



## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Για τους  $x, y$  ισχύει:  $y = \sqrt{x}$ . Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

	A	B	Γ
α) Ο $x$ είναι:	θετικός ή μηδέν	αρνητικός ή μηδέν	οποιοσδήποτε αριθμός
β) Ο $y$ είναι:	θετικός ή μηδέν	αρνητικός ή μηδέν	οποιοσδήποτε αριθμός
γ) Ισχύει η σχέση:	$x^2 = y$	$y^2 = x$	$x^2 = y^2$

2. Η εξίσωση  $x^2 = 16$  έχει λύσεις:  
Α: μόνο το 4      Β: μόνο το  $-4$       Γ: το 4 και το  $-4$ .

3. Στον διπλανό πίνακα να αντιστοιχίσετε σε κάθε αριθμό της στήλης Α την τετραγωνική του ρίζα που βρίσκεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
9	16
	3
16	2
	8
4	5
25	18
	6
36	4

4. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:
- α)  $\sqrt{16} = 8$       β)  $\sqrt{4} = 16$   
 γ)  $\sqrt{9} = 3$       δ)  $\sqrt{0,4} = 0,2$   
 ε)  $\sqrt{-9} = -3$       στ) η  $\sqrt{0}$  δεν υπάρχει  
 ζ)  $\sqrt{4} = -2$       η)  $\sqrt{16+9} = 5$   
 θ)  $\sqrt{25-9} = 5-3 = 2$       ι)  $\sqrt{100} = 50$

5. Αν  $x$  είναι ένας θετικός αριθμός, στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

	A	B	Γ	Δ	Ε
1. Αν $\sqrt{x} = 5$ , τότε	$x = 10$	$x = 25$	$x = -25$	$x = 2,5$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
2. Αν $\sqrt{x} = 9$ , τότε	$x = 3$	$x = 81$	$x = 4,5$	$x = \pm 81$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
3. Αν $\sqrt{x} = -16$ , τότε	$x = 4$	$x = -4$	$x = 256$	$x = -8$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη
4. Αν $\sqrt{100} = x$	$x = 10$	$x = 50$	$x = 100$	$x = \pm 10$	η σχέση αυτή είναι αδύνατη



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες.

α)  $\sqrt{81}$ ,  $\sqrt{0,81}$ ,  $\sqrt{8100}$ .  
 β)  $\sqrt{4}$ ,  $\sqrt{0,04}$ ,  $\sqrt{400}$ ,  $\sqrt{40000}$   
 γ)  $\sqrt{121}$ ,  $\sqrt{1,21}$ ,  $\sqrt{12100}$ ,  $\sqrt{0,0121}$   
 δ)  $\sqrt{\frac{9}{4}}$ ,  $\sqrt{\frac{144}{25}}$ ,  $\sqrt{\frac{400}{49}}$ ,  $\sqrt{\frac{36}{121}}$ .

2. Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

α)  $\sqrt{36} =$       β)  $\sqrt{18+18} =$   
 γ)  $\sqrt{18 \cdot 18} =$       δ)  $(\sqrt{18})^2 =$

3. Να τοποθετήσετε σε κάθε τετράγωνο έναν κατάλληλο αριθμό, ώστε να ισχύει η αντίστοιχη ισότητα.

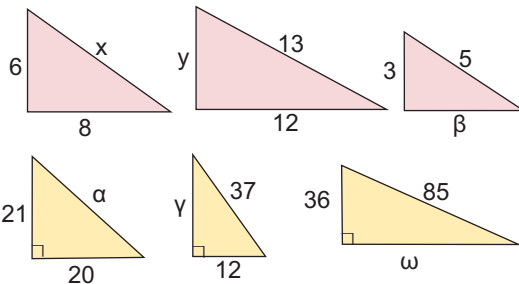
α)  $\sqrt{\frac{4}{\square}} = \frac{2}{3}$       β)  $(\sqrt{\square})^2 = 5$   
 γ)  $\sqrt{\square + 3} = 6$       δ)  $\sqrt{\square} + 2 = 11$   
 ε)  $2 - \sqrt{\square} = 0$       στ)  $(\sqrt{\square})^2 + \sqrt{\square} = 6$

4 Να αποδείξετε ότι:

α)  $\sqrt{\frac{\sqrt{4}}{2} + \sqrt{9}} = 2$       β)  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}} = 2$

γ)  $\sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}} = 3$

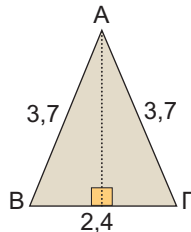
5 Να υπολογίσετε την άγνωστη πλευρά των παρακάτω ορθογωνίων τριγώνων.



6 Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς x που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

α)  $x^2 = 9$       β)  $x^2 = 25$   
 γ)  $x^2 = 64$       δ)  $x^2 = \frac{100}{81}$

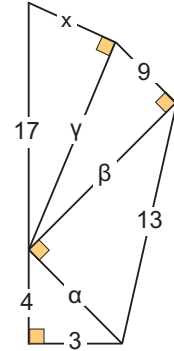
7 Να υπολογίσετε το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ του διπλανού σχήματος.



8 Να υπολογίσετε τη διαγώνιο ενός ορθογωνίου γηπέδου που έχει διαστάσεις 65 m και 72 m.

9 Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού, αν αυξηθεί κατά 8, γίνεται ίσο με το τριπλάσιο του τετραγώνου του αριθμού αυτού. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

10 Στο διπλανό σχήμα να βρείτε το μήκος x.



11 Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $\sqrt{a}$ ,  $a$ ,  $a^2$ , στις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

α) Αν  $a > 1$  π.χ.  $a = 4$ ,  $a = 9$ ,  $a = 16$ ...

β) Αν  $0 < a < 1$  π.χ.  $a = \frac{1}{4}$ ,  $a = \frac{1}{9}$ ,  $a = \frac{1}{16}$ , ...  
 Τι παρατηρείτε;

12 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a \cdot b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$
9	4				
36	49				

Τι συμπεραίνετε;

13 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$
4	16				
25	36				

Τι συμπεραίνετε;

14 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{a+b}$
9	16				
64	36				

Τι συμπεραίνετε;

1

## ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

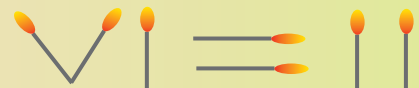
Ρώτησαν ένα μαθηματικό του 20ου αιώνα πόσων ετών είναι. Αυτός απάντησε ως εξής:

«Η τετραγωνική ρίζα του έτους που γεννήθηκα είναι ακριβώς ίση με τη σημερινή μου ηλικία».

Πόσων ετών ήταν, τότε γεννήθηκε και ποια χρονολογία έγινε η ερώτηση;

2

Μπορείτε να αλλάξετε τη θέση ενός μόνο σπέρτου, ώστε να προκύψει μια πλήρης ισότητα;



## 2.2. Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί

### Άρρητοι αριθμοί

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο λόγος δύο οποιωνδήποτε μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο φυσικών αριθμών. Στην πεποίθηση αυτή είχαν στηρίξει όλη την κοσμοθεωρία τους και προσπαθούσαν να επιλύσουν προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο.

Η πρώτη κρίση στα Μαθηματικά εμφανίστηκε όταν, σύμφωνα με την παράδοση, ο Ίππασος ο Μεταπόντιος (450 π.Χ. περίπου) «αποκάλυψε» τον «άρρητο»  $\sqrt{2}$ .

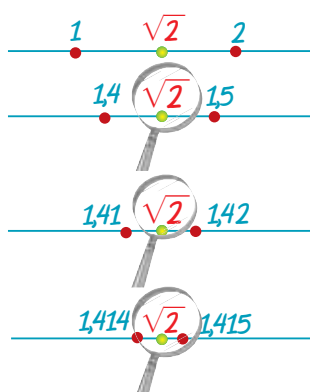
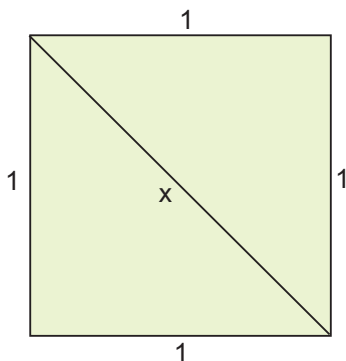
Σύντομα βρέθηκαν και άλλοι άρρητοι αριθμοί. Ο Εύδοξος ο Κνίδιος (407 - 354 π.Χ.) ήταν αυτός που έβγαλε τους Πυθαγόρειους από την κρίση θεμελιώνοντας ένα μεγάλο μέρος της μελέτης των άρρητων αριθμών.

Ας δούμε, όμως, πώς οδηγηθήκαμε στην ύπαρξη των αρρήτων. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς 1cm και θέλουμε να υπολογίσουμε τη διαγώνιο  $x$  του τετραγώνου. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:  $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ .

Στη συνέχεια, οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός  $\frac{\mu}{\nu}$ , τέτοιος ώστε,  $x = \frac{\mu}{\nu}$ . Αυτό σημαίνει ότι ο  $x$  δε μπορεί να είναι ούτε δεκαδικός ούτε περιοδικός δεκαδικός.

Γενικά:

Κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός, ονομάζεται **άρρητος αριθμός**.



Για να προσεγγίσουμε τον αριθμό  $x$ , παρατηρούμε διαδοχικά ότι:

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 < 2 < 2^2 = 4 \\ 1,96 &= 1,4^2 < 2 < 1,5^2 = 2,25 \\ 1,9881 &= (1,41)^2 < 2 < (1,42)^2 = 2,0164 \\ 1,9994 &= (1,414)^2 < 2 < (1,415)^2 = 2,0022 \\ 1,99996 &= (1,4142)^2 < 2 < (1,4143)^2 = 2,00024 \\ 1,9999899 &= (1,41421)^2 < 2 < (1,41422)^2 = 2,000018 \end{aligned}$$

Άρα: 

$$\begin{aligned} &\dots\dots\dots \\ 1 &< \sqrt{2} < 2 \\ 1,4 &< \sqrt{2} < 1,5 \\ 1,41 &< \sqrt{2} < 1,42 \\ 1,414 &< \sqrt{2} < 1,415 \\ 1,4142 &< \sqrt{2} < 1,4143 \\ 1,41421 &< \sqrt{2} < 1,41422 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Στην προηγούμενη παράγραφο συμβολίζαμε με  $\sqrt{a}$  τον θετικό αριθμό που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό  $a$ .

Επομένως, τον αριθμό  $x$  που προσπαθούμε να βρούμε έτσι ώστε  $x^2 = 2$ , μπορούμε να τον συμβολίζουμε με  $\sqrt{2}$ , αλλά δεν μπορούμε να τον υπολογίσουμε με ακρίβεια, παρά μόνο προσεγγιστικά. Αφού είναι άρρητος, δε μπορεί να γραφεί ως ρητός ή δεκαδικός με γνωστά ψηφία. Με τους προηγούμενους υπολογισμούς μπορούμε μόνο να προσεγγίσουμε τον  $\sqrt{2}$  ως εξής:

*Άρα:* 

Έχουμε:

με προσέγγιση χιλιοστού:  $\sqrt{2} = 1,414$

με προσέγγιση δεκάκισ χιλιοστού:  $\sqrt{2} = 1,4142$

με προσέγγιση εκατοντάκισ χιλιοστού:  $\sqrt{2} = 1,41421$  κ.ο.κ.

Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **ρητές προσεγγίσεις του αριθμού  $\sqrt{2}$** .

Αποδεικνύεται, επίσης, ότι και οι αριθμοί  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{6}$ ,  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{8}$ ,  $\sqrt{10}$ ,  $\sqrt{11}$ ,... είναι άρρητοι. Αργότερα, θα μάθουμε ότι υπάρχουν και άλλοι άρρητοι που δεν είναι ρίζες ρητών αριθμών, όπως ο γνωστός από τη μέτρηση του κύκλου αριθμός  $\pi$ .

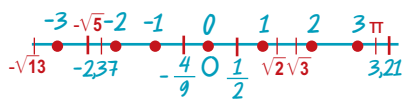
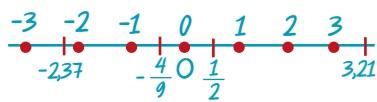
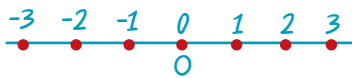
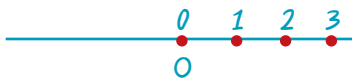
### Σχόλιο:

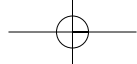
Τις τετραγωνικές ρίζες μπορούμε να τις προσεγγίσουμε με τη βοήθεια ενός μικροϋπολογιστή τσέπης ως εξής: Για να προσεγγίσουμε τον αριθμό  $\sqrt{2}$ , πατάμε διαδοχικά τα πλήκτρα  $\boxed{2}$  και  $\boxed{\sqrt{\quad}}$ , οπότε στην οθόνη βλέπουμε τον αριθμό 1,414213 που είναι μια προσέγγιση του  $\sqrt{2}$ , με έξι δεκαδικά ψηφία. Παλαιότερα, για τον υπολογισμό των ριζών χρησιμοποιούσαμε ειδικούς πίνακες.

## Πραγματικοί αριθμοί

Ας μελετήσουμε όλα τα σύνολα αριθμών που έχουμε συναντήσει.

- ▶ Οι φυσικοί αριθμοί: 0, 1, 2, 3, ... παριστάνονται στη διπλανή ευθεία με σημεία.  
Στην αρχή 0 έχουμε τοποθετήσει το μηδέν (0).
- ▶ Οι ακέραιοι αριθμοί: ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ... παριστάνονται πάλι με σημεία.  
Τοποθετούμε στα δεξιά της αρχής 0 τους θετικούς ακέραιους αριθμούς και στα αριστερά τους αρνητικούς.
- ▶ Το σύνολο των ρητών αριθμών, δηλαδή των αριθμών που μπορούν να γραφούν στη μορφή  $\frac{\mu}{\nu}$ , όπου  $\mu$  ακέραιος και  $\nu$  φυσικός αριθμός.  
Οι ρητοί αριθμοί έχουν γνωστή δεκαδική μορφή και γεμίζουν την ευθεία, αλλά όχι πλήρως.
- ▶ Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται όχι μόνο από τους ρητούς αλλά και όλους τους άρρητους. Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας. Για το λόγο αυτό, την ευθεία αυτή την ονομάζουμε **ευθεία ή άξονα των πραγματικών αριθμών**.





### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις του αριθμού  $\sqrt{13}$  έως και τρία δεκαδικά ψηφία.

**Λύση:** Με διαδοχικές δοκιμές έχουμε:

Επειδή  $3^2 = 9$  και  $4^2 = 16$  είναι  $3 < \sqrt{13} < 4$ .  
 Επειδή  $(3,6)^2 = 12,96$  και  $(3,7)^2 = 13,69$  είναι  $3,6 < \sqrt{13} < 3,7$ .  
 Επειδή  $(3,60)^2 = 12,960$  και  $(3,61)^2 = 13,032$  είναι  $3,60 < \sqrt{13} < 3,61$ .  
 Επειδή  $(3,605)^2 = 12,996$  και  $(3,606)^2 = 13,003$  είναι  $3,605 < \sqrt{13} < 3,606$ .  
 Άρα η ρητή προσέγγιση του  $\sqrt{13}$  είναι 3,605.

