{\Gamma\Delta})$ $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ $= \overrightarrow{AE}$	

Διαφορά δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή

Για να αφαιρέσουμε δύο διανύσματα με κοινή αρχή,	$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$	
προσθέτουμε στο $\overrightarrow{OA}$ το αντίθετο του $\overrightarrow{OB}$, δηλαδή το $\overrightarrow{BO}$. Τα διανύσματα $\overrightarrow{BO}$ και $\overrightarrow{OA}$ είναι διαδοχικά.	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} =$ $= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$	
Το διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$ είναι η διαφορά του $\overrightarrow{OB}$ από το $\overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$ $= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$ $= \overrightarrow{BA}$	

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η διαφορά $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ με κοινή αρχή Ο, είναι ένα διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$, με αρχή το πέρας του δευτέρου και πέρας το πέρας του πρώτου. Επομένως για τις διαγωνίους $\overrightarrow{O\Gamma}$ και $\overrightarrow{BA}$ του διπλανού παραλληλογράμμου ισχύει: $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{BA} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.



Το μηδενικό διάνυσμα

Το άθροισμα δύο αντίθετων διανυσμάτων είναι ένα διάνυσμα του οποίου η αρχή και το τέλος (πέρας) ταυτίζονται. Το διάνυσμα αυτό λέγεται μηδενικό διάνυσμα και συμβολίζεται με $\vec{0}$. Επομένως, το μηδενικό διάνυσμα είναι ένα σημείο, οπότε δεν έχει ούτε διεύθυνση ούτε φορά. Το μέτρο του είναι ίσο με 0. Δηλαδή: $|\vec{0}| = 0$.

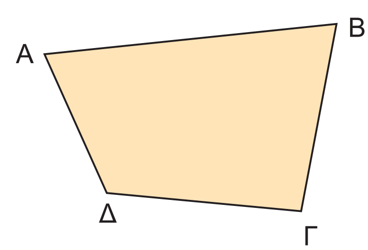
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Λύση: Έχουμε: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$.

Επίσης: $\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$.

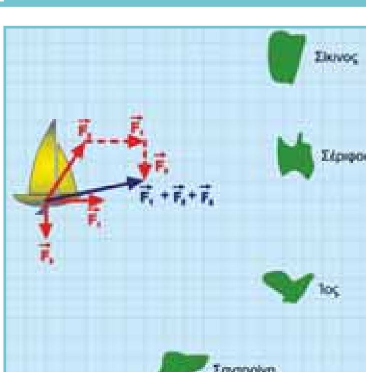
Επομένως: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Τρεις δυνάμεις ασκούνται στο ιστοπλοϊκό του παρακάτω σχήματος: η $\vec{F}_1$ από τη μηχανή του, η $\vec{F}_2$ από τα πανιά του (αέρας) και το ρεύμα της θάλασσας $\vec{F}_3$.
Σε ποιο νησί κατευθύνεται το ιστιοπλοϊκό;

Λύση: Το ιστιοπλοϊκό κινείται κατά τη διεύθυνση της συνισταμένης των τριών αυτών δυνάμεων, δηλαδή του αθροίσματος $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.
Αν σχηματίσουμε το άθροισμα αυτών των δυνάμεων, η συνισταμένη τους δείχνει ότι το ιστιοπλοϊκό κατευθύνεται προς τη Σέριφο.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να προσδιορίσετε το σημείο Μ για το οποίο ισχύει:
$\overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΒΜ} + \overrightarrow{ΔΒ} + \overrightarrow{ΓΔ} = \vec{0}$.

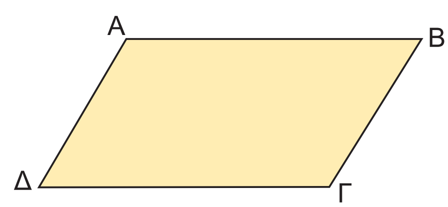
Λύση: Έχουμε:

$\overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΒΜ} + \overrightarrow{ΔΒ} + \overrightarrow{ΓΔ} = \vec{0}$ ή

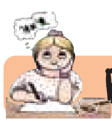
$\overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΔΒ} + \overrightarrow{ΒΜ} = \vec{0}$ ή

$\overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΔΜ} = \vec{0}$ ή

$\overrightarrow{ΑΜ} = \vec{0}$



Το διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΜ}$ ισούται με το μηδενικό διάνυσμα, οπότε η αρχή και το πέρας ταυτίζονται. Επομένως, το σημείο Μ ταυτίζεται με το σημείο Α.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, τα οποία δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ
α)	Αν $\overrightarrow{ΑΒ} = \overrightarrow{ΑΓ}$, τότε:	Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.	Το Α είναι το μέσο του ΒΓ.	Το Β ταυτίζεται με το Γ.
β)	Αν $\overrightarrow{ΑΒ} = \overrightarrow{ΒΓ}$, τότε:	Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.	Το Β είναι το μέσο του ΑΓ.	Το Α ταυτίζεται με το Γ.
γ)	Αν $\overrightarrow{ΑΒ} = \overrightarrow{ΓΔ}$, τότε:	Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.	ΑΔ = ΒΓ	Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.
δ)	$\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΔΒ} + \overrightarrow{ΒΓ} =$	$\overrightarrow{ΑΔ}$	$\overrightarrow{ΑΒ}$	$\overrightarrow{ΑΓ}$
ε)	$\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΓΒ} + \overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΒΔ} =$	$\overrightarrow{ΓΔ}$	$\overrightarrow{ΑΔ}$	$\vec{0}$

2. Δίνονται τέσσερα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α) $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{Β...} = \overrightarrow{ΑΔ}$

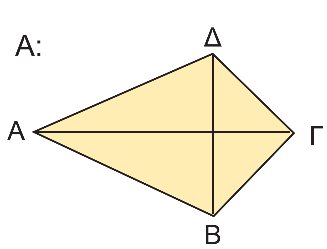
β) $\overrightarrow{ΒΓ} = \overrightarrow{Β...} + \overrightarrow{Δ...}$

γ) $\overrightarrow{Γ...} - \overrightarrow{Γ...} = \overrightarrow{ΑΒ}$

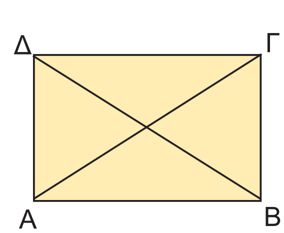
δ) $\overrightarrow{ΑΓ} = \overrightarrow{Α...} + \overrightarrow{ΒΔ} + \overrightarrow{.....}$

3. Η ισότητα $\overrightarrow{ΑΓ} = \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΔ}$ είναι σωστή σ' ένα μόνο από τα παρακάτω σχήματα. Μπορείτε να βρείτε σε ποιο;

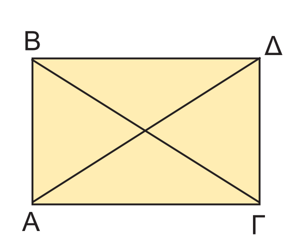
Α:



Β:

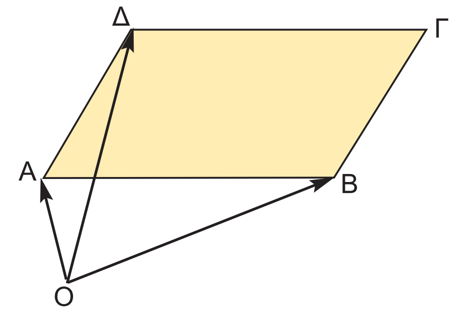


Γ:



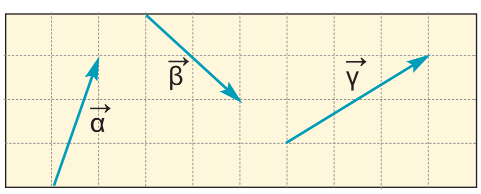
4. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις.

		Α	Β	Γ	Δ
α)	$\vec{AB}+\vec{AΔ}=$	$\vec{BΓ}$	$\vec{BΔ}$	$\vec{ΔB}$	$\vec{AΓ}$
β)	$\vec{OA}+\vec{BΓ}=$	$\vec{OΓ}$	$\vec{AΓ}$	$\vec{OΔ}$	$\vec{OB}$
γ)	$\vec{OB}+\vec{ΓΔ}=$	$\vec{OA}$	$\vec{OΔ}$	$\vec{OΓ}$	$\vec{BΔ}$
δ)	$\vec{OB}+\vec{AΔ}=$	$\vec{OΔ}$	$\vec{OΓ}$	$\vec{OA}$	$\vec{BΔ}$

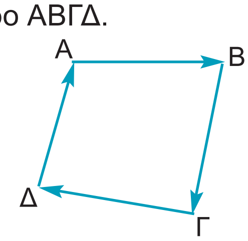


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Στο παρακάτω σχήμα να σχεδιάσετε τα αθροίσματα:
α) $\vec{α}+\vec{β}$ β) $\vec{β}+\vec{γ}$ γ) $\vec{α}+\vec{β}+\vec{γ}$

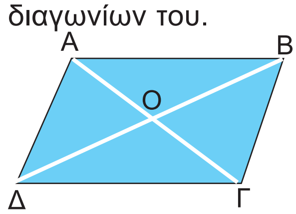


2 Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ.
Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:
α) $\vec{AB}+\vec{BΓ}+\vec{ΓΔ}$
β) $\vec{AB}+\vec{BΓ}+\vec{ΓΔ}+\vec{ΔA}$
γ) $\vec{AB}-\vec{ΓB}-\vec{AΔ}$

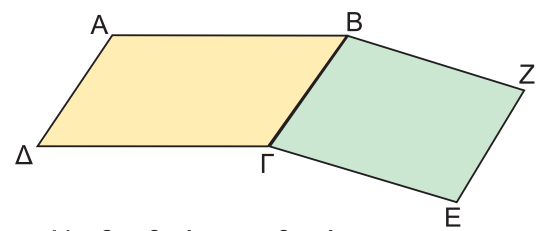


3 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ σημείο της ΒΓ. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:
α) $\vec{ΔΓ}+\vec{MΔ}+\vec{AM}$
β) $\vec{ΓM}+\vec{MB}+\vec{BΓ}+\vec{BΔ}$
γ) $\vec{BΓ}+\vec{ΔM}+\vec{AB}+\vec{MA}$

4 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του.
Να συγκρίνετε τις διαφορές:
α) $\vec{BO}-\vec{BA}$
β) $\vec{BΓ}-\vec{BO}$
γ) $\vec{ΔO}-\vec{ΔA}$
δ) $\vec{ΔΓ}-\vec{ΔO}$

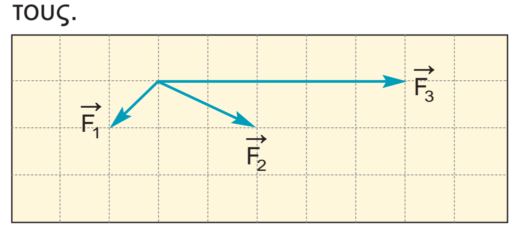


5 Στο παρακάτω σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΒΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμα.

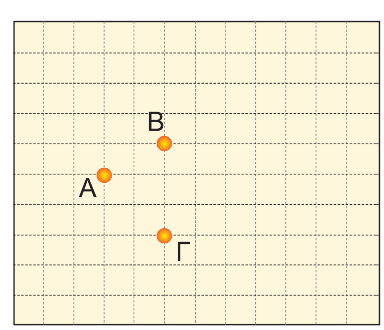


Να βρεθούν τα αθροίσματα:
α) $\vec{AB}+\vec{AΔ}$ β) $\vec{EΓ}+\vec{ΔA}$
γ) $\vec{AB}+\vec{BΓ}$ δ) $\vec{AB}+\vec{ZE}+\vec{ΓΔ}$

6 Σε ένα σώμα ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$, όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα. Να σχεδιάσετε τη συνισταμένη τους.

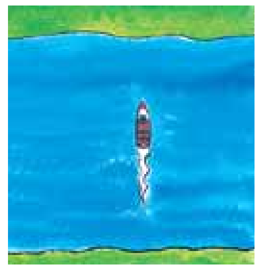


7 Στο διπλανό σχήμα να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{AΔ}$, $\vec{AE}$, $\vec{AZ}$ και $\vec{AΘ}$, έτσι ώστε να ισχύει:
$\vec{AΔ}=\vec{AB}+\vec{AΓ}$,
$\vec{AE}=\vec{AB}+\vec{ΓA}$,
$\vec{AZ}=\vec{AB}+\vec{AB}$ και
$\vec{AΘ}=\vec{AB}+\vec{BΓ}+\vec{ΓA}$.



8 Αν Μ είναι το μέσο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$), να αποδείξετε ότι: $\vec{ΓΒ} - \vec{ΓΑ} = \vec{ΑΜ} - \vec{ΜΓ}$.

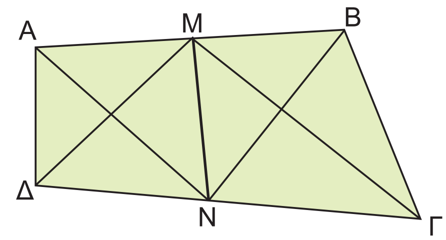
9 Μία βάρκα διασχίζει κάθετα ένα ποτάμι. Αν η βάρκα κινείται μόνο από τη μηχανή της, θα έχει ταχύτητα με μέτρο 2 m/s. Η βάρκα παρασύρεται, όμως, από το ρεύμα του ποταμού που έχει ταχύτητα 0,6 m/s.



α) Να σχεδιάσετε τις δύο ταχύτητες.

β) Να σχεδιάσετε την διεύθυνση που θα πάρει τελικά η βάρκα.

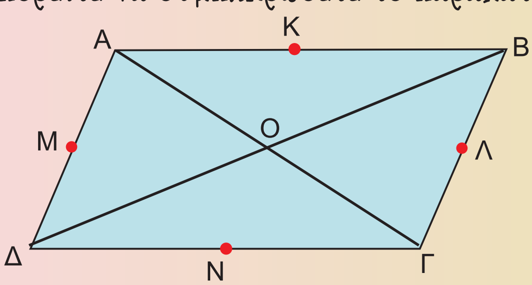
10 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ. Να αποδείξετε ότι: $\vec{ΜΓ} + \vec{ΜΔ} = \vec{ΑΝ} + \vec{ΒΝ}$.



ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

Στο παρακάτω σχήμα, τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν, είναι τα μέσα των πλευρών του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

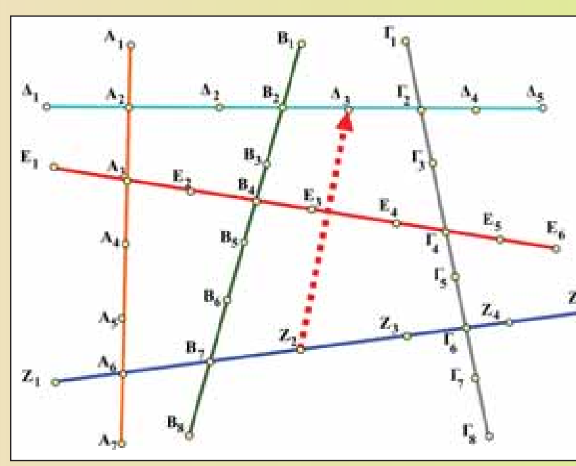
Μπορείτε να συμπληρώσετε το παρακάτω διανυσματοσταυρόλεξο;



$\vec{ΑΟ}$	+		=	$\vec{ΑΒ}$
+		+		+
$\vec{ΟΝ}$	+		=	
=		=		=
	+	$\vec{ΟΛ}$	=	

Τα διανύσματα στο χάος της κυκλοφορίας

Σε μια πόλη υπάρχουν έξι γραμμές μετρό. Ο χάρτης των στάσεων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Για να μεταβούμε από ένα σημείο της πόλης σε ένα άλλο, για παράδειγμα από το σημείο Z_2 στο σημείο $Δ_3$, μπορούμε να κινηθούμε με διάφορους τρόπους, οι οποίοι μπορούν να παρασταθούν με διανύσματα:



$\vec{Z_2Δ_3} = \vec{Z_2Γ_6} + \vec{Γ_6Γ_2} + \vec{Γ_2Δ_3}$ ή

$\vec{Z_2Δ_3} = \vec{Z_2Β_7} + \vec{Β_7Β_2} + \vec{Β_2Δ_3}$ ή $\vec{Z_2Δ_3} = \vec{Z_2Α_6} + \vec{Α_6Α_3} + \vec{Α_3Β_4} + \vec{Β_4Β_2} + \vec{Β_2Δ_3}$

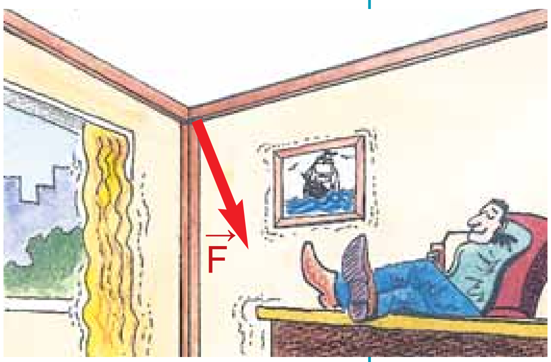
α) Μπορείτε να βρείτε άλλους τρόπους (έστω και πιο μακρινούς) για να κάνουμε τη διαδρομή $\vec{Z_2Δ_3}$ και να τους γράψετε σε μορφή αθροίσματος διανυσμάτων;

β) Με ποιους τρόπους μπορεί κανείς να μεταβεί από το σημείο $Α_4$ στο σημείο $Γ_3$; Να γράψετε τις διαδρομές αυτές σε μορφή αθροίσματος διανυσμάτων.

γ) Να κάνετε τις διαδρομές: $\vec{Ε_3Α_7}$, $\vec{Δ_4Ζ_1}$ και $\vec{Γ_8Α_1}$ με όσο το δυνατόν περισσότερους τρόπους!

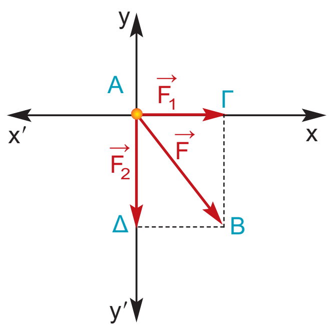
2.7. Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες



Όταν γίνεται σεισμός, ασκούνται δυνάμεις στα διάφορα μέρη των κτιρίων. Ο μηχανικός που κατασκευάζει τα κτίρια, για να εξασφαλίσει την αντοχή τους χρησιμοποιεί τις γνώσεις των επιστημών της «Στατικής» και της «Αντοχής Υλικών». Υπολογίζει, λοιπόν, τις δυνάμεις που ασκούνται στα κάθετα και οριζόντια μέρη των κτιρίων (κολόνες και δοκάρια), για να μην πέσουν τα κτίρια. Κατά τη διάρκεια του σεισμού εφαρμόζεται μια πλάγια δύναμη στις κολόνες και τα δοκάρια του κτιρίου, όπως φαίνεται στο σκίτσο.

Ο μηχανικός ενδιαφέρεται να γνωρίζει χωριστά τις δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, που ασκούνται αντίστοιχα στο δοκάρι και την κολόνα. Είναι αναγκαία, λοιπόν, η ανάλυση ενός διανύσματος $\vec{F}$ σε δύο κάθετα διανύσματα.



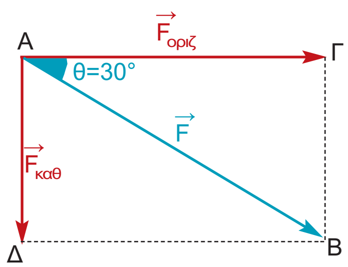
Η ανάλυση του διανύσματος $\vec{F}$ στις δύο κάθετες **συνιστώσες** του $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, γίνεται ως εξής:

Στην αρχή Α του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = \vec{F}$, σχηματίζουμε δύο κάθετες ευθείες x′x και y′y, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Από το πέρας Β φέρνουμε δύο κάθετες: τη ΒΓ στην x′x και τη ΒΔ στην y′y. Τότε το ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο, επομένως:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta}$ και επιπλέον $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{F}_1$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{F}_2$.

Μέτρα Συνιστωσών

Αν γνωρίζουμε ότι το μέτρο της δύναμης που προέρχεται από το σεισμό είναι $|\vec{F}| = 6000$ N και σχηματίζει με το οριζόντιο δοκάρι γωνία $\theta = 30°$, μπορούμε να υπολογίσουμε τα μέτρα των κάθετων συνιστωσών της $\vec{F}$.



Αναλύουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες:
$\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{F}_{οριζ}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{F}_{καθ}$.

Γνωρίζουμε ότι: $|\overrightarrow{AB}| = 6000$ N και $\theta = 30°$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι:

$$\text{συν}\theta = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{|\overrightarrow{A\Gamma}|}{|\overrightarrow{AB}|} \text{ και } \text{ημ}\theta = \frac{\Gamma B}{AB} = \frac{|\overrightarrow{\Gamma B}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

Όμως $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$, οπότε $|\overrightarrow{A\Delta}| = |\overrightarrow{\Gamma B}|$. Επομένως:

$$|\vec{F}_{οριζ}| = |\overrightarrow{ΑΓ}| = |\overrightarrow{ΑΒ}| \cdot συνθ = 6000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3000\sqrt{3} \text{ (N)}.$$

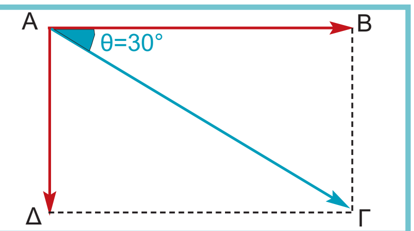
$$|\vec{F}_{καθ}| = |\overrightarrow{ΑΔ}| = |\overrightarrow{ΑΒ}| \cdot ημθ = 6000 \cdot \frac{1}{2} = 3000 \text{ (N)}.$$

Γενικότερα, για τα μέτρα των δύο κάθετων συνιστωσών $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ μιας δύναμης $\vec{F}$ ισχύει ότι:

$$\boxed{|\vec{F}_1| = |\vec{F}|\,συνθ} \quad \text{και} \quad \boxed{|\vec{F}_2| = |\vec{F}|\,ημθ}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ.
Αν $|\overrightarrow{ΑΓ}| = 6$, να υπολογίσετε τα μέτρα $|\overrightarrow{ΑΒ}|$ και $|\overrightarrow{ΑΔ}|$.

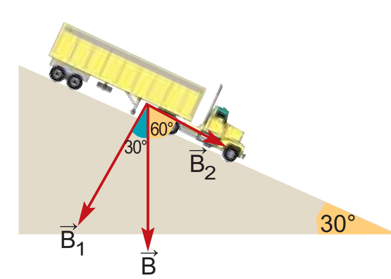


Λύση: Έχουμε: $συν30° = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{|\overrightarrow{ΑΒ}|}{|\overrightarrow{ΑΓ}|}$ και $ημ30° = \frac{ΑΔ}{ΑΓ} = \frac{|\overrightarrow{ΑΔ}|}{|\overrightarrow{ΑΓ}|}$, άρα

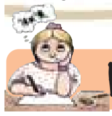
$$|\overrightarrow{ΑΒ}| = |\overrightarrow{ΑΓ}| \cdot συν30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \quad \text{και} \quad |\overrightarrow{ΑΔ}| = |\overrightarrow{ΑΓ}| \cdot ημ30° = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένα φορτηγό βάρους 40000 N, είναι σταθμευμένο σε μία κατηφόρα με γωνία κλίσης 30°, όταν ξαφνικά λύνεται το χειρόφρενο! Το διάνυσμα $\vec{B}$ του βάρους του αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η $\vec{B}_1$ εξουδετερώνεται από το έδαφος, ενώ η $\vec{B}_2$ κινεί το φορτηγό στην κατηφόρα. Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης $\vec{B}_2$.

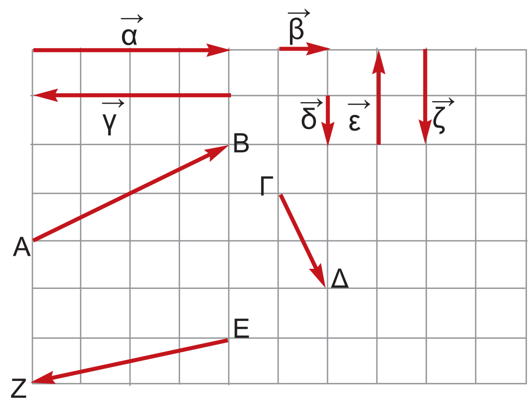


Λύση: Έχουμε: $συν60° = \frac{|\vec{B}_2|}{|\vec{B}|}$, οπότε: $|\vec{B}_2| = |\vec{B}| \cdot συν60° = 40000 \cdot \frac{1}{2} = 20000$ N.



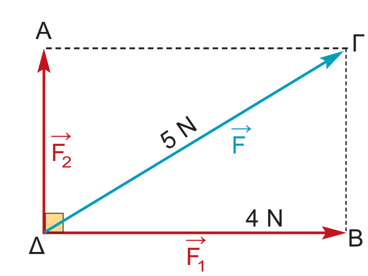
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στο παρακάτω σχήμα αναλύσαμε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{EZ}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες αλλά τα διανύσματα μπερδεύτηκαν! Μπορείτε να βρείτε ποιες είναι οι σωστές από τις παρακάτω σχέσεις;

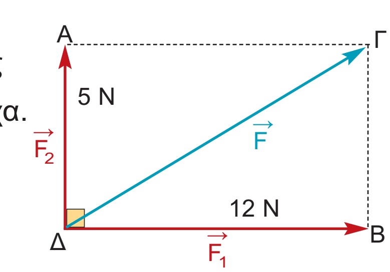


		A	B	Γ	Δ
α)	$\overrightarrow{AB}$ =	$\vec{\gamma}+\vec{\zeta}$	$\vec{\alpha}+\vec{\varepsilon}$	$\vec{\alpha}+\vec{\zeta}$	$\vec{\varepsilon}+\vec{\gamma}$
β)	$\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ =	$\vec{\beta}+\vec{\gamma}$	$\vec{\alpha}+\vec{\zeta}$	$\vec{\beta}+\vec{\zeta}$	$\vec{\varepsilon}+\vec{\delta}$
γ)	$\overrightarrow{EZ}$ =	$\vec{\gamma}+\vec{\delta}$	$\vec{\alpha}+\vec{\varepsilon}$	$\vec{\alpha}+\vec{\delta}$	$\vec{\gamma}+\vec{\zeta}$

2. Μια δύναμη $\vec{F}$, μέτρου $|\vec{F}|$ = 5 N αναλύεται σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.
Αν $|\vec{F}_1|$ = 4 N τότε $|\vec{F}_2|$ = ...
A: 1 N B: 2 N Γ: 3 N Δ: 4 N
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

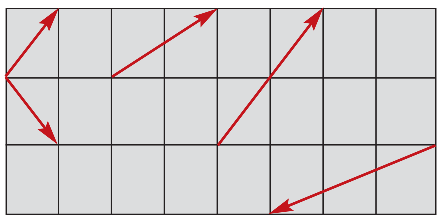


3. Μια δύναμη $\vec{F}$ αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με μέτρα 5 N και 12 N αντίστοιχα.
Τότε $|\vec{F}|$ =......
A: 15 B: 13 Γ: 17 Δ: 18
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

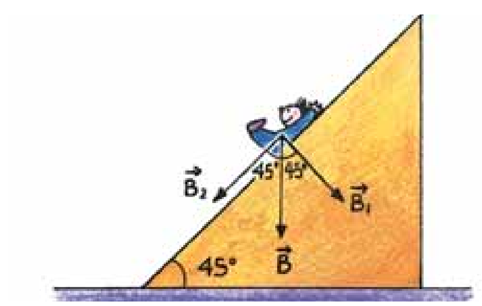


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

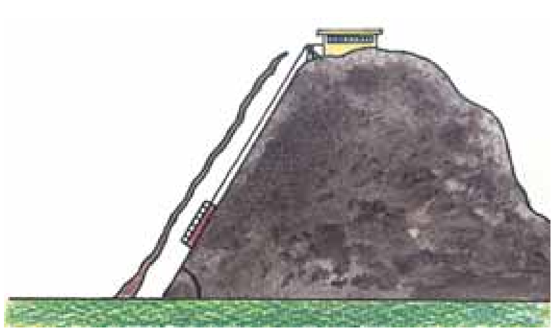
1 Να αναλύσετε τα παρακάτω διανύσματα σε άθροισμα δύο κάθετων συνιστωσών.



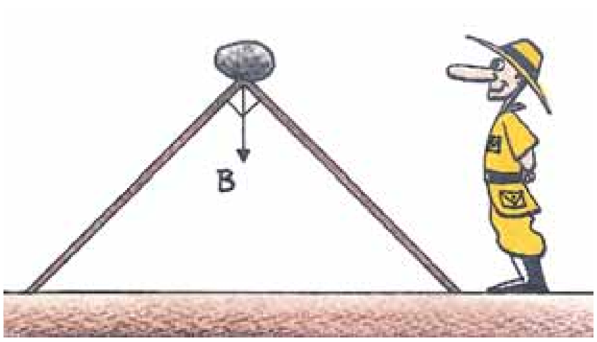
2 Ο Κωστάκης κάνει τσουλήθρα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν το βάρος του Κωστάκη είναι 270 N, να βρείτε το μέτρο της δύναμης $\vec{B}_2$ που τον κάνει να κινείται.