**Σχόλιο:** Για την ακρίβεια λέμε ότι  $\sqrt{13} = 3,605$  με έλλειψη και  $\sqrt{13} = 3,606$  με υπερβολή.

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Χρησιμοποιήστε ένα μικροϋπολογιστή τσέπης για να βρείτε με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων τις τετραγωνικές ρίζες: α)  $\sqrt{3}$ , β)  $\sqrt{50}$ , γ)  $\sqrt{72}$ , δ)  $\sqrt{1764}$ , ε)  $\sqrt{427}$ .

**Λύση:** Έχουμε ότι:

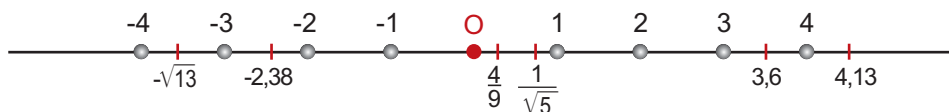
- α) Πατώντας διαδοχικά τα πλήκτρα και  $\boxed{3} \boxed{\sqrt{\quad}}$  στην οθόνη παρουσιάζεται ο αριθμός 1,7320508. Άρα, με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων ισχύει ότι:  
 $\sqrt{3} = 1,732$ .
- β) Ομοίως  $\sqrt{50} = 7,071$       γ) Ομοίως  $\sqrt{72} = 8,485$   
 δ) Ομοίως  $\sqrt{1764} = 42$       ε) Ομοίως  $\sqrt{427} = 20,664$

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να τοποθετήσετε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς:

$-4$ ,  $-2,38$ ,  $\frac{4}{9}$ ,  $-\sqrt{13}$ ,  $4,13$ ,  $3,6$ ,  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $1$ ,  $2$ .

**Λύση:** Μπορούμε να γράψουμε όλους τους αριθμούς σε δεκαδική μορφή χρησιμοποιώντας τις ρητές προσεγγίσεις δύο ψηφίων για τους άρρητους, οπότε έχουμε:



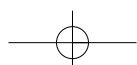
$$-4 < -\sqrt{13} = -3,61 < -3 < -2,38 < -2 < 0 < \frac{4}{9} = 0,4 < \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,45 < 1 < 2 < 3,6 < 4 < 4,13$$

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τον άρρητο αριθμό  $\sqrt{2}$ .

**Λύση:** Θεωρούμε τον άξονα των πραγματικών αριθμών και στο σημείο 1 φέρνουμε κάθετο τμήμα AB στον άξονα μήκους 1.

Το τρίγωνο OAB που σχηματίζεται είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



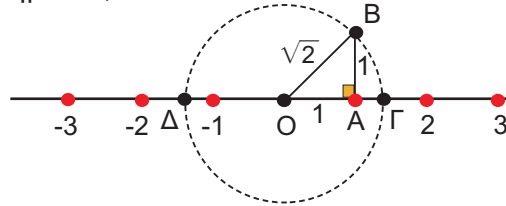
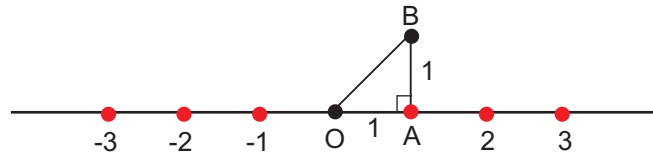
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \text{ ή}$$

$$OB = \sqrt{2}. \text{ Με κέντρο το } O \text{ και}$$

ακτίνα  $OB$  κατασκευάζουμε κύκλο

ο οποίος τέμνει τον άξονα στα σημεία  $\Gamma, \Delta$ .



Στο σημείο  $\Gamma$  βρίσκεται ο άρρητος  $\sqrt{2}$ , ενώ στο  $\Delta$  βρίσκεται ο άρρητος  $-\sqrt{2}$ .

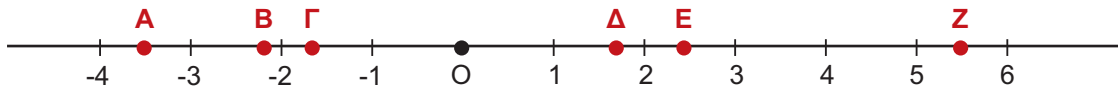


## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Αν τοποθετήσουμε τους αριθμούς στην ευθεία των πραγματικών, να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω ανισώσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες.

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ		ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
α) $4 < \sqrt{4,5} < 5$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	δ) $10 < \sqrt{21} < 11$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
β) $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ε) $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
γ) $7 < \sqrt{15} < 8$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	στ) $2 < \sqrt{7} < 3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2. Στον άξονα των πραγματικών αριθμών έχουμε τοποθετήσει τα σημεία  $A, B, \Gamma, \Delta, E$  και  $Z$ . Στις παρακάτω προτάσεις να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.



α) Ο αριθμός $\sqrt{3}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	A	E	$\Gamma$	$\Delta$
β) Ο αριθμός $\sqrt{6}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	$\Gamma$	$\Delta$	E	Z
γ) Ο αριθμός $-\sqrt{3}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	$\Gamma$	B	$\Delta$	A
δ) Ο αριθμός $-\sqrt{5}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο	$\Gamma$	$\Delta$	B	A



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιοι από τους επόμενους αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι;

α)  $\sqrt{2}, (\sqrt{2})^2$  β)  $-\sqrt{\frac{4}{9}}, \sqrt{\frac{4}{5}}$

γ)  $\sqrt{18}, \sqrt{\frac{18}{2}}, \sqrt{18^2}$

2. Τοποθετήστε σε μία σειρά από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

α)  $\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{3}, 1, \sqrt{2}$  β)  $\sqrt{5}, \sqrt{7}, 2, \sqrt{2}$

γ)  $1+\sqrt{3}, \sqrt{3}$  δ)  $\sqrt{2}, \sqrt{1+\sqrt{2}}$

3. Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις έως

και δύο δεκαδικά ψηφία των αριθμών:

α)  $\sqrt{3}$ , β)  $\sqrt{5}$ , γ)  $\sqrt{7}$ , δ)  $\sqrt{8}$ .

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

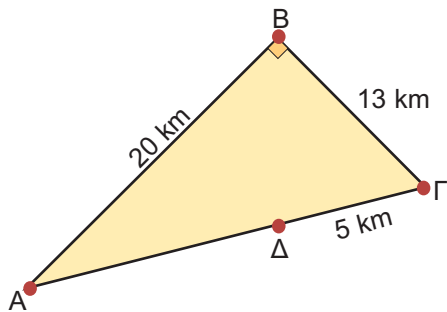
α)  $x^2 = 0$ , β)  $x^2 = 5$ , γ)  $x^2 = -3$ , δ)  $x^2 = 17$ .

5. Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν  $12 \text{ cm}^2$ . Να βρείτε με προσέγγιση εκατοστού το μήκος της πλευράς του.

6. Ένα τετράγωνο έχει διαγώνιο  $12 \text{ cm}$ . Να βρείτε: α) το μήκος της πλευράς του με προσέγγιση δύο δεκαδικών, β) την ακριβή τιμή του εμβαδού του.

## 2.3. Προβλήματα

Όπως γνωρίζουμε, δε μπορούμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια την τιμή ενός άρρητου αριθμού. Σε διάφορα όμως προβλήματα της πραγματικής ζωής συναντάμε άρρητους αριθμούς για τους οποίους χρησιμοποιούμε ρητές προσεγγίσεις δύο ή τριών δεκαδικών ψηφίων.



### Πρόβλημα 1

Κατά τη μετακίνηση από την πόλη Α στην πόλη Β, μετά στο χωριό Γ και από το χωριό Γ στο χωριό Δ, ο μετρητής του αυτοκινήτου κατέγραψε τις αποστάσεις  $AB = 20 \text{ km}$ ,  $BΓ = 13 \text{ km}$  και  $ΓΔ = 5 \text{ km}$ . Ποια είναι η απόσταση από το χωριό Δ στην πόλη Α;

#### Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\begin{aligned} AΓ^2 &= AB^2 + BΓ^2 \quad \text{ή} \quad AΓ^2 = 20^2 + 13^2 \quad \text{ή} \\ AΓ^2 &= 569 \quad \text{ή} \quad AΓ = \sqrt{569} \quad \text{ή} \\ AΓ &= 23,85 \text{ (km)} \text{ με προσέγγιση εκατοστού.} \end{aligned}$$

Επομένως,  $AΔ = AΓ - ΔΓ = 23,85 - 5 = 18,85 \text{ (km)}$ .

### Πρόβλημα 2

Μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι του διπλανού σχήματος;

#### Λύση

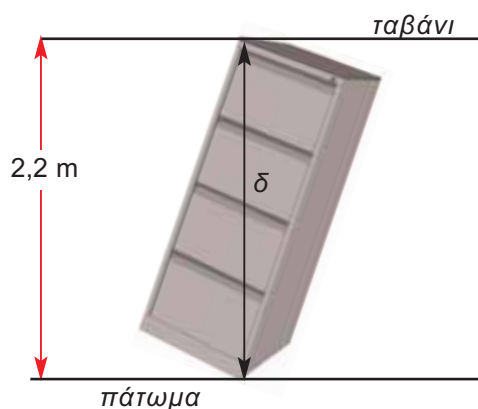
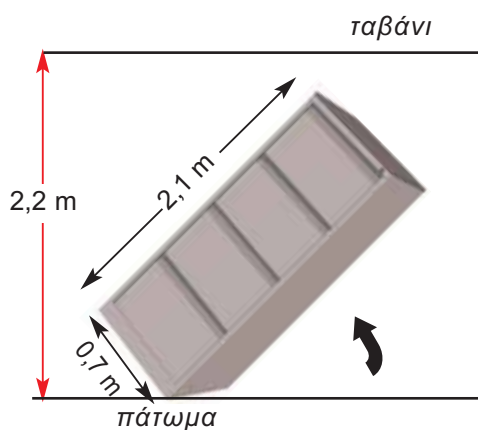
Αν η διαγώνιος δ είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με το ύψος 2,2 m του δωματίου, τότε μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:  
 $\delta^2 = 2,1^2 + 0,7^2 = 4,41 + 0,49 = 4,90$ .

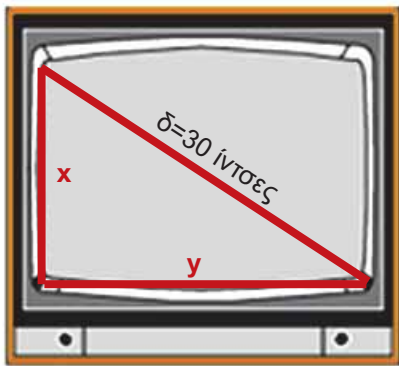
Άρα  $\delta = \sqrt{4,90} = 2,21 \text{ (m)}$  με προσέγγιση εκατοστού. Επομένως, δε μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι, γιατί  $\delta > 2,2 \text{ (m)}$ .

### Πρόβλημα 3

Η διαγώνιος της οθόνης της τηλεόρασης είναι 30 ίντσες και οι διαστάσεις της x, y έχουν λόγο  $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ . Να βρείτε τις διαστάσεις της τηλεόρασης.





**Λύση**

Αφού  $x$ ,  $y$  είναι οι διαστάσεις της οθόνης και 30 ίντσες η διαγώνιος, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι:  $x^2 + y^2 = 30^2$ .

Από τα δεδομένα έχουμε  $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ , οπότε

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 \quad \text{ή} \quad \frac{x^2}{y^2} = \frac{7}{16} \quad \text{ή} \quad x^2 = \frac{7}{16}y^2$$

και αντικαθιστώντας στο Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\frac{7}{16}y^2 + y^2 = 30^2 \quad \text{ή} \quad \frac{23}{16}y^2 = 30^2 \quad \text{ή}$$

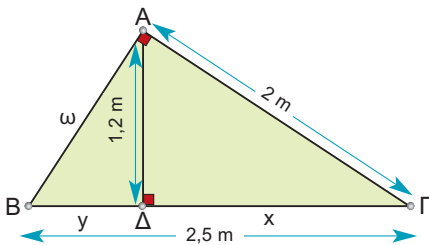
$$23y^2 = 14400 \quad \text{ή} \quad y^2 = \frac{14400}{23} \quad \text{ή}$$

$$y^2 = 626,08 \quad \text{ή} \quad y = 25,02 \text{ (ίντσες)}$$

$$\text{και } x = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot 25,02 = 16,55 \text{ (ίντσες)}.$$

**Πρόβλημα 4**

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο να υπολογίσετε τα μήκη  $x$ ,  $y$  και  $\omega$ .

**Λύση**

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2 \quad \text{ή}$$

$$2^2 = 1,2^2 + x^2 \quad \text{ή}$$

$$x^2 = 2^2 - 1,2^2 = 4 - 1,44 = 2,56.$$

$$\text{Άρα } x = \sqrt{2,56} = 1,6 \text{ (m)}.$$

$$\text{Επίσης } ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ \quad \text{ή}$$

$$2,5 = y + 1,6 \quad \text{ή}$$

$$y = 2,5 - 1,6 = 0,9 \text{ (m)}.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2 \quad \text{ή}$$

$$\omega^2 = 1,2^2 + 0,9^2 = 1,44 + 0,81 = 2,25.$$

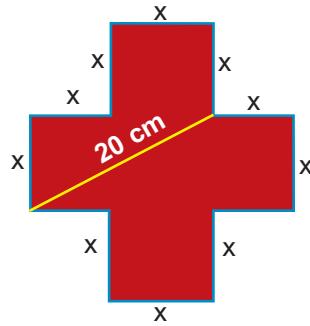
$$\text{Άρα } \omega = \sqrt{2,25} = 1,5 \text{ (m)}.$$



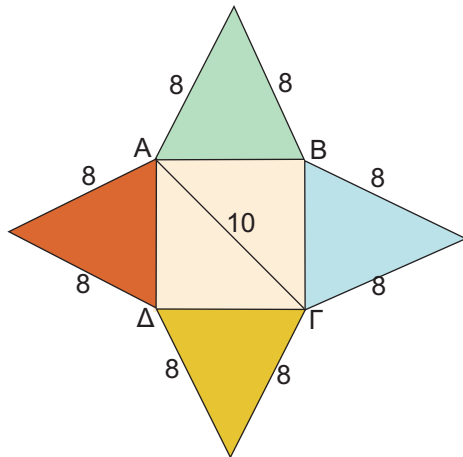
## ΑΣΚΗΣΕΙΣ



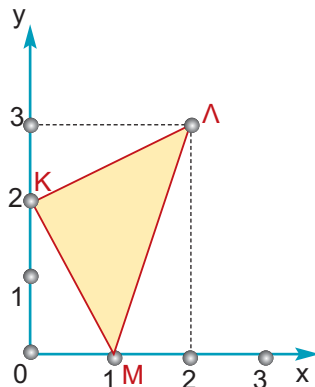
- 1 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σταυρού του σχήματος.



- 2 Το ανάπτυσμα σε χαρτόνι μιας πυραμίδας αποτελείται από το τετράγωνο ΑΒΓΔ, που η διαγώνιάς του είναι 10 cm και τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα που οι ίσες πλευρές τους είναι 8 cm. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας της πυραμίδας.



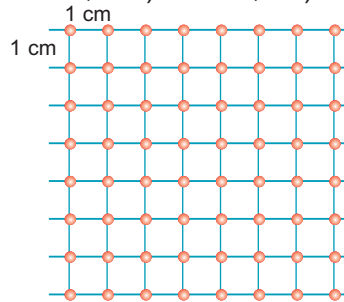
- 3 Οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου ΚΛΜ είναι Κ(0,2), Λ(2,3), Μ(1,0). Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.



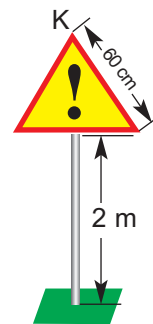
- 4 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 12 cm. Αν Ε είναι το μέσο της διαμέσου του ΑΔ, να υπολογίσετε το μήκος ΒΕ.

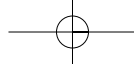
- 5 Δύο πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκος 10 cm και 8 cm αντίστοιχα. Να βρεθεί η τρίτη πλευρά του, ώστε το τρίγωνο να είναι ορθογώνιο. (Υπόδειξη: Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις).

- 6 Οι κουκκίδες του παρακάτω σχήματος απέχουν 1 cm οριζόντια και κατακόρυφα.
- α) Να ενώσετε δύο κουκκίδες, ώστε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που σχηματίζεται να είναι:  
i)  $\sqrt{2}$  cm, ii)  $\sqrt{5}$  cm, iii)  $\sqrt{13}$  cm.
- β) Να ενώσετε τέσσερις κουκκίδες, ώστε να σχηματιστεί ένα τετράγωνο με εμβαδόν:  
i) 2 cm<sup>2</sup>, ii) 5 cm<sup>2</sup>, iii) 13 cm<sup>2</sup>.



- 7 Το σήμα της φωτογραφίας έχει σχήμα ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά 60 cm και στηρίζεται σε κολόνα ύψους 2 m. Να βρείτε την απόσταση της κορυφής Κ της πινακίδας από το έδαφος.

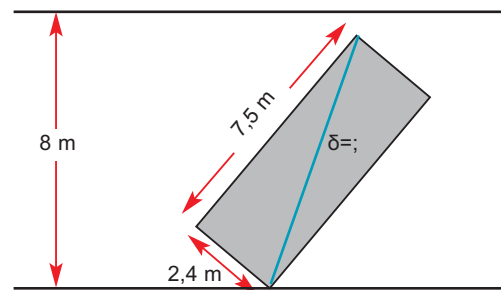
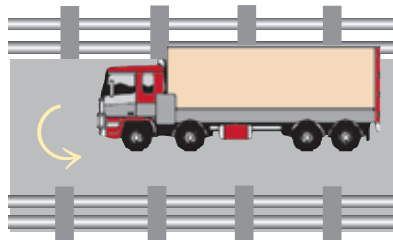




- 8 Τα βέλη στην άσφαλτο αποτελούνται από ένα κίτρινο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και από ένα κίτρινο ισοσκελές τρίγωνο. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι 20 cm και 2,3 m. Το τρίγωνο έχει βάση 60 cm και ίσες πλευρές 2,1 m. Πόσα περίπου τέτοια βέλη μπορούμε να βάψουμε με 1 κιλό κίτρινου χρώματος το οποίο μπορεί να καλύψει επιφάνεια 540 dm<sup>2</sup>;



- 9 Οι μπάρες που είναι τοποθετημένες στις δύο άκρες του δρόμου απέχουν μεταξύ τους 8 m. Ένα φορτηγό έχει περίγραμμα ορθογωνίου με μήκος 7,5 m και πλάτος 2,4 m. Είναι δυνατόν ο οδηγός του να εκτελέσει ελιγμούς, ώστε το φορτηγό να κάνει αναστροφή;



## Επανάληψη Κεφαλαίου 2



### Πραγματικοί αριθμοί

#### Τετραγωνική ρίζα

ενός θετικού αριθμού  $\alpha$ , λέγεται ένας θετικός αριθμός ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό  $\alpha$ . Συμβολίζεται με  $\sqrt{\alpha}$ .

#### Ιδιότητες

Αν  $\sqrt{\alpha} = x$ , τότε  $x^2 = \alpha$ , όπου οι αριθμοί  $\alpha$  και  $x$  είναι θετικοί ή ίσοι με μηδέν.

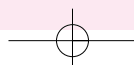
Επομένως:  $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$

#### Άρρητοι αριθμοί

ονομάζονται οι αριθμοί οι οποίοι δεν είναι ρητοί, δηλαδή δε μπορούν να γραφούν στη μορφή  $\frac{\mu}{\nu}$ , με  $\mu, \nu$  ακέραιους και  $\nu \neq 0$ .

#### Πραγματικοί αριθμοί

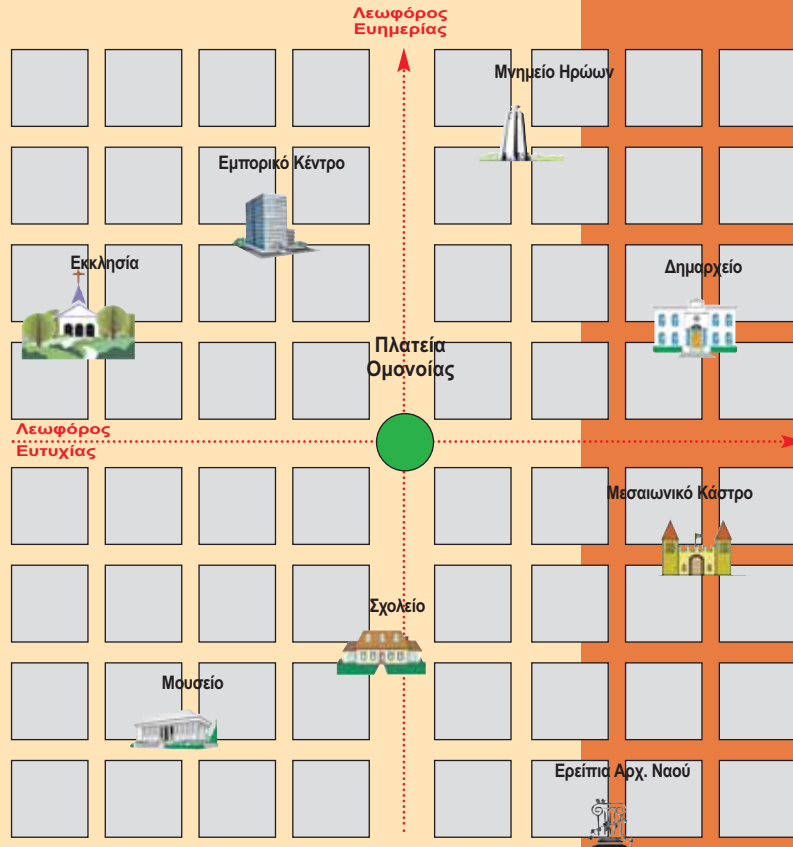
ονομάζονται όλοι οι ρητοί και όλοι οι άρρητοι αριθμοί.



# ΜΕΡΟΣ Α'

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

## Συναρτήσεις



## ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

**3.1** Η έννοια  
της συνάρτησης

**3.2** Καρτεσιανές  
συντεταγμένες.  
Γραφική παράσταση  
συνάρτησης

**3.3** Η συνάρτηση  $y = ax$

**3.4** Η συνάρτηση  
 $y = ax + \beta$

**3.5** Η συνάρτηση  $y = \frac{\alpha}{x}$ .  
Η υπερβολή

**Η** συνάρτηση αποτελεί  
θεμελιώδη έννοια των

*Μαθηματικών και*

*χρησιμοποιείται σε όλες τις*

*θετικές επιστήμες.*

*Στο κεφάλαιο αυτό θα*

*προσπαθήσουμε να*

*κατανοήσουμε την έννοια της*

*συνάρτησης και*

*θα μελετήσουμε τη γραφική*

*παράσταση συναρτήσεων σε*

*καρτεσιανές συντεταγμένες.*

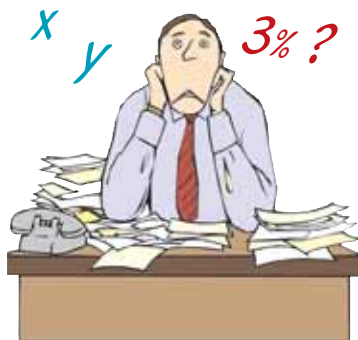
*Θα εξετάσουμε έτσι τις*

*συναρτήσεις που αντιστοιχούν*

*στις γραφικές παραστάσεις της*

*ευθείας και της υπερβολής.*

## 3.1. Η έννοια της συνάρτησης



### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Κατά καιρούς ακούμε στην τηλεόραση για τις αυξήσεις στους μισθούς των εργαζομένων. Αυτή τη χρονιά ανακοινώθηκε αύξηση 3%.

- α) Δύο εργαζόμενοι έχουν μισθούς 800 € και 1100 € το μήνα. Πόση είναι η αύξηση που θα πάρει ο καθένας;  
β) Ένας εργαζόμενος έχει μισθό  $x$  €. Ποια είναι η αύξηση  $y$  που θα πάρει εφέτος;

### Λύση

α) Η αύξηση θα είναι:

$$\text{για τον πρώτο εργαζόμενο: } \frac{3}{100} \cdot 800 = 3 \cdot 8 = 24 \text{ €},$$

$$\text{για τον δεύτερο εργαζόμενο: } \frac{3}{100} \cdot 1100 = 3 \cdot 11 = 33 \text{ €}.$$

β) Η αύξηση θα είναι:  $\frac{3}{100} \cdot x = 0,03x$  δηλαδή  $y = 0,03x$ .

### Παρατήρηση:

Η σχέση  $y = 0,03x$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για άλλες τιμές της μεταβλητής  $x$ . Αν, για παράδειγμα, ένας εργαζόμενος έχει μισθό  $x = 700$  €, η αύξηση που θα πάρει θα είναι  $y = 0,03 \cdot 700 = 21$  €. Ομοίως, για  $x = 1500$  βρίσκουμε αύξηση  $y = 0,03 \cdot 1500 = 45$  €.

Με τη σχέση αυτή κάθε τιμή της μεταβλητής  $x$  (παλιός μισθός), αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής  $y$  (αύξηση). Μια τέτοια σχέση στα Μαθηματικά λέγεται **συνάρτηση**.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι «η μεταβλητή  $y$  εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής  $x$ ». Έτσι, μπορούμε να λέμε απλά ότι έχουμε ορίσει τη συνάρτηση  $y = 0,03x$ .

### Πίνακας Τιμών

Η αντιστοιχία μεταξύ των τιμών των μεταβλητών  $x$  και  $y$  φαίνεται καλύτερα με τη βοήθεια του πίνακα τιμών. Έτσι, για τη συνάρτηση  $y = 0,03x$  έχουμε:

$$\text{Για } x = 700, \quad y = 0,03 \cdot 700 = 21.$$

$$\text{Για } x = 800, \quad y = 0,03 \cdot 800 = 24.$$

$$\text{Για } x = 900, \quad y = 0,03 \cdot 900 = 27.$$

$$\text{Για } x = 1000, \quad y = 0,03 \cdot 1000 = 30.$$

$$\text{Για } x = 1100, \quad y = 0,03 \cdot 1100 = 33.$$

Τα ζεύγη των τιμών αυτών παρουσιάζονται στον διπλανό πίνακα, ο οποίος λέγεται **πίνακας τιμών** της συνάρτησης  $y = 0,03x$ .

<b>x</b>	700	800	900	1000	1100
<b>y</b>	21	24	27	30	33

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1**

Δίνεται η συνάρτηση  $y = 2x + 3$ . Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1	0	1	2
y					

- Λύση:** Για  $x = -2$ :  $y = 2 \cdot (-2) + 3 = -4 + 3 = -1$ .  
 Για  $x = -1$ :  $y = 2 \cdot (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$ .  
 Για  $x = 0$ :  $y = 2 \cdot 0 + 3 = 3$ .  
 Για  $x = 1$ :  $y = 2 \cdot 1 + 3 = 2 + 3 = 5$ .  
 Για  $x = 2$ :  $y = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$ .

Άρα, ο πίνακας τιμών είναι:

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	1	3	5	7

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2**

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει υπολογίσει ότι από κάθε κιλό ελιάς που πηγαίνει στο ελαιοτριβείο, παίρνει 0,2 κιλά λάδι.

- Πόσα κιλά λάδι θα πάρει από παραγωγή 500 κιλών ελιών;
- Να εκφράσετε την ποσότητα  $y$  σε κιλά του λαδιού, που θα πάρει, ως συνάρτηση της ποσότητας  $x$  των ελιών που παράγει.
- Πόσα κιλά ελιές πρέπει να παράγει, ώστε να πάρει 250 κιλά λάδι;



- Λύση:** α) Αφού από 1 κιλό ελιές παίρνει 0,2 κιλά λάδι, από 500 κιλά ελιές θα πάρει  $0,2 \cdot 500 = 100$  κιλά λάδι.  
 β) Από  $x$  κιλά ελιές θα πάρει  $0,2x$  κιλά λάδι. Δηλαδή  $y = 0,2x$ .  
 γ) Από τη συνάρτηση  $y = 0,2x$ , για  $y = 250$  κιλά λάδι έχουμε:  $250 = 0,2x$   
 ή  $x = \frac{250}{0,2} = 1250$ . Άρα, θα πρέπει να παράγει 1250 κιλά ελιές.

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ**

- Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρείας αυξάνονται κατά 20 € ο καθένας. Η σχέση που εκφράζει το νέο μισθό  $y$  ως συνάρτηση του παλιού μισθού  $x$ , είναι:
  - $y = 20x$
  - $y = x + 20$
  - $y = \frac{x}{20}$
  - $y = 0,2x$
- Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρείας αυξάνονται κατά 15%. Η σχέση που εκφράζει το νέο μισθό  $y$  ως συνάρτηση του παλιού μισθού  $x$ , είναι:
  - $y = x + \frac{15}{100}$
  - $y = x + 15$
  - $y = 1,15x$
  - $y = 0,15x$
- Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με πλευρές  $x$  και  $y$  είναι  $100 \text{ cm}^2$ . Η σχέση που εκφράζει το μήκος του  $y$  ως συνάρτηση του  $x$ , είναι:
  - $y = 100x$
  - $y = 100 + x$
  - $y = \frac{100}{x}$
  - $y = 100 - x$

4. Δίνεται τετράγωνο πλευράς  $x$ . Η σχέση που εκφράζει το εμβαδόν  $E$  του τετραγώνου ως συνάρτηση του  $x$  είναι:

α)  $E = 2x$       β)  $E = x^2$       γ)  $E = \sqrt{2x^2}$       δ)  $E = 4x$

5. Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις της στήλης Α του διπλανού πίνακα με τον πίνακα τιμών της στήλης Β.

(Στη στήλη Β ένας πίνακας τιμών περισεύει.)