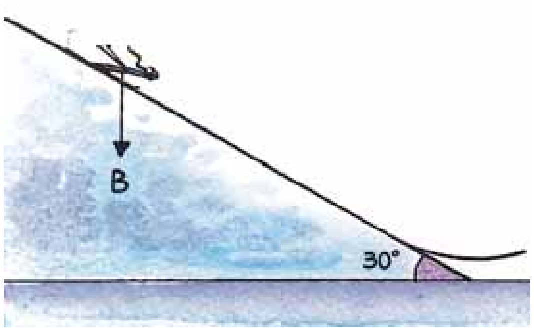
3 Σε υπόγειο τελεφερίκ οι ράγες σχηματίζουν με το οριζόντιο επίπεδο γωνία 60°. Το βάρος του βαγονιού των επιβατών (μαζί με τους επιβάτες) είναι 30000 N και σύρεται πάνω στις ράγες από την κορυφή με ένα συρματόσχοινο.
Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που πρέπει να ασκείται από το συρματόσχοινο στο βαγόνι, ώστε να κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα πάνω;



4 Ένας κυνηγός για να φτιάξει μια παγίδα, χρησιμοποιεί δύο σανίδες ίσου μήκους και τις τοποθετεί στο έδαφος, ώστε να σχηματίζουν ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.
Στην κορυφή του τριγώνου τοποθετεί πέτρα βάρους 200 N.
Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που δέχεται κάθε σανίδα από το βάρος της πέτρας;



5 Ένας σκιέρ γιγαντιαίου άλματος κατεβαίνει την εξέδρα που σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία 30°. Αν το βάρος του έχει μέτρο 800 N, ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που τον μετακινεί κατά μήκος της εξέδρας;



Επανάληψη Κεφαλαίου 2

Επανάληψη στην Τριγωνομετρία

Αν ω είναι μια οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου, τότε:

$$\text{ημω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\text{συνω} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\text{εφω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

Για οποιαδήποτε οξεία γωνία ω ισχύουν:

- $0 < \text{ημω} < 1$
- $0 < \text{συνω} < 1$
- $\text{εφω} = \dfrac{\text{ημω}}{\text{συνω}}$

Όταν μια οξεία γωνία μεγαλώνει, τότε αυξάνεται το ημίτονό της και η εφαπτομένη της, αλλά ελαττώνεται το συνημίτονό της.

Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσα ημίτονα ή ίσα συνημίτονα ή ίσες εφαπτομένες, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί 30° - 45° - 60°

	30°	45°	60°
ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφαπτομένη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Επανάληψη στα Διανύσματα

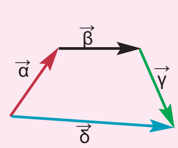
Διανυσματικά λέγονται τα μεγέθη που έχουν μέτρο και κατεύθυνση.

Τα στοιχεία ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι η διεύθυνση, η φορά και το μέτρο.

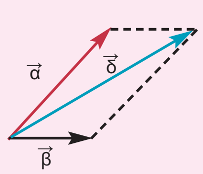
Δύο διανύσματα λέγονται ίσα, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και ίσα μέτρα, ενώ δύο διανύσματα λέγονται αντίθετα, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα και αντίθετη φορά.

Άθροισμα διανυσμάτων.

Α. Η μέθοδος του πολυγώνου:
Όταν τα διανύσματα γίνουν διαδοχικά.



Β. Η μέθοδος του παραλληλογράμμου:
Όταν τα διανύσματα $\vec{α}$, $\vec{β}$, έχουν κοινή αρχή.



Διαφορά διανυσμάτων.
$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ΓΔ} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{ΓΔ}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ΔΓ}$

Διαφορά διανυσμάτων με κοινή αρχή.
$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$

Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ είναι ένα διάνυσμα του οποίου η αρχή και το τέλος (πέρας) ταυτίζονται. Το μέτρο του είναι ίσο με 0.

Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες με μέτρα:

$$|\vec{F_1}| = |\vec{F}|\,\text{συνθ}$$

$$|\vec{F_2}| = |\vec{F}|\,\text{ημθ}$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Μέτρηση Κύκλου

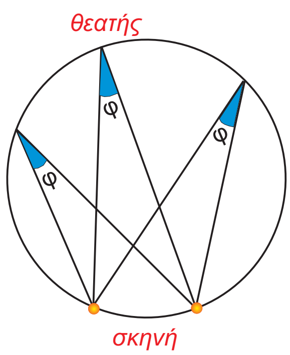
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

*Το πρόβλημα του **τετραγωνισμού του κύκλου**, το οποίο ήταν ένα από τα τρία περίφημα άλυτα προβλήματα της Αρχαιότητας, οδήγησε στην **προσπάθεια εκτίμησης της τιμής του αριθμού π**, του πιο διάσημου από όλους τους αριθμούς.*

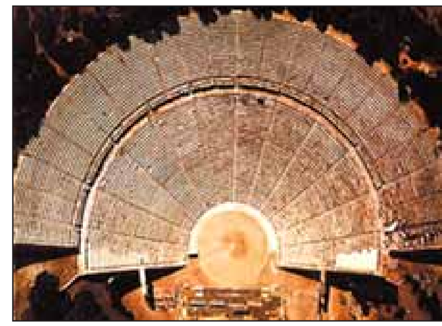
*Ο αριθμός **π** προκύπτει φυσιολογικά από τη μέτρηση του κύκλου, η οποία είναι το κύριο αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου.*

Θα εξετάσουμε, επιπλέον, τα κανονικά πολύγωνα: πολύγωνα με ίσες πλευρές και ίσες γωνίες. Είναι πολύ γνωστά σχήματα σ' εμάς, αλλά τώρα θα μελετήσουμε πιο διεξοδικά τα στοιχεία τους και την κατασκευή τους.

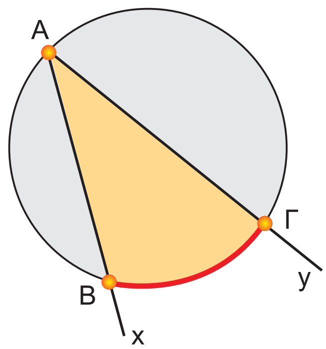
3.1. Εγγεγραμμένες γωνίες



Έχετε αναρωτηθεί ποτέ γιατί τα θέατρα, όπως η Επίδαυρος, έχουν «κυκλικό» σχήμα;



Γιατί από κάθε κάθισμα, που βρίσκεται πάνω στον κύκλο, ο θεατής «βλέπει τη σκηνή με την ίδια γωνία φ».
Οι γωνίες που βλέπουμε στο διπλανό σχήμα έχουν την κορυφή τους (θεατής) πάνω στον κύκλο και οι δύο πλευρές τους τέμνουν τον κύκλο.

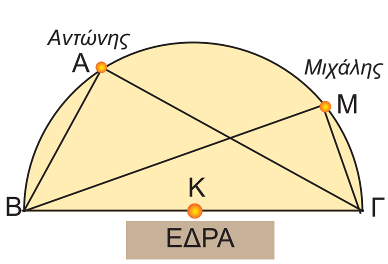


> Μια γωνία $\mathbf{x\hat{A}y}$ που η κορυφή της **Α** ανήκει στον κύκλο (Ο, ρ) και οι πλευρές της Αx, Αy τέμνουν τον κύκλο, λέγεται **εγγεγραμμένη γωνία** στον κύκλο (Ο, ρ).

Το τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$ του κύκλου (Ο, ρ) που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της.

Επίσης, λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{A}\Gamma$ **βαίνει στο τόξο** $\overset{\frown}{B\Gamma}$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1



Στο Πανεπιστήμιο γίνεται μάθημα στο Αμφιθέατρο. Δύο φοιτητές, ο Αντώνης και ο Μιχάλης, κάθονται σε μία σειρά θέσεων που σχηματίζει με την έδρα ημικύκλιο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Στο διάλειμμα ο Αντώνης μέτρησε την απόστασή του από τα δύο άκρα Β, Γ της έδρας και βρήκε ότι ΑΒ = 3 m, ΑΓ = 4 m, ενώ έχουμε ότι ΒΓ = 5 m. Ο Μιχάλης, αντίστοιχα, βρήκε ότι ΒΜ = $2\sqrt{5}$ m και ΜΓ = $\sqrt{5}$ m.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΜΓ.
β) Τι γωνίες είναι οι $\hat{A}$ και $\hat{M}$;
γ) Τι συμπεραίνετε γενικά για κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο;

Λύση

α) Έχουμε ότι:

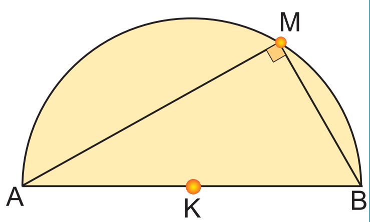
$AB^2 + A\Gamma^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = B\Gamma^2$

$BM^2 + M\Gamma^2 = (2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = 25 = B\Gamma^2$

Επομένως, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα και στα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΜΓ.

β) Αφού ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα, θα έχουμε ότι: $\hat{Α}$ = 90° και $\hat{Μ}$ = 90°, δηλαδή τα τρίγωνα είναι ορθογώνια.

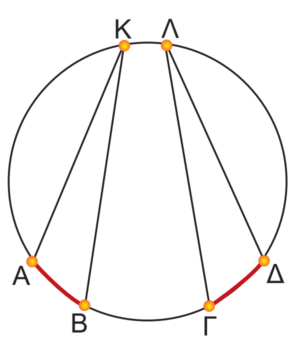
γ) Συμπεραίνουμε ότι η προηγούμενη διαπίστωση ισχύει γενικά, δηλαδή:



Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Μια ορθή γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης που είναι η πλήρης γωνία. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει για κάθε εγγεγραμμένη και την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία της.

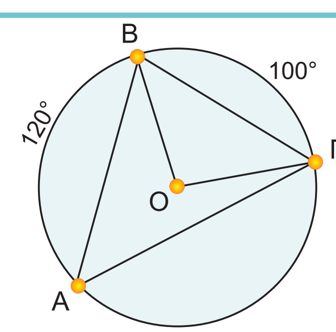
Συγκεκριμένα:



- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.
- Οι εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι μεταξύ τους ίσες.
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία έχει μέτρο ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε ένα κύκλο (Ο, ρ) θεωρούμε τρία σημεία Α, Β, Γ, έτσι ώστε $\overset{\frown}{ΑΒ}$ = 120° και $\overset{\frown}{ΒΓ}$ = 100°. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση: Αφού $\overset{\frown}{ΒΓ}$ = 100°, τότε η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $Β\hat{Ο}Γ$ θα είναι και αυτή ίση με 100°. Επομένως, η γωνία $Β\hat{Α}Γ$ που είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$ με την επίκεντρη $Β\hat{Ο}Γ$ θα είναι: $Β\hat{Α}Γ = \dfrac{Β\hat{Ο}Γ}{2} = 50°$. Ομοίως προκύπτει ότι: $Β\hat{Γ}Α = 60°$. Επειδή το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι 180°, θα ισχύει ότι: $Α\hat{Β}Γ = 180° – 50° – 60° = 70°$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

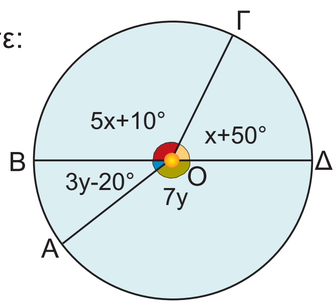
Στο παρακάτω σχήμα η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου. Να υπολογίσετε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$, $\overset{\frown}{ΒΓ}$, $\overset{\frown}{ΓΔ}$, $\overset{\frown}{ΔΑ}$.

Λύση: Τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{ΒΓ}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$ σχηματίζουν ημικύκλιο, οπότε: $5x + 10° + x + 50° = 180°$ ή $6x = 120°$, επομένως $x = 20°$.

Ομοίως, τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{ΒΑ}$ και $\overset{\frown}{ΑΔ}$ σχηματίζουν ημικύκλιο, οπότε: $3y - 20° + 7y = 180°$, επομένως $10y = 200°$ ή $y = 20°$.

Έχουμε ότι: $\overset{\frown}{ΑΒ} = 3y - 20° = 60° - 20° = 40°$,

$\overset{\frown}{ΒΓ} = 5 \cdot 20° + 10° = 110°$, $\overset{\frown}{ΓΔ} = 20° + 50° = 70°$, $\overset{\frown}{ΔΑ} = 7 \cdot 20° = 140°$.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

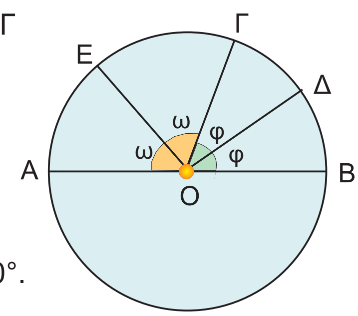
Στο παρακάτω σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου και οι ΟΔ, ΟΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών $Β\hat{Ο}Γ$, $Α\hat{Ο}Γ$ αντίστοιχα. Να υπολογιστεί το τόξο $\overset{\frown}{ΕΔ}$.

Λύση: Αφού οι ΟΔ, ΟΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών $Β\hat{Ο}Γ$ και $Α\hat{Ο}Γ$ αντίστοιχα, θεωρούμε ότι $Β\hat{Ο}Δ = Δ\hat{Ο}Γ = φ$ και $Α\hat{Ο}Ε = Ε\hat{Ο}Γ = ω$.

Όμως, $Δ\hat{Ο}Ε = Δ\hat{Ο}Γ + Ε\hat{Ο}Γ = φ + ω$.