ΣΤΗΛΗ Α		ΣΤΗΛΗ Β						
(α) $y = 2x + 1$		i)	x	-3	-1	0	1	2
			y	10	2	1	2	5
(β) $y = x^2 + 1$		ii)	x	-3	-1	0	1	2
			y	-5	-1	1	3	5
(γ) $y = 1 - x$		iii)	x	-3	-1	0	1	2
			y	4	2	1	0	-1
		iv)	x	-3	-1	0	1	2
			y	4	2	1	0	2



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α)  $y = 3x - 2$

x	-3	-2	-1	0	2
y					

β)  $y = \frac{x-1}{2}$

x	-1	0	2	4	5
y					

2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α)  $y = x^2 + 1$

x	-3	-1	0	2	5
y					

β)  $y = x^2 + 3x - 2$

x	-3	-2	0	1	3
y					

3. Οι τιμές ενός καταστήματος ηλεκτρονικών επιβαρύνονται με φόρο 8%. Να εκφράσετε τις τιμές  $y$  με φόρο, ως συνάρτηση των τιμών  $x$  χωρίς φόρο.

4. Ένας πωλητής παίρνει μισθό 600 € το μήνα και ποσοστό 7% επί του ποσού των πωλήσεων που πραγματοποιεί. Να εκφράσετε το συνολικό ποσό  $y$ , που κερδίζει το μήνα, ως συνάρτηση του ποσού  $x$  των πωλήσεων που πραγματοποιεί.

5. Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές με μήκη  $x$  και  $y$  (σε cm).

- α) Αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 60 cm, να εκφράσετε την πλευρά  $y$  ως συνάρτηση της πλευράς  $x$ .

- β) Αν το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 100 cm<sup>2</sup>, να εκφράσετε την πλευρά  $y$  ως συνάρτηση της πλευράς  $x$ .

6. Ένα τετράγωνο έχει πλευρά με μήκος  $x$  (σε cm). Να εκφράσετε το εμβαδόν  $E$  και την περίμετρο  $\Pi$  του τετραγώνου ως συναρτήσεις του  $x$ . Στη συνέχεια, να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

x	1	2	2,5	5	0,3
E					
\Pi					

7. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης  $y = 3x - 5$ :

x	2		-3	
y		7		-2

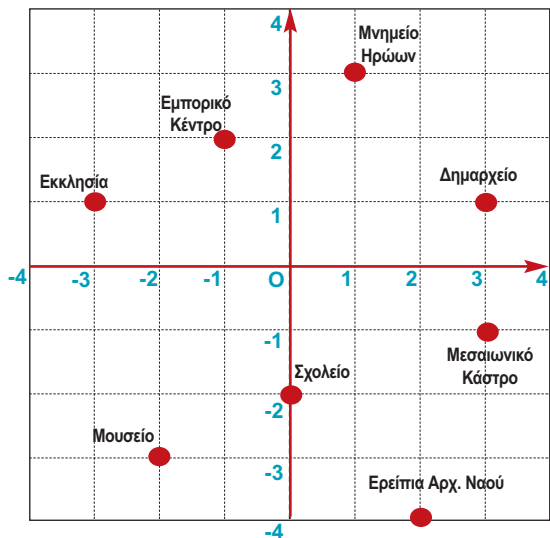
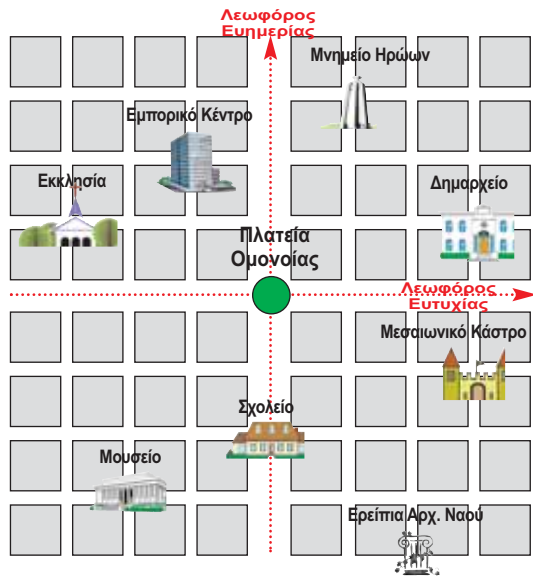
8. Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 70 χιλιόμετρα την ώρα.

- α) Πόση απόσταση θα έχει διανύσει σε 2 ώρες και πόση σε 5 ημέρες;

- β) Να εκφράσετε την απόσταση  $S$  (σε χιλιόμετρα) που θα έχει διανύσει το αυτοκίνητο ως συνάρτηση του χρόνου  $t$  (σε ώρες).



## 3.2. Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης



### Λύση

Ξεκινώντας από την Ομόνοια (Ο) έχουμε:

- ❖ Μνημείο Ηρώων: 1 τετράγωνο δεξιά και 3 πάνω, άρα (1, 3).
- ❖ Εμπορικό Κέντρο: 1 τετράγωνο αριστερά και 2 πάνω, άρα (-1, 2).
- ❖ Μουσείο: 2 τετράγωνα αριστερά και 3 κάτω, άρα (-2, -3).
- ❖ Σχολείο: 0 τετράγωνα αριστερά (ή δεξιά) και 2 κάτω, άρα (0, -2).
- ❖ Ερείπια Αρχ. Ναού: 2 τετράγωνα δεξιά και 4 κάτω, άρα (2, -4).
- ❖ Μεσαιωνικό Κάστρο: 3 τετράγωνα δεξιά και 1 κάτω, άρα (3, -1).

### Σύστημα συντεταγμένων

Στην παραπάνω δραστηριότητα διαπιστώσαμε ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση οποιουδήποτε σημείου της πόλης χρησιμοποιώντας δύο βασικούς οδικούς άξονες: τις Λεωφόρους Ευθυχίας και Ευημερίας.

### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα χάρτη μιας πόλης στον οποίο φαίνονται οι δύο κεντρικές οδικές αρτηρίες της πόλης και μερικά οικοδομικά τετράγωνα.

Έχουν, επίσης, σημειωθεί μερικά βασικά σημεία της πόλης, όπως η Ομόνοια (κεντρική πλατεία και σημείο διασταύρωσης των δύο βασικών λεωφόρων), το Δημαρχείο, το Εμπορικό Κέντρο, κ.τ.λ.

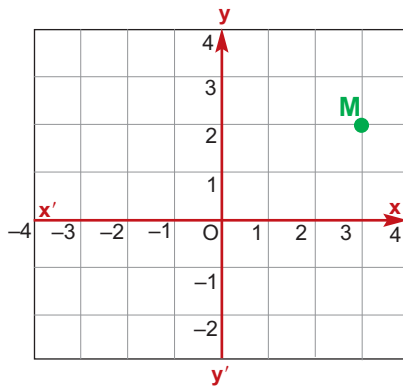
Για να επισκεφθούμε κάποιο από αυτά τα σημεία (π.χ. το Δημαρχείο), ξεκινώντας από την Ομόνοια πρέπει να κινηθούμε τρία τετράγωνα προς τα δεξιά πάνω στη Λεωφόρο Ευθυχίας και ένα τετράγωνο προς τα πάνω παράλληλα προς τη Λεωφόρο Ευημερίας.

Δηλαδή, η θέση του Δημαρχείου προσδιορίζεται επακριβώς από το ζεύγος των αριθμών (3, 1).

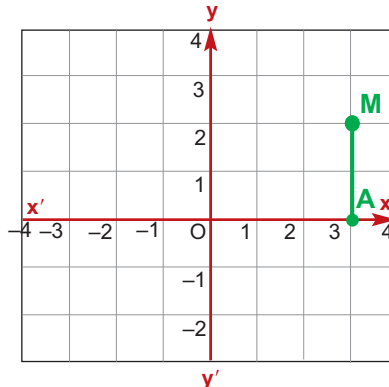
Ομοίως, η θέση της Εκκλησίας προσδιορίζεται από το ζεύγος των αριθμών (-3, 1). Δηλαδή για να πάμε στην εκκλησία ξεκινώντας από την Ομόνοια, πρέπει να κινηθούμε τρία τετράγωνα προς τα αριστερά στη Λεωφόρο Ευθυχίας και ένα τετράγωνο προς τα πάνω, παράλληλα προς την Λεωφόρο Ευημερίας.

Να χρησιμοποιήσετε το διπλανό διάγραμμα (που είναι ένας πιο απλός χάρτης της ίδιας πόλης), για να προσδιορίσετε τη θέση και των άλλων βασικών σημείων της πόλης που φαίνονται στο χάρτη.

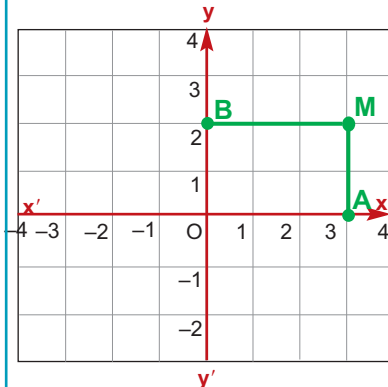
Την ιδέα αυτή μπορούμε να την εφαρμόσουμε γενικότερα για να προσδιορίσουμε τη θέση οποιουδήποτε σημείου του επιπέδου, ως εξής:



1. Σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ , με κοινή αρχή  $O$  και ίδιες μονάδες μέτρησης καθώς και ένα σημείο  $M$ .



2. Από το  $M$  φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα  $y'y$  που τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $A$ . Για το σχήμα μας το  $A$  αντιστοιχεί στον αριθμό 3 του άξονα  $x'x$ .



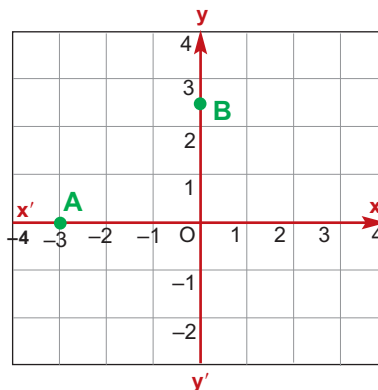
3. Από το  $M$  φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$  που τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $B$ . Για το σχήμα μας το  $B$  αντιστοιχεί στον αριθμό 2 του άξονα  $y'y$ .

Δηλαδή, το σημείο  $M$  αντιστοιχεί στο ζεύγος των αριθμών  $(3, 2)$  και συμβολίζεται  $M(3, 2)$ . Ο πρώτος από αυτούς τους αριθμούς λέγεται **τετμημένη** του σημείου  $M$  και ο δεύτερος λέγεται **τεταγμένη** του σημείου  $M$ .

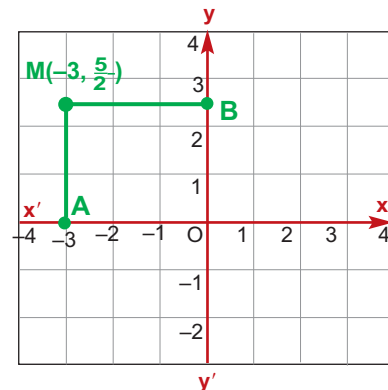
Η τετμημένη και η τεταγμένη του  $M$  λέγονται **συντεταγμένες** του σημείου  $M$ .

Αλλά και αντιστρόφως, αν έχουμε ένα σύστημα αξόνων στο επίπεδο και ένα ζεύγος αριθμών π.χ. το  $(-3, \frac{5}{2})$ ,

μπορούμε να βρούμε ένα μόνο σημείο  $M$  του επιπέδου που αντιστοιχεί στο ζεύγος αυτό ως εξής:



1. Σημειώνουμε με  $A$  το σημείο του άξονα  $x'x$  που αντιστοιχεί στον αριθμό  $-3$  και με  $B$  το σημείο του άξονα  $y'y$  που αντιστοιχεί στον αριθμό  $\frac{5}{2}$ .



2. Από τα σημεία  $A$  και  $B$  φέρνουμε παράλληλες προς τους άξονες  $y'y$  και  $x'x$  αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο  $M$ , που είναι το ζητούμενο με συντεταγμένες  $M(-3, \frac{5}{2})$ .

**Άρα:** 

Κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μόνο ζεύγος συντεταγμένων και, αντιστρόφως, κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο του επιπέδου.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι άξονες  $x'x$  και  $y'y$  αποτελούν ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων ή απλώς σύστημα αξόνων.

**Παρατηρήσεις:**

- α) Στα παραπάνω σχήματα χρησιμοποιήσαμε κάθετους άξονες των οποίων οι μονάδες μέτρησης έχουν το ίδιο μήκος. Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται **ορθοκανονικό σύστημα αξόνων**. Όπως θα δούμε όμως παρακάτω, υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες επιβάλλεται να χρησιμοποιήσουμε συστήματα αξόνων με διαφορετικού μήκους μονάδες μέτρησης στους άξονες  $x'$  και  $y'$ . Φυσικά, ένα τέτοιο σύστημα δεν είναι ορθοκανονικό.

Στα επόμενα σχήματα -εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά- λέγοντας σύστημα αξόνων θα εννοούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

- β) Το σύστημα των αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε τέσσερα μέρη που λέγονται **τεταρτημόρια**. Στο διπλανό σχήμα σημειώνονται τα πρόσημα της τετμημένης και της τεταγμένης σε κάθε τεταρτημόριο.

**Γραφική παράσταση συνάρτησης****ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2**

Δίνεται η συνάρτηση  $y = \frac{1}{2} x^2$ .

- α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

<b>x</b>	-4	-2	0	2	4
<b>y</b>					

- β) Σε ένα σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε τα σημεία  $(x, y)$  του παραπάνω πίνακα.  
 γ) Να ενώσετε με γραμμές τα σημεία αυτά. Τι γραμμή σχηματίζεται;  
 δ) Να επαναλάβετε τα παραπάνω βήματα (α), (β) και (γ) για την ίδια συνάρτηση  $y = \frac{1}{2} x^2$  χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα τιμών. Τι παρατηρείτε;

<b>x</b>	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
<b>y</b>									

- ε) Τι γραμμή θα σχηματιστεί, αν χρησιμοποιήσουμε ένα πίνακα τιμών με πολύ περισσότερα ζεύγη τιμών;

**Λύση**

α) Για  $x = -4$  είναι  $y = \frac{1}{2}(-4)^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$ .

Για  $x = -2$  είναι  $y = \frac{1}{2}(-2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ .

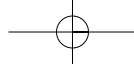
Για  $x = 0$  είναι  $y = \frac{1}{2}(0)^2 = 0$ .

Για  $x = 2$  είναι  $y = \frac{1}{2}(2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ .

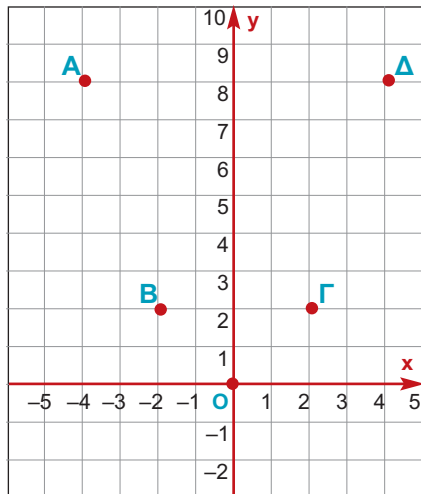
Για  $x = 4$  είναι  $y = \frac{1}{2}(4)^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$ .