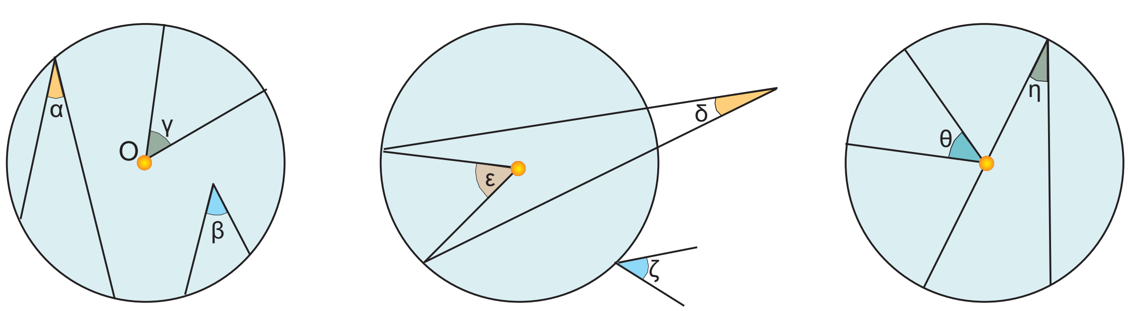
Έχουμε $Β\hat{Ο}Γ + Γ\hat{Ο}Α = 180°$, δηλαδή $2φ + 2ω = 180°$, οπότε $φ + ω = 90°$.

Άρα $Δ\hat{Ο}Ε = 90°$ και το αντίστοιχο τόξο $\overset{\frown}{ΕΔ}$ είναι ίσο με 90°.



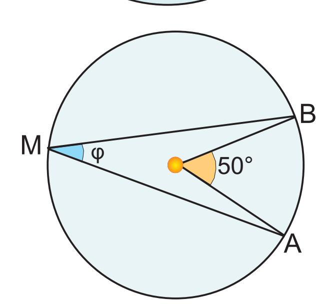
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στα παρακάτω σχήματα ποιες από τις γωνίες είναι εγγεγραμμένες και ποιες επίκεντρες;



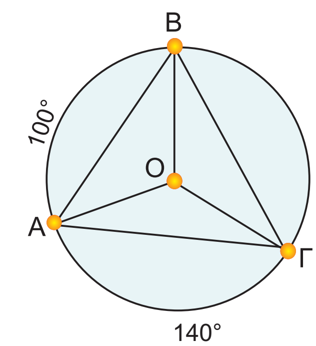
2. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ
α)	Το μέτρο της γωνίας φ είναι:	50°	25°	100°
β)	Το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$ είναι:	50°	25°	100°



3. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ
α)	Το μέτρο της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ είναι:	60°	70°	50°
β)	Το μέτρο της γωνίας $A\hat{O}\Gamma$ είναι:	120°	140°	100°
γ)	Το μέτρο της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$ είναι:	60°	70°	50°
δ)	Το μέτρο της γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ είναι:	60°	70°	50°



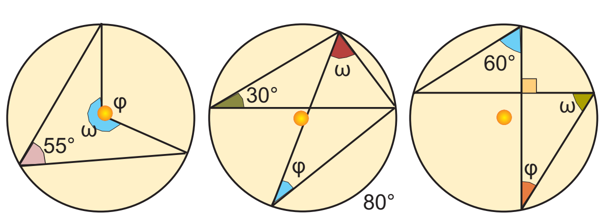
4. Αν σε κύκλο φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους, τότε τα τέσσερα ίσα τόξα είναι: Α: 80° Β: 180° Γ: 90° Δ: 45°.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

5. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

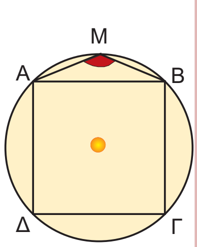
		Α	Β	Γ
α)	Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει σε ημικύκλιο είναι:	180°	60°	90°
β)	Αν σ' έναν κύκλο μια επίκεντρη γωνία είναι ίση με μια εγγεγραμμένη, τότε για τα αντίστοιχα τόξα ισχύει:	είναι ίσα	Το τόξο της επίκεντρης είναι διπλάσιο από το τόξο της εγγεγραμμένης	Το τόξο της επίκεντρης είναι ίσο με το μισό του τόξου της εγγεγραμμένης
γ)	Η άκρη του ωροδείκτη ενός ρολογιού σε 3 ώρες διαγράφει τόξο:	60°	90°	30°
δ)	Η άκρη του λεπτοδείκτη ενός ρολογιού σε 45 λεπτά διαγράφει τόξο:	45°	90°	270°

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

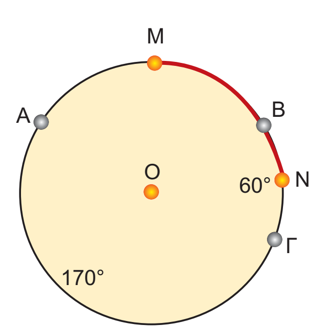
1 Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω που υπάρχουν στα παρακάτω σχήματα.



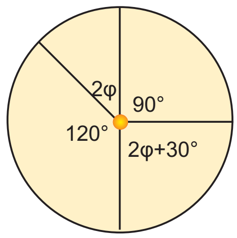
2 Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και το Μ ένα σημείο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{M}B$.



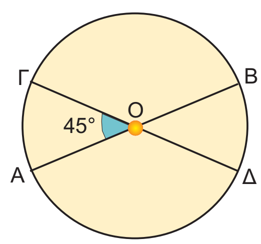
3 Έστω Μ και Ν τα μέσα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$ αντίστοιχα, ενός κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Αν $\overset{\frown}{B\Gamma}$ = 60° και $\overset{\frown}{A\Gamma}$ = 170°, να βρείτε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{MN}$.



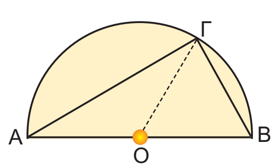
4 Να υπολογίσετε τη γωνία φ στο παρακάτω σχήμα.



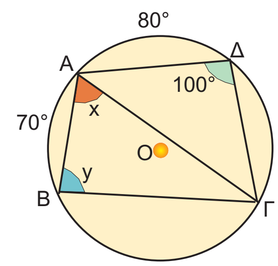
5 Στον κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ του παρακάτω σχήματος να υπολογίσετε τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$, $\overset{\frown}{ΔΒ}$, $\overset{\frown}{ΒΓ}$, $\overset{\frown}{ΓΑ}$, αν γνωρίζουμε ότι $Α\hat{Ο}Γ = 45°$ και ότι οι ΑΒ, ΓΔ είναι διάμετροι του κύκλου.



6 Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 6 cm δίνεται σημείο του Γ, έτσι ώστε $\overset{\frown}{ΑΓ} = 2\overset{\frown}{ΒΓ}$. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

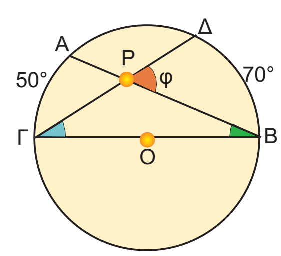


7 Να υπολογίσετε τις γωνίες x, y στο παρακάτω σχήμα.

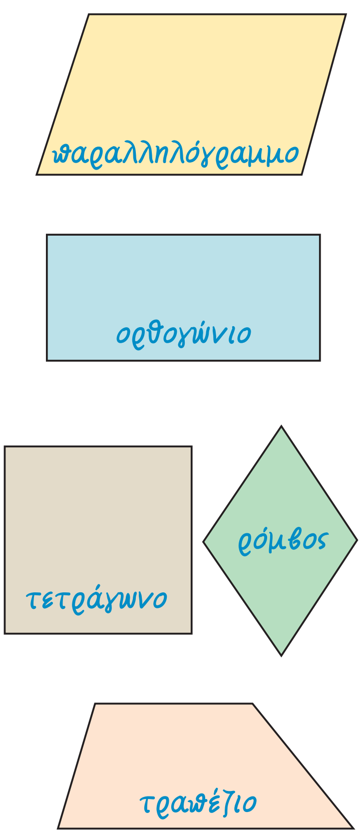


8 Σ' έναν κύκλο θεωρούμε τρία διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ} = 100°$, $\overset{\frown}{ΒΓ} = 160°$ και $\overset{\frown}{ΓΔ} = 80°$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

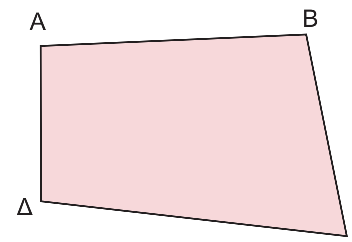
9 Στον κύκλο κέντρου Ο οι χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Ρ. Αν $\overset{\frown}{ΑΓ} = 50°$ και $\overset{\frown}{ΒΔ} = 70°$, να υπολογίσετε τη γωνία φ.



3.2. Κανονικά πολύγωνα

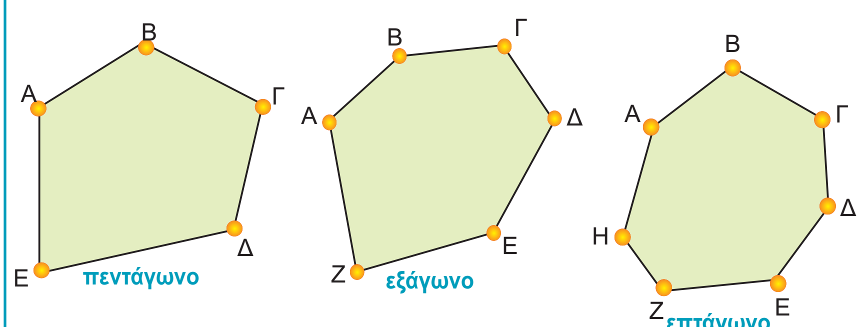


Στην Α′ Γυμνασίου μελετήσαμε διάφορα είδη τετραπλεύρων, όπως το παραλληλόγραμμο, το ορθογώνιο, το ρόμβο, το τετράγωνο και το τραπέζιο.



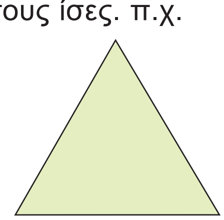
Ένα τυχαίο τετράπλευρο είναι ένα πολύγωνο με τέσσερις κορυφές.

Μπορούμε να σχηματίσουμε και πολύγωνα με 5, 6, 7, ... κορυφές, τα οποία αντίστοιχα λέγονται πεντάγωνο, εξάγωνο, επτάγωνο, ... , κ.τ.λ.

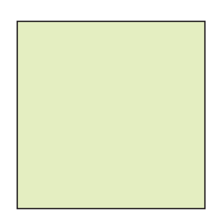


- Ένα πολύγωνο με ν κορυφές θα το λέμε **ν-γωνο**. Εξαίρεση αποτελεί το πολύγωνο με 4 κορυφές, που λέγεται τετράπλευρο.

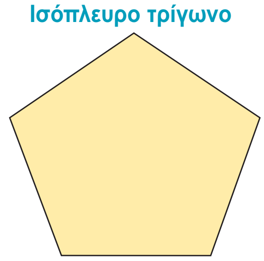
- Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, αν όλες οι πλευρές του είναι μεταξύ τους ίσες και όλες οι γωνίες του είναι μεταξύ τους ίσες. π.χ.



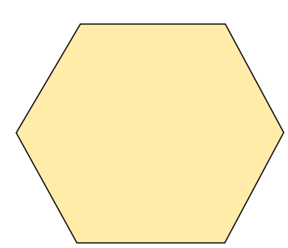
Ισόπλευρο τρίγωνο



Τετράγωνο



Κανονικό πεντάγωνο



Κανονικό εξάγωνο

Κατασκευή κανονικών πολυγώνων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

α) Να χωρίσετε έναν κύκλο σε έξι ίσα και διαδοχικά τόξα: $\overset{\frown}{ΑΒ}$, $\overset{\frown}{ΒΓ}$, $\overset{\frown}{ΓΔ}$, $\overset{\frown}{ΔΕ}$, $\overset{\frown}{ΕΖ}$, $\overset{\frown}{ΖΑ}$.

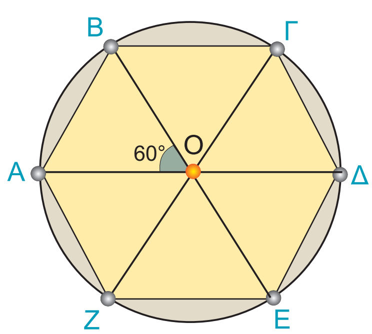
β) Τι παρατηρείτε για τα ευθύγραμμα τμήματα (χορδές) ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ;

γ) Τι είδους πολύγωνο είναι το ΑΒΓΔΕΖ;

Λύση

α) Αφού όλος ο κύκλος έχει μέτρο 360°, για να τον χωρίσουμε σε έξι ίσα τόξα, κάθε τόξο θα έχει μέτρο $\frac{360°}{6} = 60°$.

Σχηματίζουμε διαδοχικά έξι επίκεντρες γωνίες ω = 60°, οι οποίες χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα και διαδοχικά τόξα.



β) Γνωρίζουμε από την Α' Γυμνασίου ότι ίσα τόξα αντιστοιχούν σε ίσες χορδές, επομένως:

ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ = ΖΑ.

γ) Η γωνία $Α\hat{Β}Γ$ του εξαγώνου είναι εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου με αντίστοιχο τόξο, μέτρου:

$\overset{\frown}{ΑΖ} + \overset{\frown}{ΖΕ} + \overset{\frown}{ΕΔ} + \overset{\frown}{ΔΓ} = 60° + 60° + 60° + 60° = 240°$.

Επομένως, $Α\hat{Β}Γ = \frac{1}{2}240° = 120°$.

Ομοίως, έχουμε ότι:

$Β\hat{Γ}Δ = Γ\hat{Δ}Ε = Δ\hat{Ε}Ζ = Ε\hat{Ζ}Α = Ζ\hat{Α}Β = 120°$.

Το εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ έχει όλες τις πλευρές του ίσες μεταξύ τους και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους, οπότε είναι κανονικό.

Η διαδικασία κατασκευής ενός κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές (κανονικό ν-γωνο) ακολουθεί τα εξής βήματα:

1ο βήμα:

Υπολογίζουμε τη γωνία $ω = \frac{360°}{ν}$.

2ο βήμα:

Σχηματίζουμε διαδοχικά ν επίκεντρες γωνίες ω, οι οποίες χωρίζουν τον κύκλο σε ν ίσα τόξα.

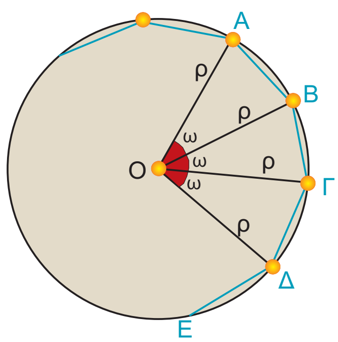
3ο βήμα:

Ενώνουμε με διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα τα άκρα των τόξων.

Είδαμε ότι με την προηγούμενη διαδικασία κατασκευάζεται ένα κανονικό εξάγωνο, του οποίου οι κορυφές είναι σημεία ενός κύκλου. Ο κύκλος αυτός λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του πολυγώνου.

Επίσης, λέμε ότι το πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο στο συγκεκριμένο κύκλο. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να εγγράψουμε σε ένα κύκλο ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα τετράγωνο και γενικά ένα κανονικό ν-γωνο.

Γωνία και κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου



➤ Κεντρική γωνία ν-γώνου

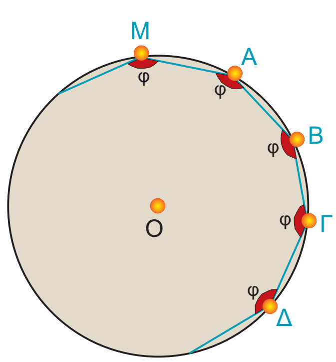
Ας θεωρήσουμε ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές (κανονικό ν-γωνο) εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, ρ).

Είδαμε προηγουμένως ότι για να χωρίσουμε τον κύκλο σε ν ίσα τόξα, θεωρούμε ν διαδοχικές επίκεντρες γωνίες $\omega = \frac{360°}{\nu}$.

Καθεμία από τις γωνίες αυτές λέγεται **κεντρική γωνία** του κανονικού ν-γώνου.

Επομένως:

Η κεντρική γωνία ω ενός κανονικού ν-γώνου είναι ίση με $\omega = \frac{360°}{\nu}$.

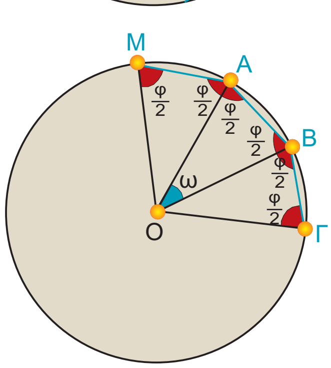


➤ Γωνία ν-γώνου

Σε οποιοδήποτε κανονικό ν-γωνο οι γωνίες $M\hat{A}B$, $A\hat{B}\Gamma$, $B\hat{\Gamma}\Delta$, ... κ.ο.κ. είδαμε ότι είναι ίσες, αφού είναι εγγεγραμμένες σε ίσα τόξα και τις συμβολίζουμε με φ.

● Η γωνία φ ονομάζεται **γωνία του κανονικού ν-γώνου**.

Ας δούμε τη σχέση της κεντρικής γωνίας ω και της γωνίας φ του ν-γώνου. Ενώνουμε το κέντρο του ν-γώνου με τις κορυφές, οπότε σχηματίζονται ν ίσα ισοσκελή τρίγωνα.



Σε καθένα από τα τρίγωνα αυτά οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες με $\frac{\varphi}{2}$. Στο τρίγωνο ΟΑΒ θα έχουμε ότι:

$\omega + \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = 180°$ ή $\omega + \varphi = 180°$ ή $\boxed{\varphi = 180° - \omega}$

Επομένως:

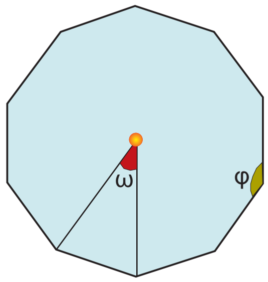
Η γωνία φ ενός κανονικού ν-γώνου είναι παραπληρωματική της κεντρικής γωνίας του ν-γώνου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

α) Να βρείτε τη γωνία του κανονικού δεκαγώνου.
β) Να βρείτε ποιο κανονικό πολύγωνο έχει γωνία 162°.

Λύση: α) Αν ονομάσουμε φ τη γωνία του κανονικού δεκαγώνου και ω την κεντρική του γωνία, έχουμε:

$$\varphi = 180° - \omega = 180° - \frac{360°}{10} = 180° - 36° = 144°.$$



β) Ισχύει ότι: $\varphi = 180° - \omega$ ή $162° = 180° - \frac{360°}{\nu}$ ή

$\frac{360°}{\nu} = 180° - 162°$ ή $\frac{360°}{\nu} = 18°$ ή $\nu = \frac{360}{18}$ ή $\nu = 20$.

Δηλαδή, το κανονικό εικοσάγωνο έχει γωνία φ = 162°.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

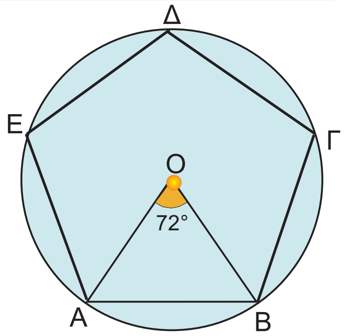
Να κατασκευαστεί κανονικό πεντάγωνο.

Λύση:

➤ Γράφουμε κύκλο (Ο, ρ) και σχηματίζουμε μια επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B = \frac{360°}{5} = 72°$.

➤ Με το διαβήτη θεωρούμε διαδοχικά τόξα ίσα με το $\overset{\frown}{AB}$.

➤ Φέρνουμε τις χορδές των παραπάνω τόξων.

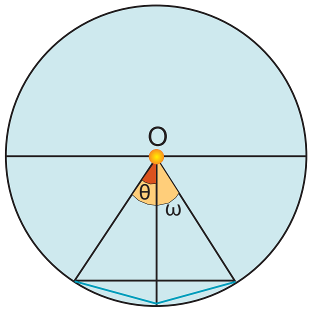


ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Δίνεται ένα κανονικό ν-γωνο. Να κατασκευάσετε το κανονικό πολύγωνο που έχει διπλάσιες πλευρές (2ν-γωνο).

Λύση: Αν ω είναι η κεντρική γωνία του πολυγώνου που έχει ν πλευρές, και θ η κεντρική γωνία του πολυγώνου με 2ν πλευρές, έχουμε ότι $\omega = \frac{360°}{\nu}$ και $\theta = \frac{360°}{2\nu}$.

Επομένως, $\theta = \frac{\omega}{2}$.



Αν φέρουμε τις διχοτόμους των κεντρικών γωνιών του ν-γώνου, οι γωνίες που θα σχηματιστούν θα είναι οι κεντρικές γωνίες του πολυγώνου με 2ν πλευρές. Οι διχοτόμοι, όπως γνω-ρίζουμε, διέρχονται από τα μέσα των τόξων. Τα μέσα αυτών των τόξων και οι κορυφές του αρχικού ν-γώνου αποτελούν τις κορυφές του κανονικού πολυγώνου με 2ν πλευρές.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ
α)	Η κεντρική γωνία κανονικού εξαγώνου είναι:	120°	30°	60°
β)	Η κεντρική γωνία κανονικού δωδεκάγωνου είναι:	120°	30°	60°
γ)	Η κεντρική γωνία κανονικού πεντάγωνου είναι:	52°	72°	132°
δ)	Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 36°. Το πλήθος των πλευρών του είναι:	6	10	12
ε)	Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 10°. Το πλήθος των πλευρών του είναι:	12	24	36

2. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ
α)	Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 40°. Η γωνία του πολυγώνου είναι:	50°	90°	140°
β)	Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 72°. Η γωνία του πολυγώνου είναι:	108°	18°	172°
γ)	Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 30°. Η γωνία του πολυγώνου είναι:	150°	30°	60°

3. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

		Α	Β	Γ
Ένα κανονικό πολύγωνο έχει 15 πλευρές.	α) Η κεντρική του γωνία είναι:	15°	24°	30°
	β) Η γωνία του πολυγώνου είναι:	24°	156°	72°
Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 150°	γ) Η κεντρική του γωνία είναι:	15°	24°	30°
	δ) Το πλήθος των πλευρών του είναι:	15	12	8
Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 135°	ε) Η κεντρική του γωνία είναι:	35°	45°	65°
	στ) Το πλήθος των πλευρών του είναι:	8	12	18

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες.

πλήθος πλευρών	γωνία κανονικού πολυγώνου	κεντρική γωνία
3		
5		
6		
10		

κεντρική γωνία	γωνία κανονικού πολυγώνου
15°	
	150°
72°	
	160°

2 Σε κανονικό πολύγωνο η γωνία του είναι τετραπλάσια της κεντρικής του γωνίας. Να βρείτε τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

3 Να υπολογίσετε την κεντρική γωνία ω και τη γωνία φ ενός κανονικού εξαγώνου και να επαληθεύσετε ότι: $ω + φ = 180°$.

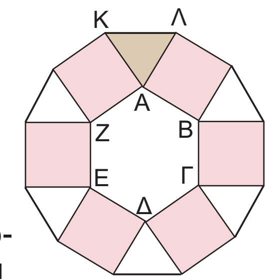
4 Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι τα $\frac{5}{3}$ της ορθής. Να βρείτε τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

5 Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο:
α) με κεντρική γωνία ω = 16°.
β) με γωνία φ = 130°.

6 Να κατασκευάσετε κανονικό οκτάγωνο.

7 Ποιο κανονικό πολύγωνο έχει γωνία ίση με την κεντρική του γωνία;

8 Με πλευρές τις πλευρές ενός κανονικού εξάγωνου, κατασκευάζουμε τετράγωνα εξωτερικά του εξαγώνου. Να αποδείξετε ότι οι κορυφές των τετραγώνων, που δεν είναι και κορυφές του εξαγώνου, σχηματίζουν κανονικό δωδεκάγωνο.



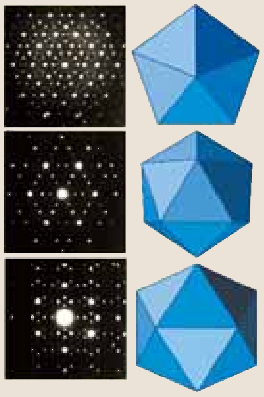
ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Τα κανονικά πολύγωνα στη Φύση, στην Τέχνη και στις Επιστήμες

Το παλάτι της Alhambra στη Granada της Ισπανίας είναι το εξοχότερο, ίσως, δείγμα χρήσης των κανονικών πολυγώνων στην Τέχνη. Έχει φτιαχτεί όλο με ψηφιδωτά πάνω σε σχέδια που περιλαμβάνουν επαναλήψεις από συνθέσεις κανονικών πολυγώνων. Ανάλογα σχέδια έχουμε δει σε μωσαϊκά, σε υφάσματα και γενικότερα στις Τέχνες. Χαρακτηριστικότερο παράδειγμα αποτελούν οι δημιουργίες του Ολλανδού καλλιτέχνη M.C. Escher.

Η χρήση κανονικών πολυγώνων στην Τέχνη και τη διακόσμηση αποτελεί κομμάτι πολλών αρχαίων πολιτισμών. Οι Σουμέριοι (περίπου 4000 π.Χ.) διακοσμούσαν τα σπίτια και τους ναούς τους με σχέδια από επαναλαμβανόμενα κανονικά πολύγωνα.
Ανάλογες διακοσμήσεις ή ακόμη και εφαρμογές στις κατασκευές κτιρίων έχουν παρουσιαστεί στους Αιγύπτιους, τους Έλληνες, τους Μαυριτανούς, τους Ρωμαίους, τους Πέρσες, τους Άραβες, τους Βυζαντινούς, τους Ιάπωνες και τους Κινέζους. Χρησιμοποιούσαν διάφορες τεχνικές σχεδιασμού και ήταν έντονος ο "συμμετρικός" τρόπος χρωματισμού.

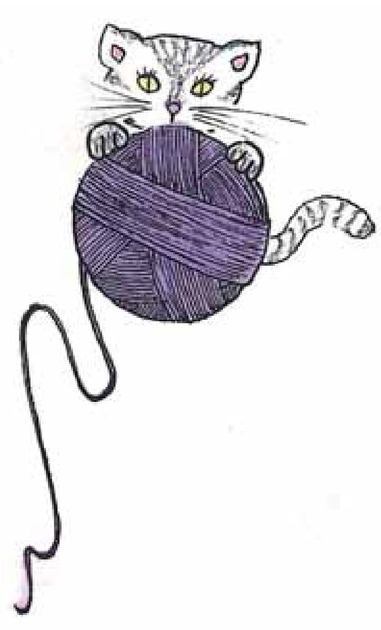
Σε αρκετούς πολιτισμούς η θρησκεία ήταν εκείνη που τους ώθησε σ' αυτό το είδος Τέχνης. Για παράδειγμα, η ισλαμική θρησκεία απαγορεύει την αναπαράσταση ζωντανών οργανισμών σε έργα τέχνης. Για το λόγο αυτό, οι Μαυριτανοί δημιούργησαν μόνο αφηρημένα γεωμετρικά σχήματα. Αντίθετα, οι Ρωμαίοι και άλλοι μεσογειακοί λαοί χρησιμοποίησαν ως φόντο συνδυασμούς κανονικών πολυγώνων, για να τονίσουν αναπαραστάσεις με ανθρώπους ή σκηνές από τη φύση.



Τα κανονικά πολύγωνα συναντώνται στη Φύση και γίνονται αντικείμενο μελέτης από διάφορους κλάδους των Φυσικών Επιστημών, όπως την Κρυσταλλογραφία (με ακτίνες Χ), την Κβαντομηχανική, την Κβαντική Χημεία. Για παράδειγμα, η Κρυσταλλογραφία με ακτίνες Χ είναι ο επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την επαναληπτική τοποθέτηση ίδιων αντικειμένων, όπως αυτά συναντώνται στη Φύση. Αρκετές από τις ανακαλύψεις στην Κρυσταλλογραφία κατά τα μέσα του 20ου αιώνα μοιάζουν με έργα τέχνης του M.C. Esher.

Άλλοι τομείς έρευνας που ασχολούνται συστηματικά με κανονικά πολύγωνα περιλαμβάνονται στη Γεωλογία, τη Μεταλλουργία, τη Βιολογία ακόμη και στην Κρυπτογραφία!

3.3. Μήκος κύκλου



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ας θεωρήσουμε ένα νόμισμα των 2 €. Αφού μετρήσετε τη διάμετρό του δ, να βάλετε μελάνι γύρω - γύρω από το νόμισμα και να το κυλίσετε κάθετα στο χαρτί, έτσι ώστε να κάνει μια πλήρη περιστροφή.