Επομένως, ο πίνακας τιμών είναι:

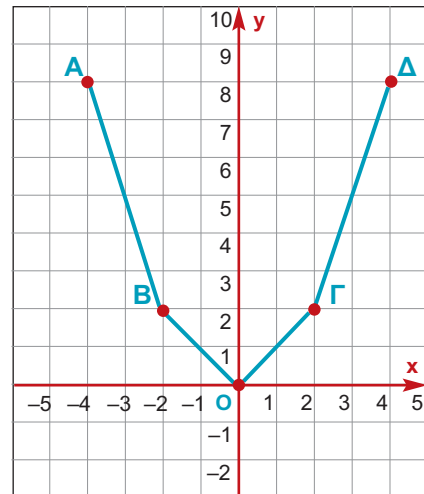
<b>x</b>	-4	-2	0	2	4
<b>y</b>	8	2	0	2	8



- β) Τα ζεύγη  $(x, y)$  που προκύπτουν από τον παραπάνω πίνακα είναι:  $(-4, 8)$ ,  $(-2, 2)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(2, 2)$  και  $(4, 8)$  που αντιστοιχούν στα σημεία Α, Β, Ο, Γ και Δ του παρακάτω σχήματος.



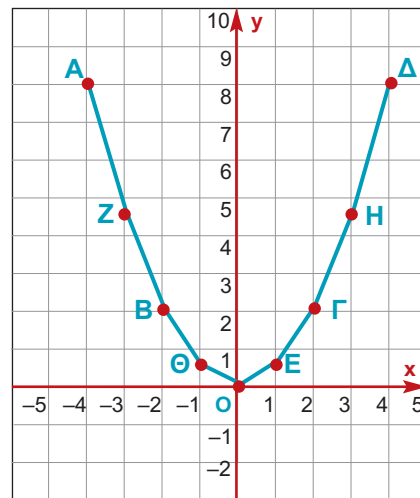
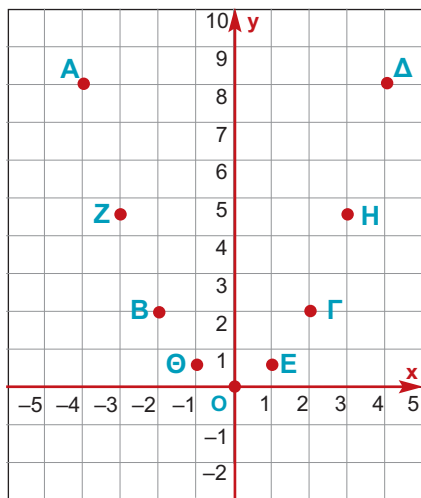
- γ) Ενώνοντας με τη σειρά τα σημεία Α, Β, Ο, Γ και Δ σχηματίζεται μια πολυγωνική γραμμή.



- δ) Ομοίως έχουμε:

<b>x</b>	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
<b>y</b>	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

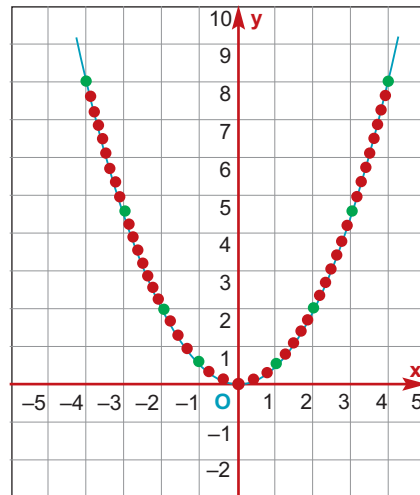
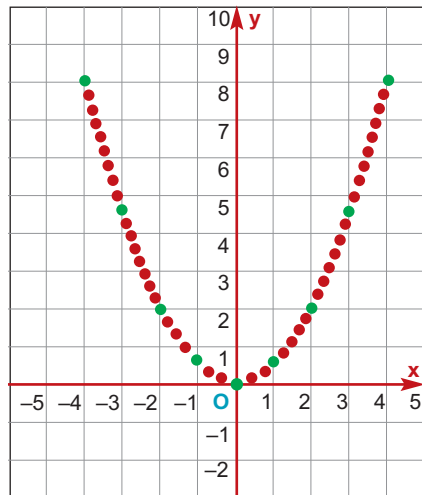
Τα σημεία τώρα είναι περισσότερα και η τεθλασμένη γραμμή που σχηματίζεται μοιάζει με καμπύλη.



- ε) Ας χρησιμοποιήσουμε έναν πίνακα τιμών με πολύ περισσότερα ζεύγη. Για παράδειγμα:

<b>x</b>	-4	-3,9	-3,8	-3,7	-3,6	...	0	...	3,6	3,7	3,8	3,9	4
<b>y</b>	8	7,605	7,22	6,845	6,48				6,48	6,845	7,22	7,605	8

Όπως παρατηρούμε στα παρακάτω σχήματα, η γραμμή που θα σχηματιστεί θα είναι καμπύλη.



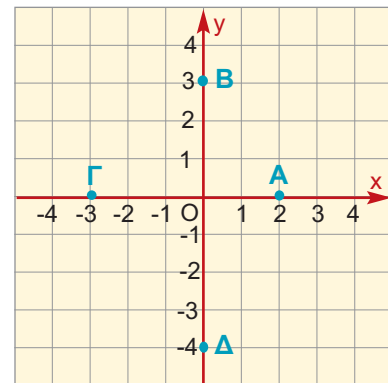
Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση με την οποία ένα μέγεθος  $y$  εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους  $x$ . Ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες  $(x, y)$ .

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δίνει μια «εποπτική» εικόνα της συνάρτησης αυτής και μας βοηθάει να αντλήσουμε χρήσιμες πληροφορίες για τη σχέση των μεταβλητών  $x$  και  $y$ .

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

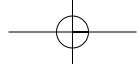
Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  και  $\Delta$  του παρακάτω σχήματος. Τι συμπεραίνετε;

**Λύση:** Παρατηρούμε ότι από τα σημεία  $A$  και  $\Gamma$  οι κάθετες προς τον άξονα  $y'y$  αντιστοιχούν στο σημείο  $O$ , οπότε αυτά τα σημεία έχουν τεταγμένες  $0$ . Άρα είναι  $A(2, 0)$ ,  $\Gamma(-3, 0)$ . Ομοίως, από τα σημεία  $B$  και  $\Delta$  οι κάθετες προς τον άξονα  $x'x$  αντιστοιχούν στο σημείο  $O$ , οπότε τα σημεία αυτά έχουν τεταγμένη  $0$ . Άρα είναι  $B(0, 3)$  και  $\Delta(0, -4)$ . Δηλαδή:  
**Κάθε σημείο του άξονα  $x'x$  έχει τεταγμένη  $0$  και κάθε σημείο του άξονα  $y'y$  έχει τεταγμένη  $0$ .**



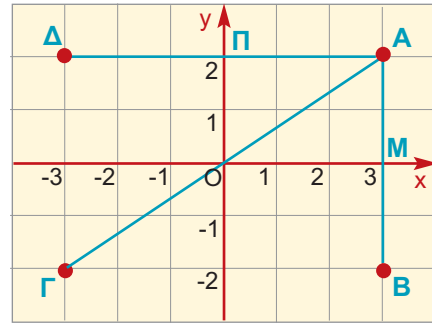
### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Δίνεται το σημείο  $A(3, 2)$ . Να βρείτε το συμμετρικό του  $A$  ως προς:  
 α) τον άξονα  $x'x$     β) τον άξονα  $y'y$     γ) την αρχή  $O$  των αξόνων.  
 Ποιες είναι οι συντεταγμένες των σημείων αυτών;



**Λύση:** Από το Α φέρνουμε κάθετες ΑΜ και ΑΠ στους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

- Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα  $MB = MA$ . Το σημείο Β είναι το συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα  $x'x$  και έχει συντεταγμένες  $(3, -2)$ .
- Προεκτείνουμε την ΑΠ κατά τμήμα  $ΠΔ = ΠΑ$ . Το σημείο Δ είναι το συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα  $y'y$  και έχει συντεταγμένες  $(-3, 2)$ .
- Ενώνουμε το Α με την αρχή Ο των αξόνων και προεκτείνουμε κατά τμήμα  $ΟΓ = ΟΑ$ . Το σημείο Γ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την αρχή Ο και έχει συντεταγμένες  $(-3, -2)$ .



### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Δίνονται τα σημεία  $A(2, 3)$  και  $B(10, 9)$ . Να υπολογίσετε την απόστασή τους ΑΒ. Τι συμπεραίνετε;

**Λύση:** Σχηματίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος. Τότε το σημείο Γ έχει συντεταγμένες  $(10, 3)$ , οπότε  $ΑΓ = 10 - 2 = 8$  και  $ΒΓ = 9 - 3 = 6$ .

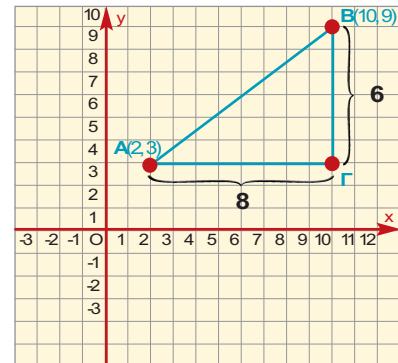
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι:

$$AB^2 = AG^2 + BG^2 \quad \text{ή}$$

$$AB^2 = 8^2 + 6^2 \quad \text{ή}$$

$$AB^2 = 100 \quad \text{ή}$$

$$AB = 10$$



Γενικότερα:

Αν δίνονται δύο σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$ , η απόστασή τους υπολογίζεται από τον τύπο:  $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

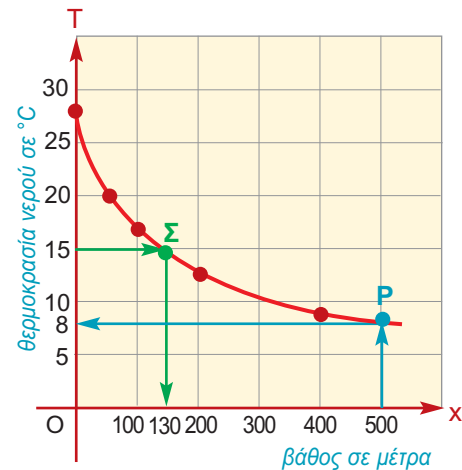
Έχει διαπιστωθεί ότι το νερό της θάλασσας δεν έχει παντού την ίδια θερμοκρασία. Όσο πιο βαθιά κατεβαίνουμε, τόσο πιο κρύο γίνεται το νερό. Ένα ωκεανογραφικό σκάφος κάνει μετρήσεις θερμοκρασίας σε διάφορα βάθη στο βόρειο Αιγαίο, με τα εξής αποτελέσματα:

<b>x</b>	0	50	100	200	400
<b>T</b>	28	20	17	12	9

όπου  $T$  είναι η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) η οποία μεταβάλλεται ως συνάρτηση του βάθους  $x$  (σε μέτρα).

- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.
- Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση για να εκτιμήσετε τη θερμοκρασία του νερού σε βάθος 500 μέτρων.
- Σε ποιο βάθος από την επιφάνεια της θάλασσας η θερμοκρασία είναι  $15^\circ\text{C}$ ;

**Λύση:** α) Σ' ένα σύστημα αξόνων τοποθετούμε τα σημεία με συντεταγμένες  $(0, 28)$ ,  $(50, 20)$ ,  $(100, 17)$ ,  $(200, 12)$  και  $(400, 9)$ . Χρησιμοποιούμε ένα μη ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Στον άξονα  $x'x$  η μονάδα μέτρησης αντιστοιχεί σε 100 μέτρα, ενώ στον άξονα  $y'y$  η μονάδα μέτρησης αντιστοιχεί σε θερμοκρασία  $5^\circ\text{C}$ . Στη συνέχεια, ενώνουμε με μία καμπύλη τα σημεία αυτά.



- β) Για να βρούμε τη θερμοκρασία του νερού σε βάθος 500 μέτρων, από το σημείο με τετμημένη 500 του άξονα  $x'x$  φέρνουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα  $y'y$ , που τέμνει την γραφική παράσταση στο σημείο P. Στη συνέχεια, από το P φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$ , που τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο με τεταγμένη (περίπου) 8. Άρα, η θερμοκρασία σε βάθος  $x = 500$  m είναι (περίπου)  $T = 8^\circ\text{C}$ .
- γ) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι  $15^\circ\text{C}$ , φέρνουμε από το σημείο με τεταγμένη 15 του άξονα  $y'y$  παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$  που τέμνει τη γραφική παράσταση στο σημείο Σ. Στη συνέχεια, από το Σ φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα  $y'y$ , που τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο με τετμημένη (περίπου) 130 m. Άρα, η θερμοκρασία είναι  $15^\circ\text{C}$  σε βάθος (περίπου)  $x = 130$  m.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

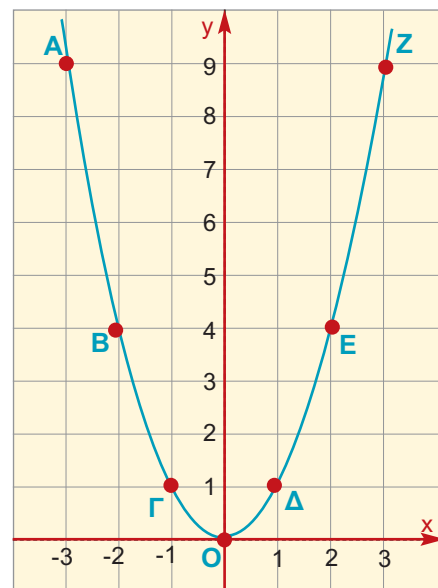
Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = x^2$ .

**Λύση:** Σχηματίζουμε, καταρχάς, έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης.

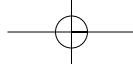
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Στη συνέχεια, τοποθετούμε σ' ένα σύστημα αξόνων τα σημεία με συντεταγμένες  $(x, y)$  του παραπάνω πίνακα. Έτσι, βρίσκουμε τα σημεία  $A(-3, 9)$ ,  $B(-2, 4)$ ,  $\Gamma(-1, 1)$ ,  $O(0, 0)$ ,  $\Delta(1, 1)$ ,  $E(2, 4)$  και  $Z(3, 9)$ .

Στη συνέχεια, ενώνουμε με τη σειρά τα σημεία αυτά. Η καμπύλη που προκύπτει είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = x^2$ .



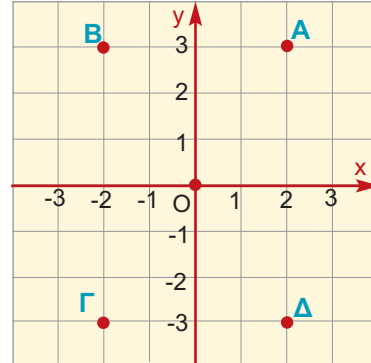




## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε σημείο τις συντεταγμένες του:

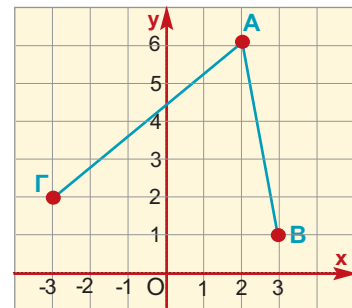
Σημείο	Συντεταγμένες
Α	(2, 3)
	(3, 2)
Β	(-2, 3)
	(-3, 2)
Γ	(-2, -3)
	(-3, -2)
Δ	(2, -3)
	(3, -2)



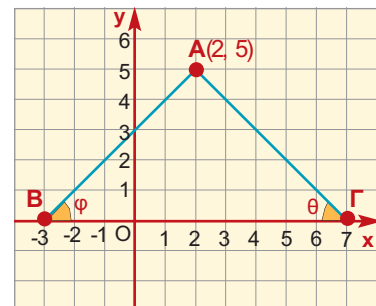
2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα, όπως φαίνεται στο παράδειγμα της 1ης γραμμής.

Σημείο Α	Συμμετρικό του Α ως προς τον x'x	Συμμετρικό του Α ως προς τον y'y	Συμμετρικό του Α ως προς το Ο
(-2, 3)	(-2, -3)	(2, 3)	(2, -3)
(3, 5)			
(-3, 5)			
(-3, -5)			
(3, -5)			

3. Στο διπλανό σχήμα είναι:  
α)  $AB < AG$ , β)  $AB > AG$ , γ)  $AB = AG$   
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

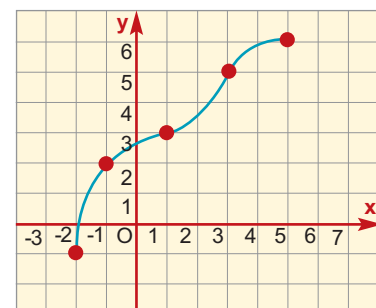


4. Στο διπλανό σχήμα:  
α) Α:  $\hat{A} < 90^\circ$  Β:  $\hat{A} = 90^\circ$  Γ:  $\hat{A} > 90^\circ$   
β) Α:  $\epsilon\phi\theta = 5$  Β:  $\epsilon\phi\theta = \frac{7}{5}$  Γ:  $\epsilon\phi\theta = \frac{5}{7}$  Δ:  $\epsilon\phi\theta = 1$   
γ) Α:  $AB < AG$  Β:  $AB = AG$  Γ:  $AB > AG$   
δ) Α:  $\epsilon\phi\phi = 3$  Β:  $\epsilon\phi\phi = 5$  Γ:  $\epsilon\phi\phi = 1$  Δ:  $\epsilon\phi\phi = 2$   
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

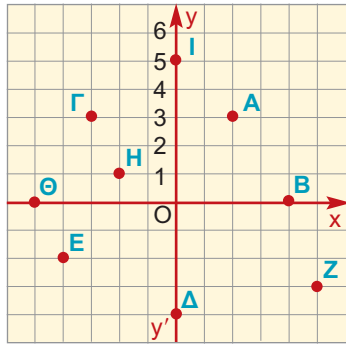
- α) για  $x=1$ , είναι  $y = \dots\dots\dots$  Α: -1 Β: 2 Γ: 3 Δ: 5  
β) για  $x=3$ , είναι  $y = \dots\dots\dots$  Α: -1 Β: 2 Γ: 3 Δ: 5  
γ) για  $y=6$ , είναι  $x = \dots\dots\dots$  Α: -1 Β: 2 Γ: 3 Δ: 5  
δ) για  $y=2$ , είναι  $x = \dots\dots\dots$  Α: -1 Β: 2 Γ: 3 Δ: 5  
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.





## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1 Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ και Ι.



- 2 Σ' ένα τετραγωνισμένο χαρτί να σχεδιάσετε ένα σύστημα αξόνων και να σημειώσετε τα σημεία: Α(-3, 2), Β(-0,25, 1), Γ(0, - $\frac{5}{2}$ ),

$$\Delta(-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}), E(-\sqrt{2}, 0), Z(2,4, -3,2).$$

- 3 Δίνονται τα σημεία Α(-3, 4) και Β(2, - $\frac{7}{2}$ ). Σε τετραγωνισμένο χαρτί να βρείτε τις συντεταγμένες των συμμετρικών τους σημείων ως προς τον άξονα x'x, τον άξονα y'y και την αρχή Ο των αξόνων.

- 4 α) Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β και Γ.

β) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Το μήκος ΒΓ ισούται με:

$$A: 1 + 3 = 4 \quad B: 2 - 2 = 0$$

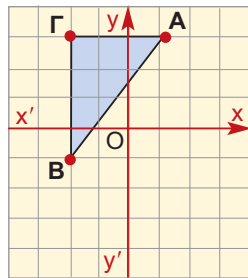
$$Γ: 3 - 1 = 2 \quad \Delta: -1 - 3 = -4$$

ii) Το μήκος ΑΓ ισούται με:

$$A: 3 - 3 = 0 \quad B: 1 + 2 = 3$$

$$Γ: 1 - 2 = -1 \quad \Delta: 2 - 1 = 1$$

γ) Αφού παρατηρήσετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ, να επαληθεύσετε με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος ότι η απόσταση ΑΒ είναι ίση με 5.



- 5 Να βρείτε τις αποστάσεις των παρακάτω σημείων από τους άξονες x'x και y'y.

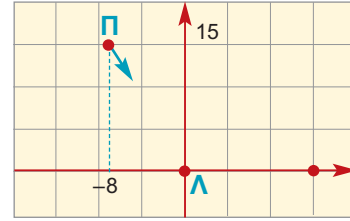
α) Α(3, 5) β) Β(-3, 2) γ) Γ(0, -4)

- 6 Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων:

α) Α(3, 5) και Β(5, 1) β) Α(-2, 1) και Β(2, -3)

γ) Α(3, -5) και Β(-2, -5) δ) Α(-5, -7) και Β(-5, 2)

- 7 Ένα πλοίο Π κινείται με ταχύτητα 8 μίλια την ώρα και κατευθύνεται προς το λιμάνι Λ. Η θέση του πλοίου ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Λ και μονάδα μέτρησης το 1 μίλι, είναι (-8, 15). Σε πόση ώρα θα φτάσει στο λιμάνι;



- 8 Η πίεση P (σε cm Hg) του αέρα ως συνάρτηση του ύψους h από το έδαφος φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Ύψος h σε χιλιόμετρα	0	1	2	3
Πίεση P σε cm Hg	76	68	60	52

- α) Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.  
β) Ποια είναι η πίεση σε ύψος 1,5 km από το έδαφος;  
γ) Σε ποιο ύψος η πίεση είναι περίπου ίση με 70 cm Hg;

- 9 Η θερμοκρασία T του αέρα ως συνάρτηση του ύψους h φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Ύψος h σε χιλιόμετρα	0	1	2	3
Θερμοκρασία T σε °C	22	16	10	4

- α) Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.  
β) Πόση περίπου είναι η θερμοκρασία του αέρα σε ύψος 500 μέτρων;  
γ) Σε ποιο ύψος η θερμοκρασία του αέρα είναι περίπου 12°C;

- 10 Όταν ένα σώμα (π.χ. μια μπάλα) πέφτει από ένα ψηλό σημείο (π.χ. από τον τελευταίο όροφο ενός ουρανοξύστη ύψους 100 m) δεν κινείται ομαλά (με σταθερή ταχύτητα), αλλά εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η απόσταση x που διανύει το σώμα ως συνάρτηση του χρόνου t.

t(s)	0	1	2	3	4
x(m)	0	5	20	45	80

Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

## 3.3. Η συνάρτηση $y = ax$



### Ποσά ανάλογα - Η συνάρτηση $y = ax$

Στην εφημερίδα διαβάζουμε διάφορες φράσεις, όπως:  
«... η τιμή της βενζίνης μειώθηκε ανάλογα με τη μείωση του πετρελαίου...». Οι φράσεις αυτές παρουσιάζουν ένα ποσό να μεταβάλλεται σε σχέση με κάποιο άλλο.

Όπως γνωρίζουμε, δύο ποσά λέγονται **ανάλογα**, όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

#### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Δίνονται τέσσερα τετράγωνα με πλευρές (σε cm) 0,5, 1, 1,5 και 2.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα

πλευρά $x$	0,5	1	1,5	2
περίμετρος $y$				
λόγος $\frac{y}{x}$				

β) Να εκφράσετε την περίμετρο  $y$  ενός τετραγώνου ως συνάρτηση του μήκους  $x$  της πλευράς του.

#### Λύση

α) Για  $x = 0,5$  η περίμετρος είναι  $y = 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 2$ . Ομοίως, βρίσκουμε την περίμετρο και στις άλλες περιπτώσεις, που είναι αντίστοιχα: 4, 6 και 8.

Επίσης, για το λόγο  $\frac{y}{x}$  έχουμε:

$$\frac{2}{0,5} = 4, \quad \frac{4}{1} = 4, \quad \frac{6}{1,5} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{8}{2} = 4$$

πλευρά $x$	0,5	1	1,5	2
περίμετρος $y$	2	4	6	8
λόγος $\frac{y}{x}$	4	4	4	4

β) Παρατηρούμε ότι ο λόγος  $\frac{y}{x}$  είναι σταθερός πάντοτε και ίσος με 4.

Άρα  $\frac{y}{x} = 4$  ή  $y = 4x$ . Η σχέση αυτή εκφράζει το  $y$  ως συνάρτηση του  $x$ .

Σε πολλές περιπτώσεις χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε και αρνητικές τιμές της μεταβλητής  $x$  στη συνάρτηση  $y = ax$ .

**ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2**

Αφού συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών, ο οποίος περιλαμβάνει και αρνητικές τιμές του  $x$ , να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = \frac{1}{2}x$ . Τι παρατηρείτε;

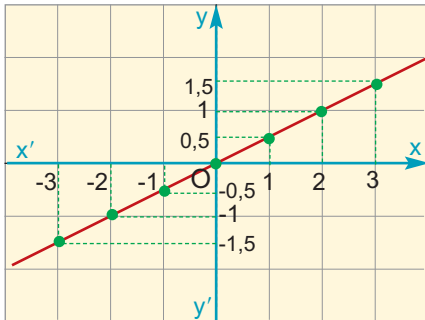
<b>x</b>	-3	-2	-1	0	1	2	3
<b>y</b>							

**Λύση**

Για  $x = -3$  είναι  $y = \frac{1}{2}(-3) = -\frac{3}{2} = -1,5$ .

Ομοίως, βρίσκουμε τις υπόλοιπες τιμές και συμπληρώνουμε τον πίνακα.

<b>x</b>	-3	-2	-1	0	1	2	3
<b>y</b>	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5



Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων παριστάνουμε τα σημεία με συντεταγμένες τα ζεύγη των τιμών του πίνακα. Παρατηρούμε ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή  $O$ .

**Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = ax$  είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή  $O$  των αξόνων.**

Όταν αναφερόμαστε στην ευθεία, που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = ax$ , τότε λέμε: η ευθεία με εξίσωση  $y = ax$  ή απλώς η ευθεία  $y = ax$ . Ο άξονας  $x'x$  είναι η ευθεία με εξίσωση  $y = 0x$ , δηλαδή  $y = 0$ .

**Η κλίση της ευθείας  $y = ax$** 

Παρατηρούμε ότι στην ευθεία  $y = ax$  ο λόγος  $\frac{y}{x}$  είναι πάντα σταθερός και ίσος με  $a$ , δηλαδή:

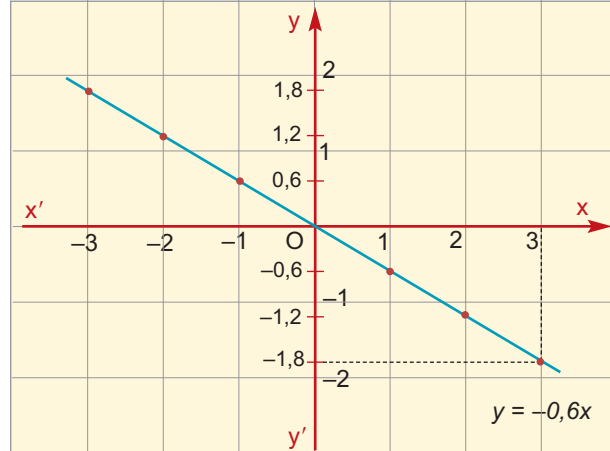
$$\frac{y}{x} = a, \text{ για } x \neq 0. \text{ Ο λόγος αυτός λέγεται κλίση της ευθείας } y = ax.$$

Για παράδειγμα, η ευθεία  $y = -2x$  έχει κλίση  $-2$ .

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1**

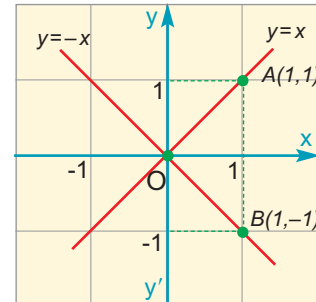
Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε την ευθεία με εξίσωση  $y = -0,6x$ .

**Λύση:** Η συνάρτηση  $y = -0,6x$  έχει γραφική παράσταση μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή  $O$  των αξόνων. Επομένως, πρέπει να βρούμε ένα ακόμα σημείο της. Για  $x = 3$  είναι  $y = -0,6 \cdot 3 = -1,8$ . Άρα, η ευθεία περνάει από το σημείο  $A(3, -1,8)$ . Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2**

Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις  $y = x$  και  $y = -x$ .

**Λύση:** Η συνάρτηση  $y = x$  έχει γραφική παράσταση μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή  $O$ . Ένα δεύτερο σημείο της προσδιορίζεται δίνοντας μια τυχαία τιμή στο  $x$  εκτός της μηδενικής. Για  $x = 1$  είναι  $y = 1$ , άρα η ευθεία διέρχεται από το σημείο  $A(1, 1)$ . Η ζητούμενη ευθεία είναι η  $OA$ . Ομοίως, βρίσκουμε ότι η γραφική παράσταση της  $y = -x$  είναι η  $OB$ .  
**Παρατήρηση:** Η ευθεία με εξίσωση  $y = x$  είναι διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων και η  $y = -x$  είναι διχοτόμος της 2ης και της 4ης γωνίας.

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3**

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο  $A(-2, 1)$ .

**Λύση:** Το σημείο  $A$  έχει συντεταγμένες  $x = -2$ ,  $y = 1$ , οπότε η κλίση της ευθείας είναι  $\alpha = \frac{y}{x} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ . Επομένως, η εξίσωση της ευθείας είναι η  $y = -\frac{1}{2}x$ .

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4**

Ένα πολυκατάστημα κάνει έκπτωση 20% σε όλα του τα είδη.

α) Πόση έκπτωση αναλογεί σ' ένα ζευγάρι παπούτσια το οποίο κοστίζει αρχικά 100 €; Ποια είναι η τιμή που θα το αγοράσουμε μετά την έκπτωση;

β) Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα, με τις τιμές διαφόρων ειδών του καταστήματος και να εξετάσετε αν είναι ανάλογα τα ποσά  $x$ ,  $y$  και τα ποσά  $x$ ,  $\omega$ .

Αρχική τιμή $x$	100	200	50	80	150
Έκπτωση $y$	20				
Τελική τιμή $\omega$	80				

γ) Να εκφράσετε τα ποσά  $y$  και  $\omega$  ως συναρτήσεις του  $x$ .

**Λύση:** α) Η έκπτωση που αναλογεί είναι  $100 \cdot \frac{20}{100} = 20$  €, οπότε θα το αγοράσουμε  $100 - 20 = 80$  €.