α) *Το μήκος L που διαγράφει είναι το μήκος του κύκλου. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:*

δ =	
L =	
$\frac{L}{\delta}$ =	

β) *Ας δούμε κατόπιν μερικές προσεγγιστικές μετρήσεις από την Αστρονομία για την «περιφέρεια» και τις διαμέτρους κάποιων πλανητών. Συμπληρώστε τον πίνακα:*

Πλανήτες	L	δ	$\frac{L}{\delta}$
Ερμής	15320 km	4879 km	
Αφροδίτη	38006,6 km	12104 km	
Άρης	21333,2 km	6794 km	
Γη	40053,8 km	12756 km	
Σελήνη	10914,6 km	3476 km	

Να κάνετε τις πράξεις με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων χρησιμοποιώντας έναν υπολογιστή τσέπης. Τι παρατηρείτε;

Λύση

α) Έχουμε ότι:

δ=	2,5 cm
L=	7,85 cm
$\frac{L}{\delta}$ =	3,14 cm

β) Παρατηρούμε ότι ο λόγος $\frac{L}{\delta}$ είναι περίπου 3,14 για όλους τους πλανήτες. Αυτός ο σταθερός λόγος ονομάστηκε από τους αρχαίους Έλληνες ως «ο αριθμός π», ο πιο διάσημος και αξιοσημείωτος απ' όλους τους αριθμούς (βλέπε Ιστορικό σημείωμα).

Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός π είναι ένας άρρητος αριθμός, δηλαδή δεκαδικός με άπειρα ψηφία, τα οποία δεν προκύπτουν με συγκεκριμένη διαδικασία. Τα πρώτα 40 δεκαδικά ψηφία του π είναι:

π = 3,14159 26535 89793 23846 2643383279 50288 41971 ...

Από τη σχέση $\frac{L}{\delta} = \pi$, προκύπτει ότι:

Το μήκος του κύκλου υπολογίζεται από τη σχέση:

$L = \pi\delta$ ή $L = 2\pi\rho$

Παρατήρηση:

*Στις εφαρμογές και ασκήσεις θα χρησιμοποιούμε για τον **π** την προσεγγιστική τιμή **3,14**.*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Ένας κύκλος έχει μήκος L = 9,42 cm. Να βρείτε το μήκος της ακτίνας του.

Λύση: Για το μήκος του κύκλου ισχύει ότι:

$L = 2\pi\rho$ ή $\rho = \frac{L}{2\pi} = \frac{9{,}42}{2 \cdot 3{,}14} = 1{,}5$ cm.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένας κύκλος έχει μήκος 10 cm περισσότερο από έναν άλλο. Πόσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα του;

Λύση: Θα ισχύει ότι: $L_1 = L_2 + 10$ ή $2\pi\rho_1 = 2\pi\rho_2 + 10$. Επομένως:

$\rho_1 = \rho_2 + \frac{10}{2\pi}$ ή $\rho_1 = \rho_2 + \frac{10}{2 \cdot 3{,}14}$ ή $\rho_1 = \rho_2 + 1{,}59$.

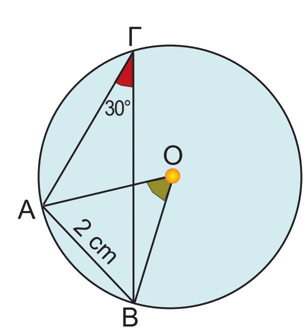
Δηλαδή, η ακτίνα του πρώτου κύκλου είναι μεγαλύτερη κατά 1,59 cm της ακτίνας του δεύτερου.

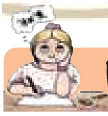
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να υπολογιστεί το μήκος του κύκλου στο παρακάτω σχήμα.

Λύση: Η εγγεγραμμένη γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι ίση με 30°, οπότε βρίσκουμε την αντίστοιχη επίκεντρη $A\hat{O}B = 2 \cdot 30° = 60°$. Επομένως, το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισόπλευρο με ΟΑ = ΟΒ = ΑΒ = 2 cm, οπότε ρ = 2 cm. Άρα, το μήκος του κύκλου είναι:

$L = 2\pi\rho = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 = 12{,}56$ cm.





ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

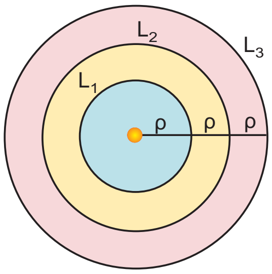
1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ακτίνα ρ	5 cm		4 cm	3 cm		9 cm
Μήκος κύκλου L		37,68 cm			12,56 cm	

2. Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου (Ο, ρ), τότε το μήκος του κύκλου:
Α: διπλασιάζεται Β: τριπλασιάζεται Γ: τετραπλασιάζεται Δ: παραμένει το ίδιο.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

3. Τρεις ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες ρ, 2ρ, 3ρ αντίστοιχα.
Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

$\frac{L_1}{L_2}$	$\frac{L_2}{L_3}$	$\frac{L_3}{L_1}$	$\frac{L_1}{2ρ}$	$\frac{L_2}{4ρ}$	$\frac{L_3}{6ρ}$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Ένας κύκλος έχει μήκος 20 cm περισσότερο από έναν άλλο. Πόσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα του;

2 Γύρω από τον κορμό ενός αιωνόβιου δέντρου τυλίγουμε ένα σκοινί. Μετράμε το σκοινί και βρίσκουμε ότι έχει μήκος 3,5 m. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κορμού.

3 Οι διάμετροι δύο κύκλων διαφέρουν κατά 5 cm. Να βρείτε πόσο διαφέρουν:
α) οι ακτίνες τους
β) οι περίμετροί τους.

4 Οι περίμετροι δύο κύκλων έχουν λόγο 2 προς 1. Να βρείτε το λόγο:
α) των διαμέτρων τους.
β) των ακτίνων τους.

5 Ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού έχει μήκος 2,5 cm. Να βρείτε πόσο διάστημα θα διαγράψει το άκρο του λεπτοδείκτη σε 12 ώρες.

6 Στη μηχανή ενός αυτοκινήτου δύο τροχαλίες Α, Β συνδέονται με ελαστικό ιμάντα. Αν $ρ_Α$ = 2 cm και $ρ_Β$ = 8 cm, να βρείτε πόσες στροφές θα κάνει η Α, αν η Β κάνει μία στροφή.

7 Ένας ποδηλάτης, που προετοιμάζεται για τους αγώνες, προπονείται σε στίβο σχήματος κύκλου με ακτίνα ρ = 30 m. Πόσες στροφές θα κάνει σε 3 ώρες προπόνησης, αν κινείται με ταχύτητα 20km/h;

8 Γνωρίζουμε ότι ο Ισημερινός της Γης έχει μήκος 40.000 km περίπου. Θεωρώντας ότι η Γη είναι σφαιρική να βρείτε την ακτίνα της.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 ...

Ο π είναι ο μόνος άρρητος και υπερβατικός, –όπως λέγεται– αριθμός που συναντάται στη φύση. *Στην Παλαιά Διαθήκη φαίνεται ότι ο **π** θεωρούνταν ίσος με το 3. Οι Βαβυλώνιοι περίπου το 2.000 π.Χ. θεωρούσαν ότι ο **π** είτε είναι ίσος με το 3 είτε με το* $3\frac{1}{8}$.

Οι Αιγύπτιοι στον πάπυρο του Rhind (1500 π.Χ.) θεωρούσαν ότι το εμβαδόν ενός κύκλου ισούται με $\left(\frac{8}{9}\delta\right)^2$, *όπου δ η διάμετρος του κύκλου, οπότε,* $\pi \approx 3{,}16049...$

*Ωστόσο, οι αρχαίοι Έλληνες ξέφυγαν από τις «χονδρικές» εκτιμήσεις των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων και έδωσαν επιστημονική μέθοδο για τον υπολογισμό του **π**. Το συνδύασαν με ένα από τα περίφημα «άλυτα» προβλήματα της Αρχαιότητας: με το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, δηλαδή την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη τετραγώνου ισεμβαδικού με δοσμένο κύκλο.*

Εκτιμήσεις του π

*Πολλοί επιστήμονες από την αρχαιότητα (με πρωτόγονα μέσα) μέχρι σήμερα (με σύγχρονους υπερυπολογιστές), προσπάθησαν να βρούν προσεγγίσεις του **π** με όσο το δυνατόν περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Μερικές από αυτές τις προσπάθειες είναι οι παρακάτω:*

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ: $\frac{310}{71} \leq \pi \leq 3\frac{10}{70}$

$3{,}14085 ... \leq \pi \leq 3{,}142857$

$\pi \approx 3\frac{1}{7}$ ή $\frac{22}{7}$

ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ: $\pi \approx \frac{377}{120}$ (=3,1416...)

TSU CHUNG-CHI (Κίνα): $3{,}1415926 \leq \pi \leq 3{,}1415927$, $\pi \approx \frac{355}{113}$.

AL–KASHI *(15ος αιώνας μ.Χ.): 16 ακριβή δεκαδικά ψηφία.*

LUDOLPH VAN CEULEN: *20, κατόπιν 32, τελικά 35 ακριβή δεκαδικά ψηφία.*

SNELL: *34 ψηφία.*

VIETE *(1592): πρώτος τύπος:* $\frac{\pi}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}...}$

JOHN WALLIS: $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}...$

LEIBNIZ *(1673):* $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}...$

JOHN MACHIN *(1706): 100 δεκαδικά ψηφία*

WILLIAM SHANKS *(1853): 707*

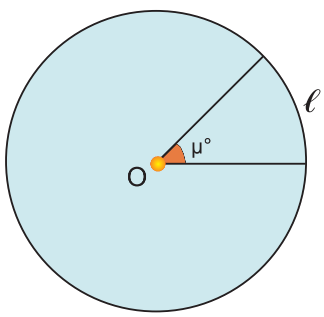
CDC 6600 *(1967): 500.000*

JOLIANN DASE *(1824 - 1861): 200*

ENIAC *(H/Y)(1949): 2037*

Ιαπωνική Ομάδα *(1993): 16.777.216 (=2^{24}).*

3.4. Μήκος τόξου



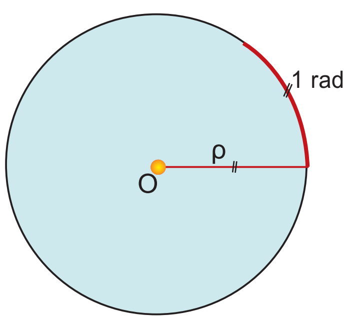
Για να υπολογίσουμε το μήκος ενός τόξου μετρημένου σε μοίρες, αρκεί να εφαρμόσουμε την **απλή μέθοδο** των τριών.

Ένα τόξο 360° (ολόκληρος ο κύκλος) έχει μήκος 2πρ.
Ένα τόξο μ° πόσο μήκος έχει;

Τόξο	Μήκος
360°	2πρ
μ°	ℓ

Έχουμε: $\dfrac{360}{2\pi\rho} = \dfrac{\mu}{\ell}$ ή $\ell = 2\pi\rho \cdot \dfrac{\mu}{360}$.

Το μήκος ενός τόξου μ° ισούται με: $\ell = 2\pi\rho \cdot \dfrac{\mu}{360}$.



Ακτίνια (rad)

Αρκετές φορές ως μονάδα μέτρησης των τόξων ενός κύκλου θεωρούμε το τόξο που έχει το ίδιο μήκος με την ακτίνα ρ του κύκλου. Αυτή η μονάδα μέτρησης λέγεται **ακτίνιο** ή **rad**.
Αν χρησιμοποιήσουμε ακτίνια,τότε:

Το μήκος ενός τόξου α rad ισούται με: $\ell = \alpha\rho$.

Σχέση μοιρών και ακτινίων

Εξισώνοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις:

$$\ell = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360}$$

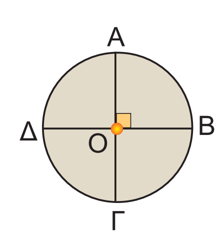
$$\ell = \alpha\rho$$

βρίσκουμε ότι: $2\pi\rho \cdot \dfrac{\mu}{360} = \alpha\rho$ ή $\pi \cdot \dfrac{\mu}{180} = \alpha$ ή $\boxed{\dfrac{\mu}{180} = \dfrac{\alpha}{\pi}}$.

Η αναλογία αυτή εκφράζει τη σχέση των μοιρών με τα ακτίνια.

***Σχόλιο*:**

Ο κύκλος χωρίζεται σε τέσσερα ίσα τόξα από δύο κάθετες διαμέτρους:
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Delta A}$.
Καθένα από αυτά τα τόξα έχει μέτρο 90° και ονομάζεται τεταρτοκύκλιο.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα παρακάτω τόξα:
$\frac{\pi}{4}$ *rad,* $25°$, $48°$, $\frac{3\pi}{2}$ *rad,* $225°$, $\frac{11\pi}{6}$ *rad.*

Λύση: Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα τόξα, θα πρέπει είτε να τα μετατρέψουμε όλα σε μοίρες είτε να τα μετατρέψουμε όλα σε rad. Ας κάνουμε και τις δύο μετατροπές:

Μοίρες	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$25°$	$48°$	$\frac{3\pi}{2} = 270°$	$225°$	$\frac{11\pi}{6} = 330°$
rad	$\frac{\pi}{4}$	$25° = \frac{5\pi}{36}$	$48° = \frac{4\pi}{15}$	$\frac{3\pi}{2}$	$225° = \frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$

Επομένως, ισχύει ότι:
$25° < 45° < 48° < 225° < 270° < 330°$ ή $\frac{5\pi}{36} < \frac{\pi}{4} < \frac{4\pi}{15} < \frac{5\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένα τόξο 30° έχει μήκος 1,3 cm. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου.

Λύση: Το μήκος του τόξου είναι: $\ell = 2\pi\rho\frac{\mu}{360}$, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$1{,}3 = \pi\rho\frac{30}{180}$$

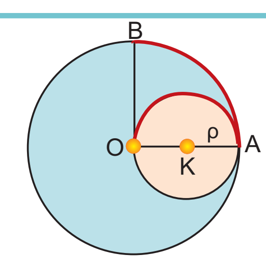
$$1{,}3 = \pi\rho\frac{1}{6}$$

$$\pi\rho = 7{,}8$$

$$\rho = \frac{7{,}8}{\pi} = \frac{7{,}8}{3{,}14} = 2{,}48 \text{ (cm)}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να αποδείξετε ότι τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{AO}$ και $\overset{\frown}{AB}$ στο διπλανό σχήμα είναι ίσα. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.



Λύση: Στον κύκλο (Κ, ρ) το τόξο $\overset{\frown}{AO}$ είναι ημικύκλιο, επομένως έχει μήκος:
$\ell_1 = 2\pi\rho\frac{180}{360} = \pi\rho$. Στον κύκλο (Ο, 2ρ) το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ αντιστοιχεί σε τεταρτοκύκλιο,

οπότε έχει μήκος: $\ell_2 = 2\pi \cdot (2\rho)\frac{90}{360} = \pi\rho$. Άρα, τα δύο τόξα έχουν ίδιο μήκος.