β) Ομοίως, με το ερώτημα (α) συμπληρώ-  
νουμε τον πίνακα:

Αρχική τιμή $x$	100	200	50	80	150
Έκπτωση $y$	20	40	10	16	30
Τελική τιμή $\omega$	80	160	40	64	120

γ) Τα ποσά  $x$  και  $y$  είναι ανάλογα, γιατί:  $\frac{y}{x} = \frac{20}{100} = \frac{40}{200} = \frac{10}{50} = \frac{16}{80} = \frac{30}{150} = 0,2$ .  
Επομένως,  $y = 0,2x$ .

Τα ποσά  $x$  και  $\omega$  είναι ανάλογα, γιατί:  $\frac{\omega}{x} = \frac{80}{100} = \frac{160}{200} = \frac{40}{50} = \frac{64}{80} = \frac{120}{150} = 0,8$ .  
Επομένως,  $\omega = 0,8x$ .



## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

**1.** Τα ποσά  $x$  και  $y$  είναι ανάλογα.

α) Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα τιμών.

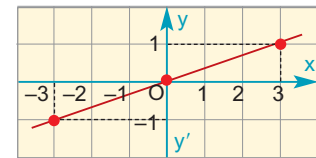
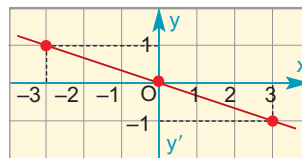
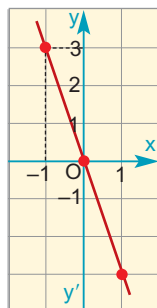
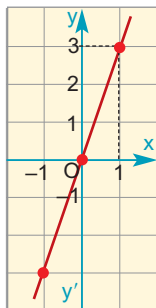
$x$	2	4	
$y$	5		15

β) Ποιος από τους παρακάτω τύπους εκφράζει το  $y$  ως συνάρτηση του  $x$ ;

A:  $y = 5x$ ,    B:  $y = \frac{2}{5}x$ ,    Γ:  $y = \frac{5}{2}x$ .    Δ:  $y = 0,4x$ .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

**2.** Ποια από τις παρακάτω ευθείες είναι η  $y = 3x$ ;



**3.** Ποια από τις παρακάτω ευθείες έχει κλίση  $-\frac{1}{3}$ ;

α)  $y = 3x$     β)  $y = -3x$     γ)  $y = \frac{1}{3}x$     δ)  $y = -\frac{1}{3}x$     ε)  $y = x - \frac{1}{3}$ .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1** Γνωρίζοντας ότι τα ποσά  $x$  και  $y$  είναι ανάλογα:

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

$x$	1	2	5		
$y$		6		21	30

β) Να εκφράσετε το  $y$  ως συνάρτηση του  $x$ .

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

**2** Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις ευθείες:

$$y = 2x, y = 3x \text{ και } y = 5x.$$

**3** Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις ευθείες:

$$y = \frac{1}{2}x \text{ και } y = -\frac{1}{2}x.$$

**4** Ένα κινητό κινείται με σταθερή ταχύτητα  $u = 5 \text{ m/s}$ . Να εκφράσετε το διάστημα  $S$  που διανύει ως συνάρτηση του χρόνου  $t$ . Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

**5** Βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο  $A(2, 6)$ .

**6** Να σχεδιάσετε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων μια ευθεία η οποία να διέρχεται από την αρχή  $O$  των αξόνων και να έχει κλίση  $\frac{3}{2}$ .

**7** Να βρείτε την κλίση μιας ευθείας η οποία να διέρχεται από την αρχή  $O$  των αξόνων και από το σημείο  $A(-1, 3)$ .

**8** Οι τιμές των αγροτικών προϊόντων σε μια χώρα αυξήθηκαν κατά 20% σ' ένα χρόνο.

α) Να βρείτε τη σχέση που εκφράζει τις νέες τιμές  $y$  των αγροτικών προϊόντων, ως συνάρτηση των παλιών τους τιμών  $x$ .

β) Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση.

γ) Με τη βοήθεια της παραπάνω συνάρτησης να βρείτε:

i) Τη σημερινή τιμή ενός προϊόντος που είχε πέρυσι 7 €.

ii) Την περσινή τιμή ενός προϊόντος που έχει τώρα 7 €.

**9** Η ισοτιμία του Ευρώ έναντι του Δολλαρίου την 21/7/03 ήταν 112 \$ για 100 €.

α) Να βρείτε τη σχέση που εκφράζει την τιμή  $y$  σε δολάρια ενός προϊόντος ως συνάρτηση της τιμής  $x$  του προϊόντος αυτού σε Ευρώ.

β) Από τη γραφική παράσταση να βρείτε κατά προσέγγιση την τιμή σε δολάρια ενός αεροπορικού εισιτηρίου που κοστίζει 250 €.

γ) Από τη γραφική παράσταση να βρείτε κατά προσέγγιση την τιμή σε Ευρώ ενός αεροπορικού εισιτηρίου κόστους 250 \$.





## 3.4. Η συνάρτηση $y = ax + \beta$

### Η ευθεία με εξίσωση $y = ax + \beta$

Στις προηγούμενες παραγράφους μάθαμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = ax$  είναι ευθεία, η οποία διέρχεται από την αρχή  $O$  των αξόνων. Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = ax + \beta$ . Ας δούμε ένα παράδειγμα:



#### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

##### Το κινητό της Κατερίνας.

Η Κατερίνα έχει κινητό τηλέφωνο με χρέωση  $0,9 \text{ €}$  για κάθε λεπτό ομιλίας.

α) Αν ονομάσουμε  $x$  το χρόνο ομιλίας (σε λεπτά) και  $y$  το ποσό πληρωμής (σε  $\text{€}$ ) που αντιστοιχεί, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Χρόνος ομιλίας $x$	1	5	10	15	20
Ποσό πληρωμής $y$	0,9				

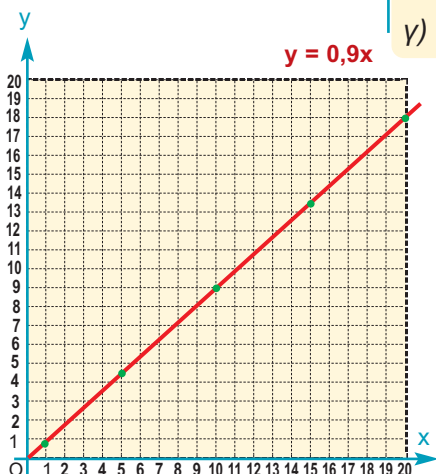
Να εκφράσετε το  $y$  ως συνάρτηση του  $x$  και να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

β) Η τηλεφωνική εταιρεία χρεώνει και  $10 \text{ €}$  πάγιο το μήνα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με το νέο ποσό πληρωμής  $y$  με την προσθήκη και των  $10 \text{ €}$ .

Χρόνος ομιλίας $x$	1	5	10	15	20
Ποσό πληρωμής ομιλίας					
Πάγιο					
Συνολικό ποσό πληρωμής $y$					

Να εκφράσετε το νέο ποσό πληρωμής  $y$  ως συνάρτηση του χρόνου ομιλίας  $x$  και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

γ) Τι σχέση έχουν οι δύο αυτές γραφικές παραστάσεις;



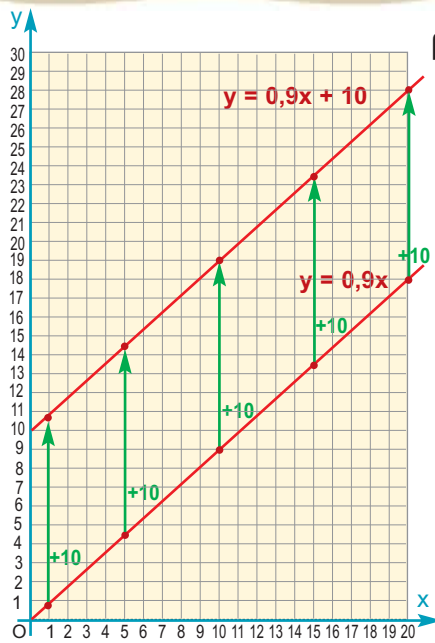
#### Λύση

α) Για  $x = 5$  είναι  $y = 0,9 \cdot 5 = 4,5 \text{ €}$ .

Ομοίως, βρίσκουμε τα υπόλοιπα ζεύγη του πίνακα.

Χρόνος ομιλίας $x$	1	5	10	15	20
Ποσό πληρωμής $y$	0,9	4,5	9	13,5	18

Παρατηρούμε ότι τα ποσά  $x$  και  $y$  είναι ανάλογα, γιατί  $\frac{y}{x} = 0,9$  ή  $y = 0,9x$ . Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής είναι μια ημιευθεία που αρχίζει από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση  $0,9$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Μέρος Α' - 3.4. Η συνάρτηση  $y = ax + \beta$ 

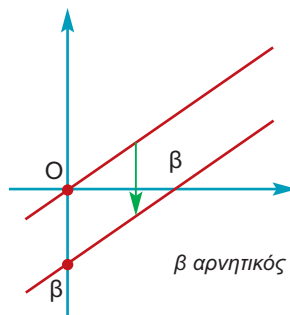
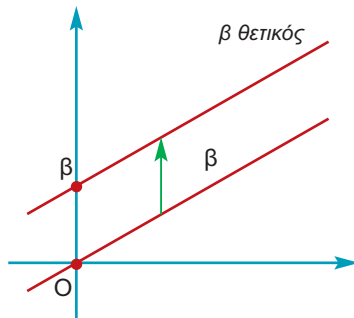
β) Εύκολα συμπληρώνουμε τον πίνακα προσθέτοντας στο ποσό πληρωμής και το πάγιο των 10 €.

<b>Χρόνος ομιλίας x</b>	1	5	10	15	20
<b>Ποσό πληρωμής ομιλίας</b>	0,9	4,5	9	13,5	18
<b>Πάγιο</b>	+10	+10	+10	+10	+10
<b>Συνολικό ποσό πληρωμής y</b>	10,9	14,5	19	23,5	28

Η νέα συνάρτηση που εκφράζει το συνολικό ποσό πληρωμής είναι  $y = 0,9x + 10$ .

Τοποθετούμε στο σύστημα αξόνων τα νέα ζεύγη  $(x, y)$  του παραπάνω πίνακα των οποίων η τεταγμένη είναι αυξημένη κατά 10 μονάδες. Αν ενώσουμε τα νέα αυτά σημεία, παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = 0,9x + 10$  είναι ημιευθεία παράλληλη προς την ημιευθεία  $y = 0,9x$ , μετατοπισμένη κατά 10 μονάδες προς τα πάνω στον άξονα  $y'y$ .

Η γραφική παράσταση της  $y = ax + \beta$ ,  $\beta \neq 0$  είναι μια ευθεία παράλληλη της ευθείας με εξίσωση  $y = ax$ , που διέρχεται από το σημείο  $(0, \beta)$  του άξονα  $y'y$ .



Στο εξής, όταν αναφερόμαστε στην ευθεία που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = ax + \beta$ , θα λέμε: η ευθεία με εξίσωση  $y = ax + \beta$  ή απλώς η ευθεία  $y = ax + \beta$ .

Ο αριθμός  $a$ , που, όπως γνωρίζουμε, λέγεται κλίση της ευθείας  $y = ax$ , λέγεται και **κλίση της ευθείας  $y = ax + \beta$** .

## Η εξίσωση της μορφής $ax + \beta y = \gamma$

Παρατηρήσαμε ότι οι συναρτήσεις  $y = ax$  και  $y = ax + \beta$  παριστάνουν ευθείες. Ωστόσο, υπάρχουν και άλλες εξισώσεις που παριστάνουν ευθείες, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

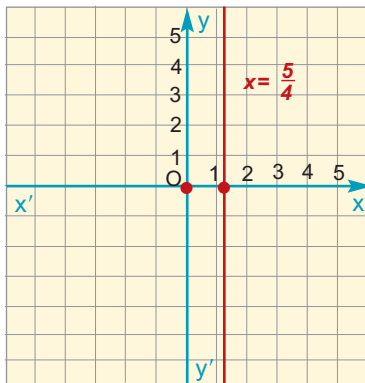
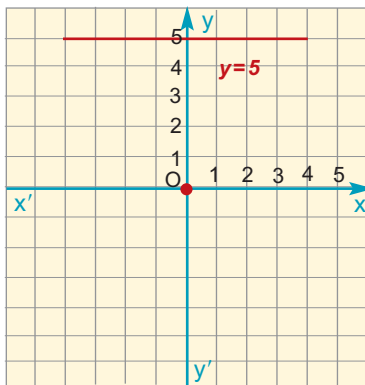
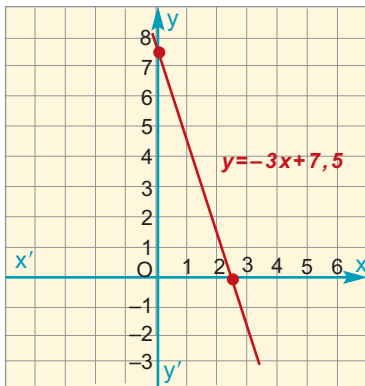


### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Η κυρία Μαρίκα σκοπεύει να ξοδέψει 15 € για να αγοράσει κρέας που κοστίζει 6 € το κιλό και πατάτες, που κοστίζουν 2 € το κιλό. Ποια σχέση συνδέει τα κιλά κρέας και τα κιλά πατάτες που τελικά θα αγοράσει;

#### Λύση

Έστω ότι θα αγοράσει  $x$  κιλά κρέας και  $y$  κιλά πατάτες. Θα ξοδέψει λοιπόν  $6x$  € για το κρέας και  $2y$  € για πατάτες. Εφόσον διαθέτει μόνο 15 €, πρέπει  $6x + 2y = 15$ . Αν λύσουμε τη σχέση αυτή ως προς  $y$ , έχουμε:



$$6x + 2y = 15 \quad \text{ή}$$

$$2y = -6x + 15 \quad \text{ή} \quad \leftarrow \text{Πήγαμε το } 6x \text{ στο άλλο μέλος}$$

$$y = -3x + \frac{15}{2} \quad \leftarrow \text{Διαιρέσαμε και τα δύο μέλη με 2}$$

που γνωρίζουμε ότι παριστάνει ευθεία.

Γενικά:

**Μια εξίσωση της μορφής  $ax + by = \gamma$ , με  $a \neq 0$  ή  $b \neq 0$  παριστάνει ευθεία.**

Για παράδειγμα:

● Η εξίσωση  $12x + 3y = 15$  γράφεται  $3y = -12x + 15$  ή  $y = -4x + 5$  και παριστάνει ευθεία με κλίση  $\alpha = -4$ .

● Η εξίσωση  $0x + 3y = 15$  γράφεται  $y = 5$  και παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$ .  
Γενικότερα, η εξίσωση  $y = \kappa$  παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$ .  
Η ευθεία  $y = 0$  παριστάνει τον άξονα  $x'x$ .

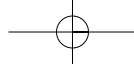
● Η εξίσωση  $12x + 0y = 15$  γράφεται  $x = \frac{15}{12}$  ή  $x = \frac{5}{4}$  και παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα  $y'y$ .  
Γενικότερα, η εξίσωση  $x = \kappa$ , παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα  $y'y$ .  
Η ευθεία  $x = 0$  παριστάνει τον άξονα  $y'y$ .