Συμπεραίνουμε ότι δύο τόξα με ίσα μήκη δεν είναι απαραίτητα ίσα, αφού μπορεί να ανήκουν σε κύκλους με διαφορετικές ακτίνες.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να αντιστοιχίσετε τα μέτρα των τόξων της πρώτης γραμμής από μοίρες σε ακτίνια (rad) της δεύτερης γραμμής.

Μοίρες	90°	60°	180°	270°	45°	360°
Ακτίνια	$\frac{\pi}{4}$	2π	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$

2. Αν το μήκος ℓ ενός τόξου μ° είναι ίσο με το $\frac{1}{8}$ του μήκους του κύκλου στον οποίο ανήκει, τότε:

Α: μ = 45° Β: μ = 90° Γ: μ = 60° Δ: μ = 180°

Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

3. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Τόξο σε μοίρες	30°				100°		60°	270°
Τόξο σε ακτίνια		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{6}$		

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Τόξο σε μοίρες	Τόξο σε ακτίνια
	$\frac{\pi}{3}$
15°	
	$\frac{2\pi}{3}$
	$\frac{3\pi}{2}$
180°	

2 Να υπολογίσετε το μήκος ενός τεταρτοκύκλιου ακτίνας ρ = 8 cm.

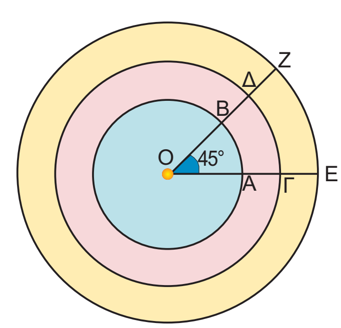
3 Σ' έναν κύκλο που έχει μήκος 188,4 cm να βρείτε το μήκος τόξου 30°.

4 Να βρείτε το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στην πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με ακτίνα ρ = 10 cm.

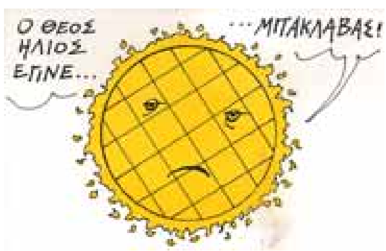
5 Ένα τόξο 45° έχει μήκος 15,7 cm. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου.

6 Δίνονται 2 τόξα π ακτινίων. Να εξετάσετε αν είναι πάντοτε ίσα.

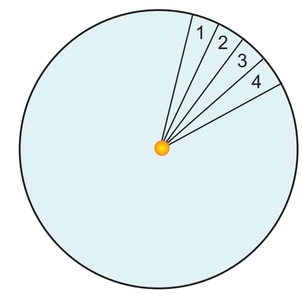
7 Δίνονται τρεις ομόκεντροι κύκλοι ακτίνων 1 cm, 1,5 cm και 2 cm και μια επίκεντρη γωνία 45°. Να βρείτε τα μήκη των τόξων που αντιστοιχούν στη γωνία αυτή.

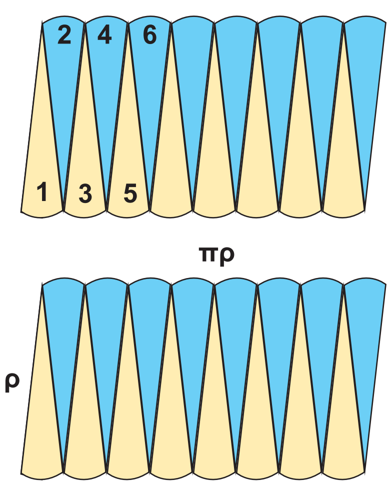


3.5. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου



Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου, χωρίζουμε τον κυκλικό δίσκο σε όσο πιο μικρά μέρη μπορούμε. Κόβουμε τα κομματάκια αυτά και κατόπιν τα τοποθετούμε όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:





Παρατηρούμε ότι σχηματίζεται ένα σχήμα που «μοιάζει» με ορθογώνιο. Αν συνεχίσουμε να χωρίζουμε τον κυκλικό δίσκο ολοένα σε πιο μικρά ίσα μέρη, τότε το τελικό σχήμα θα προσεγγίζει όλο και περισσότερο ένα ορθογώνιο, του οποίου η «βάση» είναι ίση με το μισό του μήκους του κύκλου, δηλαδή με **πρ**, και το «ύψος» με την ακτίνα του κύκλου.

Επομένως, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται, δηλαδή με **ρ · πρ**.

Επομένως:

Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ, ισούται με $E = \pi\rho^2$

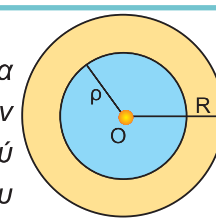
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Αν το μήκος ενός κύκλου είναι 6,28 cm, να βρείτε το εμβαδόν του.

Λύση: Το μήκος του κύκλου δίνεται από τον τύπο $L=2\pi\rho$, δηλαδή $6{,}28=2 \cdot 3{,}14\ \rho$, οπότε $\rho=1$ (cm).
Τότε, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι: $E = \pi\rho^2 = 3{,}14 \cdot 1^2 = 3{,}14$ (cm²).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο διπλανό σχήμα η κίτρινη περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα στους δύο κύκλους ονομάζεται κυκλικός δακτύλιος. Αν το εμβαδόν του κίτρινου δακτυλίου είναι ίσο με το εμβαδόν του μπλε κυκλικού δίσκου, ο οποίος έχει ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$ cm, να βρείτε την ακτίνα R του μεγάλου κύκλου.



Λύση: Το εμβαδόν E του δακτυλίου ισούται με τη διαφορά των εμβαδών $E_1= \pi R^2$ και $E_2= \pi\rho^2$ των δύο κυκλικών δίσκων. Επομένως, $E = E_1 - E_2 = \pi R^2 - \pi\rho^2$.
Αφού $E = E_2$, θα έχουμε:
$\pi R^2 - \pi\rho^2 = \pi\rho^2$ ή $\pi R^2 = 2\pi\rho^2$ ή $R^2 = 2\rho^2$ ή $R^2 = 2(\sqrt{2})^2 = 4$.
Οπότε: $R = 2$ cm.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Μια πιτσαρία προσφέρει πίτσες κυκλικού σχήματος σε τρία μεγέθη: τη μικρή, τη μεσαία και τη μεγάλη. Η μικρή έχει διάμετρο 23 cm και κοστίζει 7 €. Η μεσαία έχει διάμετρο 28 cm και κοστίζει 8 € και 50 λεπτά. Η μεγάλη έχει διάμετρο 33 cm και κοστίζει 11 € και 90 λεπτά. Ποια από τις τρεις πίτσες συμφέρει από άποψη τιμής;

Λύση: Για να συγκρίνουμε τις 3 πίτσες, αρκεί να βρούμε το κόστος τού 1 cm^2 για κάθε πίτσα.

Η μικρή έχει εμβαδόν: $E_1 = \pi\rho_1^2 = \pi \cdot \left(\frac{23}{2}\right)^2 = 415{,}27$ (cm^2).

Η μεσαία έχει εμβαδόν: $E_2 = \pi\rho_2^2 = \pi \cdot 14^2 = 615{,}44$ (cm^2).

Η μεγάλη έχει εμβαδόν: $E_3 = \pi\rho_3^2 = \pi \cdot \left(\frac{33}{2}\right)^2 = 854{,}87$ (cm^2).

Το κόστος του 1 cm^2 για κάθε πίτσα είναι:

Μικρή	$\frac{700}{415{,}27} = 1{,}69$ (λεπτά/cm^2)
Μεσαία	$\frac{850}{615{,}44} = 1{,}38$ (λεπτά/cm^2)
Μεγάλη	$\frac{1190}{854{,}87} = 1{,}39$ (λεπτά/cm^2)

Επομένως, συμφέρει να αγοράσουμε τη μεσαία πίτσα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Ένας κύκλος έχει εμβαδόν ίσο αριθμητικά με το μήκος του. Η ακτίνα του είναι ίση με:
Α: 4 Β: 2 Γ: 6 Δ: 5.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

2. Ένας κύκλος έχει μήκος L = 4 cm. Το εμβαδόν του είναι:
Α: 12 cm^2 Β: $\frac{4}{\pi}$ cm^2 Γ: 9 cm^2 Δ: 16 cm^2.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

3. Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου (Ο, ρ), τότε το εμβαδόν του:
Α: διπλασιάζεται Β: τριπλασιάζεται Γ: εξαπλασιάζεται Δ: εννιαπλασιάζεται.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ακτίνα ρ κύκλου	5 cm		2,5 cm	
Εμβαδόν κύκλου Ε		28,26 cm^2		942 cm^2

5. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

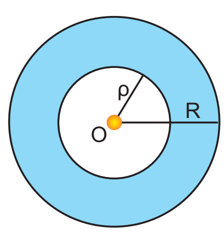
Ακτίνα ρ	Μήκος L	Εμβαδόν Ε
1 cm		
2 cm		
3 cm		
4 cm		
ρ cm		
2ρ cm		
3ρ cm		
4ρ cm		

Τι παρατηρείτε;

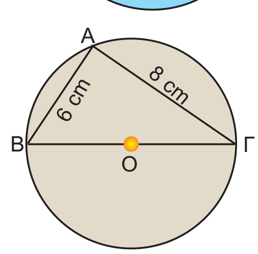
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Ένας κύκλος (Ο, ρ) έχει διάμετρο 10 cm. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου που έχει τετραπλάσια επιφάνεια από τον κύκλο (Ο, ρ).

2 Να βρείτε το εμβαδόν του μπλε κυκλικού δακτυλίου, αν ρ=2 cm και R=3 cm.



3 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου.



4 Ένας κύκλος έχει ακτίνα 10 cm. Να κατασκευάσετε κυκλικό δίσκο με διπλάσιο εμβαδόν.

5 Ένα τετράγωνο έχει πλευρά 3 cm. Να βρεθεί (κατά προσέγγιση) η ακτίνα ενός κυκλικού δίσκου που είναι ισοδύναμος (δηλαδή έχει το ίδιο εμβαδόν) με το τετράγωνο.

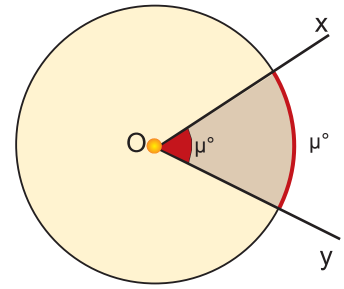
6 Λυγίζουμε ένα σύρμα μήκους 1,256 m, ώστε να σχηματίσει κύκλο. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου που αντιστοιχεί στο συρμάτινο κύκλο.

7 Να υπολογίσετε το εμβαδόν κυκλικού δίσκου που είναι περιγεγραμμένος σε τετράγωνο πλευράς α = 6 cm.

8 Ένας κυκλικός δίσκος έχει εμβαδόν 144π cm^2. Να βρείτε το μήκος του τόξου του κύκλου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 60°.

3.6. Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Ας θεωρήσουμε ένα κύκλο (Ο, ρ) και μια επίκεντρη γωνία $x\hat{O}y$ μέτρου μ°. Το μέρος του κυκλικού δίσκου που περιέχεται μέσα στη γωνία $x\hat{O}y$ λέγεται **κυκλικός τομέας γωνίας μ°** του κύκλου (Ο, ρ).



Αν η επίκεντρη γωνία $x\hat{O}y$ είναι μέτρου μ°, τότε και το αντίστοιχο τόξο της έχει μέτρο μ°, οπότε βρίσκουμε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα:

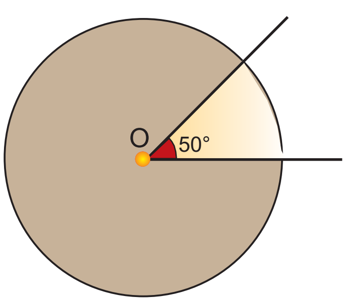
Τόξο σε μοίρες	360°	μ°
Εμβαδόν	$\pi\rho^2$	Ε

$$\frac{360}{\pi\rho^2} = \frac{\mu}{E} \quad \text{ή} \quad \boxed{E = \pi\rho^2 \cdot \frac{\mu}{360}}$$

Αν το τόξο έχει μετρηθεί σε ακτίνια και ισούται με α rad, τότε πάλι έχουμε:

Τόξο σε ακτίνα (rad)	2π	α
Εμβαδόν	$\pi\rho^2$	Ε

$$E = \pi\rho^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\rho^2\alpha}{2} \quad \text{ή} \quad \boxed{E = \frac{1}{2}\alpha\rho^2}$$



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Μια κυκλική πλατεία έχει ακτίνα ρ = 20 m. Ένας προβολέας είναι τοποθετημένος στο κέντρο της πλατείας και εκπέμπει μια δέσμη φωτός που φωτίζει ένα κυκλικό τομέα γωνίας 50°.

α) Να βρείτε το εμβαδόν της πλατείας.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που φωτίζεται.

Λύση

α) Το εμβαδόν της πλατείας είναι: $E = \pi\rho^2 = 3{,}14 \cdot 20^2 = 1256$ (m^2).

β) Γνωρίζουμε ότι όλη η πλατεία αντιστοιχεί σε τόξο 360° και έχει εμβαδόν 1256 m^2. Για να βρούμε το εμβαδόν ε του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί σε τόξο 50°, χρησιμοποιούμε την απλή μέθοδο των τριών, οπότε:

360°	50°
1256	ε

$$\frac{360}{1256} = \frac{50}{\varepsilon} \quad \text{ή} \quad \varepsilon = 1256 \cdot \frac{50}{360} = 174{,}44 \ (m^2).$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα στον στίβο της σφαιροβολίας ακτίνας ρ = 24 m και γωνίας 65°.

Λύση: Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα δίνεται από τον τύπο:

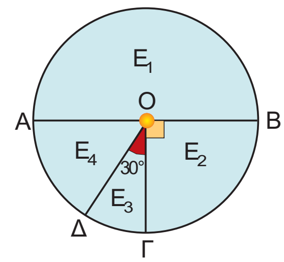
$$E = \pi\rho^2 \frac{\mu}{360} = 3{,}14 \cdot 24^2 \cdot \frac{65}{360} = 326{,}56 \ (m^2).$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ο παρακάτω κύκλος έχει διάμετρο ΑΒ και εμβαδόν 40 cm². Να υπολογίσετε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4.

Λύση: Έχουμε ότι:

$\Delta\hat{O}\Gamma = 30°$, $\Gamma\hat{O}B = 90°$ και $\Delta\hat{O}A = 90° - \Delta\hat{O}\Gamma = 90° - 30° = 60°$



Επομένως: $E_1 = (\pi\rho^2)\dfrac{180}{360} = 40 \cdot \dfrac{1}{2} = 20\ (cm^2).$

$E_2 = (\pi\rho^2)\dfrac{90}{360} = 40 \cdot \dfrac{1}{4} = 10\ (cm^2).$

$E_3 = (\pi\rho^2)\dfrac{30}{360} = 40 \cdot \dfrac{1}{12} = 3{,}33\ (cm^2).$

$E_4 = (\pi\rho^2)\dfrac{60}{360} = 40 \cdot \dfrac{1}{6} = 6{,}67\ (cm^2).$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

ακτίνα κύκλου	γωνία κυκλικού τομέα	εμβαδόν κυκλικού τομέα
$\rho = 2$ cm	$\mu = 60°$	
	$\mu = 45°$	$E = 8\pi$ cm²
$\rho = 3$ cm		$E = 3\pi$ cm²

2. Σ' έναν κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ = ... (cm) ο κυκλικός τομέας γωνίας 120° έχει μήκος τόξου 6π (cm) και εμβαδόν .... (cm²). Να συμπληρώσετε τα κενά.

3. Η ακτίνα ενός κύκλου είναι 12 cm. Ένας κυκλικός τομέας γωνίας 60° έχει εμβαδόν:
Α: 24π (cm²) Β: 36π (cm²) Γ: 54π (cm²) Δ: 108π (cm²).
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

4. Αν το εμβαδόν κυκλικού τομέα είναι 12,56 cm² και η γωνία του είναι 90°, η ακτίνα του κύκλου είναι: Α: 2 cm, Β: 4 cm, Γ: 9 cm, Δ: 7 cm.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

5. Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου (Ο, ρ), τότε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα του κύκλου:
Α: διπλασιάζεται Β: τριπλασιάζεται Γ: εξαπλασιάζεται Δ: εννιαπλασιάζεται.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

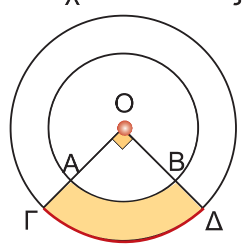
1 Να υπολογιστεί η γωνία κυκλικού τομέα που έχει εμβαδόν ίσο με το $\dfrac{1}{8}$ του εμβαδού του κύκλου.

2 Ένας κυκλικός τομέας γωνίας 30° έχει εμβαδόν 1 m². Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου.

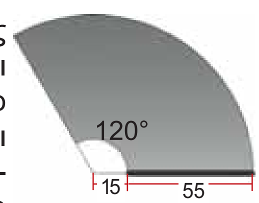
3 Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου είναι 1256 cm^2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα γωνίας 36°.

4 Το εμβαδόν κυκλικού τομέα γωνίας 45° είναι 20,25π cm^2. Να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου στον οποίο ανήκει ο τομέας.

5 Δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες $ρ_1$=3 cm και $ρ_2$=4 cm αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του σχήματος.

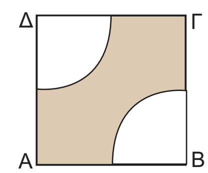


6 Ο υαλοκαθαριστήρας ενός αυτοκινήτου έχει μήκος 55 cm. Το σημείο περιστροφής απέχει από το λάστιχο καθαρισμού 15 cm. Αν ο υαλοκαθαριστήρας διαγράφει γωνία 120°, να υπολογίσετε την επιφάνεια που καθαρίζει.

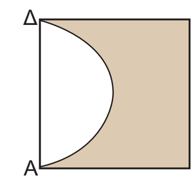


7 Να υπολογίσετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων καμπυλόγραμμων επιφανειών στα παρακάτω τετράγωνα:

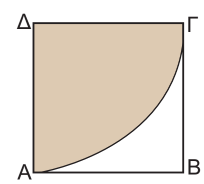
α) ΑΒ=ΒΓ=8 cm



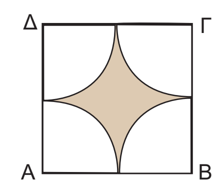
β) ΑΒ = 8 cm



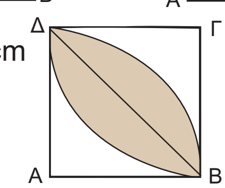
γ) ΑΒ = 8 cm



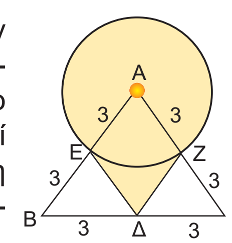
δ) ΑΒ = 8 cm



ε) ΑΒ = 8 cm



8 Να βρείτε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας στο σχήμα, αν οι αριθμοί εκφράζουν τα μήκη των αντίστοιχων τμημάτων σε cm.



Επανάληψη Κεφαλαίου 3

Μέτρηση Κύκλου

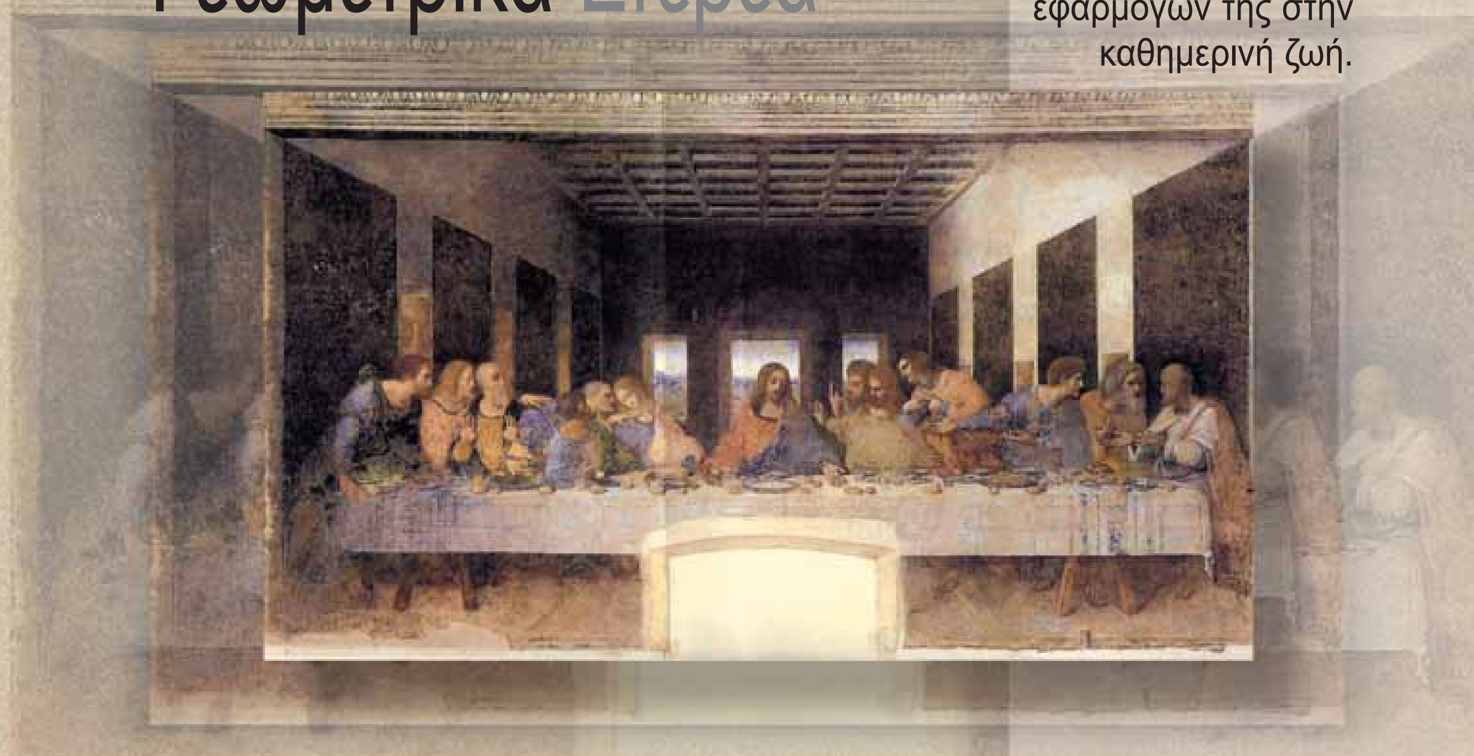
- **Εγγεγραμμένες γωνίες** ενός κύκλου που βαίνουν **στο ίδιο τόξο** ή σε **ίσα τόξα** είναι μεταξύ τους **ίσες**.
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.
- Κανονικό πολύγωνο: → **ίσες πλευρές**, → **ίσες γωνίες**
- Κεντρική γωνία κανονικού ν-γώνου: $ω = \dfrac{360°}{ν}$
- Γωνία κανονικού ν-γώνου: $φ = 180° - ω$
- Μήκος κύκλου: $\dfrac{L}{δ} = π$ ή $L = 2πρ$
- Μήκος τόξου: $\ell = 2πρ \cdot \dfrac{μ}{360}$ ή $\ell = αρ$
- Εμβαδό κυκλικού δίσκου: $Ε = πρ^2$
- Εμβαδό κυκλικού τομέα: $Ε = πρ^2 \cdot \dfrac{μ}{360}$ ή $Ε = \dfrac{αρ^2}{2}$

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Η Γεωμετρία του Χώρου αποτελεί ένα από τα πιο ενδιαφέροντα κεφάλαια, εξαιτίας των πολλών εφαρμογών της στην καθημερινή ζωή.

Γεωμετρικά Στερεά

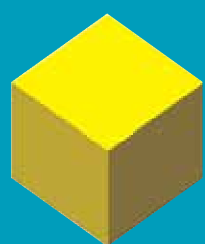


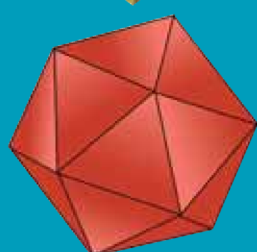
Μέτρηση Στερεών

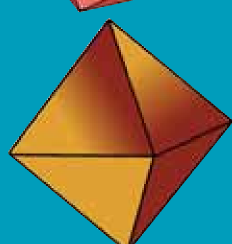
Θα μας απασχολήσει η μελέτη στερεών σωμάτων, όπως το πρίσμα, ο κύλινδρος, η πυραμίδα, ο κώνος και η σφαίρα. Θα εξετάσουμε τα στοιχεία τους και τη μέτρηση των επιφανειών τους και του όγκου τους

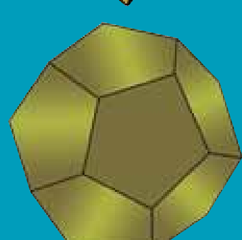
(Στερεομετρία).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ









Ο Χώρος

Ο φυσικός κόσμος στον οποίο ζούμε και όλα τα άψυχα αντικείμενα, καθώς και τα έμψυχα όντα που μας περιβάλλουν, αποτελούν τον «χώρο».
Τα σχήματα του χώρου διακρίνονται σε επίπεδα και στερεά και αποτελούνται από επιφάνειες, γραμμές και σημεία.
Οι επιφάνειες έχουν δύο διαστάσεις και διακρίνουν τα αντικείμενα μεταξύ τους, οι γραμμές έχουν μία διάσταση και τα σημεία καμία.
Η Γεωμετρία του χώρου είναι η επιστήμη που μελετά τα στερεά σώματα και τις ιδιότητές τους στον χώρο. Η Στερεομετρία ασχολείται με τη μέτρηση των όγκων των διαφόρων στερεών σχημάτων: των πρισμάτων, των κυλίνδρων, της σφαίρας κ.ο.κ.
Ο χώρος έχει τρεις διαφορετικές διαστάσεις: μήκος, πλάτος και ύψος και εκτείνεται απεριόριστα. *Οι Πυθαγόρειοι μελέτησαν τη σφαίρα και κάποια κανονικά πολύεδρα, αλλά οι Πλατωνιστές ήταν αυτοί που ασχολήθηκαν εκτεταμένα με τα κανονικά πολύεδρα.*
Το τετράεδρο, ο κύβος, το οκτάεδρο, το εικοσάεδρο και το δωδεκάεδρο ονομάζονται Πλατωνικά Στερεά. Ονομάζονται επίσης και Κοσμικά Στερεά, καθώς στη Φιλοσοφία του Πλάτωνα συμβόλιζαν αντίστοιχα την φωτιά, τη γη, το νερό, τον αέρα και την «πέμπτη ουσία» (quinta essentia).
Η μελέτη του κύβου, του τετράεδρου και του δωδεκάεδρου πρέπει να έγινε από τους Πυθαγόρειους· ο Θεαίτητος μελέτησε το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο, ενώ ο Εύδοξος θεμελίωσε τη μέτρησή τους.
Η Στερεομετρία *αποτελεί σημαντικό μέρος της καθημερινής μας ζωής: από μία απλή παραγγελία ταπετσαρίας για το δωμάτιό μας έως το σχεδιασμό κτιρίων στην Αρχιτεκτονική. Δεν είναι όμως και λίγες οι επιδράσεις της στην Τέχνη: ζωγραφική, γλυπτική κ.ά.*
Η εξαιρετική χρήση της αίσθησης του χώρου μέσα από τη Γεωμετρία έγινε φανερή κατά την Αναγέννηση. Η Αναγέννηση διέθετε δύο βασικά χαρακτηριστικά: την έμφαση στο σχήμα και την έμφαση στο χρώμα. Ο μόνος, ίσως, ζωγράφος που έφθασε στο ανώτατο επίπεδο και στα δύο ήταν ο Leonardo da Vinci, ο οποίος έδωσε στην Επιπεδομετρία και τη Στερεομετρία μια διάσταση άγνωστη στις προηγούμενες γενιές. Ο «Μυστικός Δείπνος» του da Vinci στην εκκλησία Santa Maria della Grazie στο Μιλάνο είναι ένα έξοχο δείγμα της χρήσης των γνώσεων Στερεομετρίας στην Τέχνη και εκπλήσσει με την άμεση αίσθηση του χώρου που δίνει στο θεατή.
Η Γεωμετρία του χώρου *βρίσκει σημαντικές εφαρμογές και σε άλλες επιστήμες. Στη Βιολογία και στην Ιατρική η μελέτη του εγκεφάλου ή και άλλων οργάνων του σώματος γίνεται με έντονη την παρουσία εννοιών της Στερεομετρίας. Στη Χημεία η δομική ταξινόμηση των οργανικών ενώσεων γίνεται με ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων της Στερεομετρίας. Στη Σεισμολογία, οι προσομοιώσεις των κινήσεων των τεκτονικών πλακών ακολουθούν «γεωμετρικούς κανόνες» στο χώρο.*
Οι εφαρμογές της Γεωμετρίας του Χώρου είναι πολλές αναδεικνύοντας τη γνώση της Στερεομετρίας σε ένα αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινής μας ζωής, της Τέχνης και της Επιστήμης.