### Σημεία τομής της ευθείας $ax + by = \gamma$ με τους άξονες

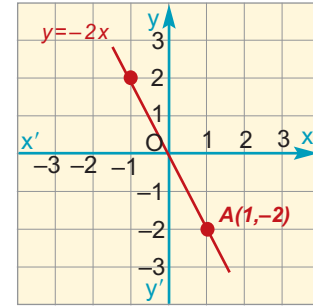
- Γνωρίζουμε ότι ο άξονας  $x'x$  έχει εξίσωση  $y = 0$ .  
Επομένως, για να βρούμε το σημείο Α στο οποίο η ευθεία  $ax + by = \gamma$ , με  $a \neq 0$  ή  $b \neq 0$  τέμνει τον άξονα  $x'x$ , θέτουμε  $y = 0$  και υπολογίζουμε την τετμημένη του  $x$ .
- Γνωρίζουμε ότι ο άξονας  $y'y$  έχει εξίσωση  $x = 0$ . Επομένως, για να βρούμε το σημείο Β στο οποίο η ευθεία  $ax + by = \gamma$ , με  $a \neq 0$  ή  $b \neq 0$  τέμνει τον άξονα  $y'y$ , θέτουμε  $x = 0$  και υπολογίζουμε την τεταγμένη του  $y$ .

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $y = -2x$ ,  $y = -2x + 3$  και  $y = -2x - 3$ , όπου  $x$  ο πραγματικός αριθμός.

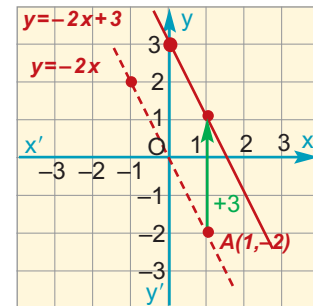


**Λύση:** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = -2x$  είναι ευθεία, η οποία διέρχεται από την αρχή  $O$  των αξόνων. Για να τη σχεδιάσουμε, αρκεί να βρούμε ένα ακόμη σημείο της. Για  $x = 1$  είναι  $y = -2 \cdot 1 = -2$ . Άρα, διέρχεται και από το σημείο  $A$  με συντεταγμένες  $(1, -2)$ . Ενώνουμε το  $O$  με το  $A$  και προεκτείνουμε. Η γραφική παράσταση της  $y = -2x$  φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

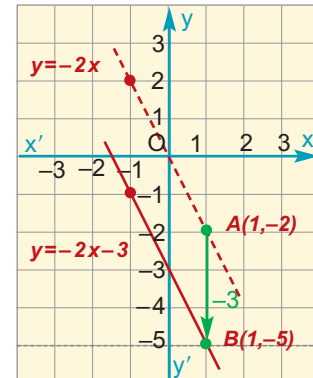


Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = -2x + 3$  είναι ευθεία παράλληλη με την  $y = -2x$  και τέμνει τον άξονα  $y'y'$  στο σημείο  $(0, 3)$ . Μεταφέρουμε το σημείο  $(0, 0)$  στο σημείο  $(0, 3)$  και το σημείο  $(1, -2)$  στο  $(1, 1)$ . Ενώνουμε τα νέα αυτά σημεία και προεκτείνουμε.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = -2x + 3$  φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Ομοίως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = -2x - 3$  είναι ευθεία παράλληλη με την  $y = -2x$  και τέμνει τον άξονα  $y'y'$  στο σημείο  $(0, -3)$ . Μεταφέρουμε το σημείο  $(0, 0)$  στο σημείο  $(0, -3)$  και το σημείο  $(1, -2)$  στο  $(1, -5)$ . Ενώνουμε τα σημεία αυτά και προεκτείνουμε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Δίνεται η εξίσωση  $3x - 4y = 12$ , όπου  $x, y$  πραγματικοί αριθμοί.

- Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία αυτή τέμνει τους άξονες.
- Να τη σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων.
- Να εκφράσετε το  $y$  ως συνάρτηση του  $x$  και να βρείτε την κλίση της ευθείας.

**Λύση:** α) Για τον άξονα  $y'y'$ :

θέτουμε  $x = 0$  στην εξίσωση της ευθείας, οπότε έχουμε:

$$3 \cdot 0 - 4y = 12 \quad \text{ή} \quad -4y = 12 \quad \text{ή} \quad y = \frac{12}{-4} = -3.$$

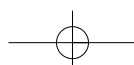
Άρα, τέμνει τον άξονα  $y'y'$  στο σημείο  $A$  με συντεταγμένες  $(0, -3)$ .

Για τον άξονα  $x'x$ :

θέτουμε  $y = 0$  στην εξίσωση της ευθείας, οπότε έχουμε:

$$3 \cdot x - 4 \cdot 0 = 12 \quad \text{ή} \quad 3x = 12 \quad \text{ή} \quad x = \frac{12}{3} = 4.$$

Άρα, τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $B$  με συντεταγμένες  $(4, 0)$ .



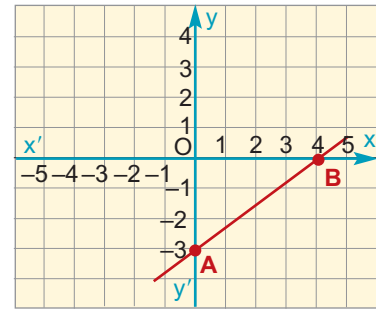
β) Ενώνουμε τα παραπάνω σημεία Α και Β και προεκτείνουμε.

Η γραφική παράσταση της ευθείας  $3x - 4y = 12$  φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

γ) Για να εκφράσουμε το  $y$  ως συνάρτηση του  $x$ , λύνουμε ως προς  $y$  τη σχέση  $3x - 4y = 12$ , δηλαδή:

$$-4y = -3x + 12 \quad \text{ή} \quad y = \frac{-3}{-4}x + \frac{12}{-4} \quad \text{ή}$$

$$y = \frac{3}{4}x - 3. \quad \text{Η κλίση της ευθείας αυτής είναι } \frac{3}{4}.$$



### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

#### Η προσγείωση ενός αεροπλάνου

Η ταχύτητα (σε m/s) ενός αεροπλάνου που προσγειώνεται, από τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος μέχρι να σταματήσει, δίνεται από τη σχέση:  $u = 45 - 1,5t$ , όπου  $t$  ο χρόνος που πέρασε από τη χρονική στιγμή που το αεροπλάνο άγγιξε το έδαφος.



α) Να βρείτε την ταχύτητά του τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος.

β) Να βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να σταματήσει το αεροπλάνο και να παραστήσετε γραφικά την ταχύτητά του  $u$  ως συνάρτηση του χρόνου  $t$ .

**Λύση:** α) Για  $t = 0$  η ισότητα  $u = 45 - 1,5t$  δίνει  $u = 45$  m/s.

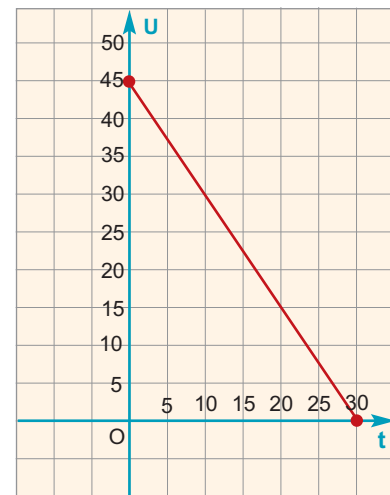
β) Τη στιγμή που σταματάει, το αεροπλάνο έχει ταχύτητα 0 m/s. Για την τιμή αυτή του  $u$ , η ισότητα  $u = 45 - 1,5t$  γίνεται:

$$0 = 45 - 1,5t \quad \text{ή} \quad 1,5t = 45 \quad \text{ή} \quad t = \frac{45}{1,5} \quad \text{ή}$$

$$t = 30 \text{ (s)}.$$

Άρα, οι δυνατές τιμές του χρόνου  $t$  είναι  $0 \leq t \leq 30$ .

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $u = 45 - 1,5t$  είναι ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία (0, 45) και (30, 0).



### ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Η ευθεία  $y = 3x$  είναι παράλληλη προς την:

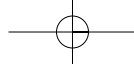
A:  $y = x + 3$

B:  $y = x - 3$

Γ:  $y = 3x - 7$

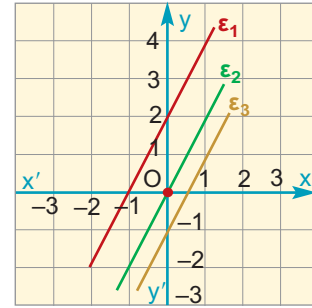
Δ:  $y = -3x + 5$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



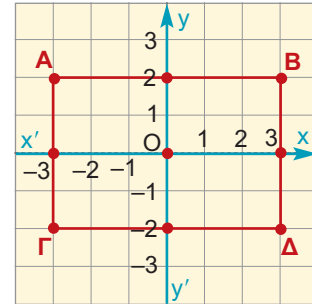
2. Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις τρεις παράλληλες ευθείες της στήλης Β.  
Να αντιστοιχίσετε καθεμιά με την εξίσωσή της.

Στήλη Α	Στήλη Β
$\epsilon_1$	$y = 2x$
$\epsilon_2$	$y = 2x - 1$
$\epsilon_3$	$y = 2x + 2$



3. Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει κέντρο το Ο και οι πλευρές του είναι παράλληλες προς τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .  
Να αντιστοιχίσετε κάθε πλευρά με την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει.

Πλευρές	Ευθείες
ΑΒ	$y = 2$
ΑΓ	$x = 3$
ΓΔ	$y = -2$
ΒΔ	$x = -3$



4. Η ευθεία με εξίσωση  $4x + y = 4$

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
α) έχει κλίση:	4	-4	1	-1	$\frac{1}{4}$
β) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο:	(4, 1)	(4, 0)	(-4, 0)	(1, 0)	(0, 4)
γ) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο:	(0, 1)	(0, 4)	(4, 4)	(0, -4)	(0, -1)

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

5. Μια ευθεία  $\epsilon$  τέμνει τους άξονες στα σημεία (3, 0) και (0, 4). Η εξίσωσή της είναι:

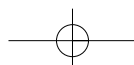
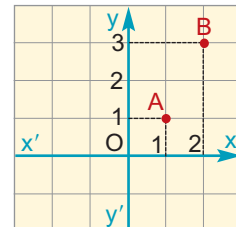
Α:  $3x + 4y = 9$       Β:  $3x + 4y = 16$       Γ:  $4x + 3y = 12$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1 Στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις ευθείες με εξισώσεις:  
 $y = \frac{1}{2}x$ ,  $y = \frac{1}{2}x + 2$  και  $y = \frac{1}{2}x - 3$ .
- 2 Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $y = -3x + 2$ , όταν:
- ο  $x$  είναι πραγματικός αριθμός.
  - $x \geq 0$ .
  - $-2 \leq x \leq 5$ .
- 3 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία έχει κλίση 2 και τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο με τεταγμένη  $-3$ .
- 4 Στο σχήμα δίνονται τα σημεία Α(1, 1) και Β(2, 3).
- Να αποδείξετε ότι η απόσταση ΑΒ είναι ίση με  $\sqrt{5}$ .
  - Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση  $y = 2x - 1$  διέρχεται από τα σημεία Α και Β.





5 Όταν χρησιμοποιούμε ταξί, πληρώνουμε 0,5 € για τη σημαία και 0,2 € για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής. Να βρείτε τη συνάρτηση που μας δίνει το ποσό  $y$  που θα πληρώσουμε για μια διαδρομή  $x$  χιλιομέτρων.

6 Δίνεται η ευθεία με εξίσωση  $2x - 3y = 6$ . Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες.

7 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας  $x + y = 2$ .

8 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων το ορθογώνιο ΑΒΓΔ, του οποίου οι πλευρές ανήκουν στις ευθείες  $y = 2$ ,  $y = 3$ ,  $x = 1$  και  $x = -2$ . Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κορυφών Α, Β, Γ και Δ; Ποιο είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ;

9 Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει ηλεκτρονικούς υπολογιστές με κόστος 200 € το τεμάχιο.

Επίσης, πληρώνει 100 € την ημέρα για την ενοικίαση μιας αποθήκης, για να αποθηκεύει τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.

- α) Να εκφράσετε το συνολικό ημερήσιο κόστος  $y$  του εργοστασίου ως συνάρτηση του αριθμού  $x$  των ηλεκτρονικών υπολογιστών που κατασκευάζει ημερησίως.
- β) Να σχεδιάσετε σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων τη συνάρτηση αυτή.

10 Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι κάθε παίκτης ξεκινάει έχοντας ως δώρο από την εταιρεία παραγωγής 1000 €. Στη συνέχεια, πρέπει να απαντήσει σε 20 ερωτήσεις. Σε κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 100 €, ενώ σε κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 50 €. Συμβολίζουμε με  $x$  το πλήθος των σωστών απαντήσεων.



- α) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του  $x$  το πλήθος  $w$  των λανθασμένων απαντήσεων.
- β) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του  $x$  το συνολικό κέρδος  $y$  του παίκτη.
- γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $y$ .





## 3.5. Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$ – Η υπερβολή

### Ποσά αντιστρόφως ανάλογα – Η υπερβολή

Όπως γνωρίζουμε από τη Φυσική, όταν ένα σώμα κινείται, η ταχύτητά του δίνεται από τη σχέση: Ταχύτητα =  $\frac{\text{Διάστημα}}{\text{Χρόνος}}$  ή  $u = \frac{s}{t}$ .



#### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Η απόσταση  $s$  δύο πόλεων είναι 60 χιλιόμετρα. Αν με  $t$  παραστήσουμε το χρόνο (σε ώρες) που χρειάζεται ο ποδηλάτης να διανύσει την απόσταση των δύο πόλεων:

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Χρόνος $t$	1	2	4	10	20	30	60
Ταχύτητα $u$							
Απόσταση $s$	60	60	60	60	60	60	60

Τι παριστάνει το γινόμενο  $u \cdot t$ ;

β) Γιατί λέμε ότι η ταχύτητα  $u$  και ο χρόνος  $t$  είναι ποσά αντιστρόφως ανάλογα;

γ) Να εκφράσετε την ταχύτητα  $u$  ως συνάρτηση του χρόνου  $t$ . Χρησιμοποιήστε τις τιμές του πίνακα του ερωτήματος (α) για να σχεδιάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

#### Λύση

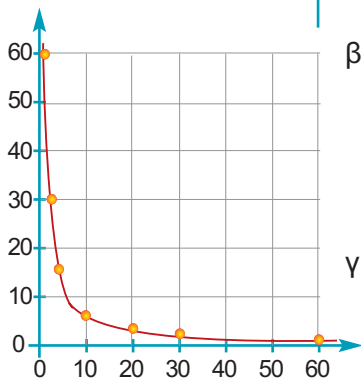
α) Συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Χρόνος $t$	1	2	4	10	20	30	60
Ταχύτητα $u$	60	30	15	6	3	2	1
Απόσταση $s$	60	60	60	60	60	60	60

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο  $u \cdot t$  παριστάνει την απόσταση  $s$  και είναι πάντοτε 60, δηλαδή  $u \cdot t = 60$ .

β) Τα ποσά  $u$  και  $t$ , όπως είδαμε και σε προηγούμενες τάξεις, λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα**, γιατί όταν η τιμή του ενός πολλαπλασιαστεί επί έναν αριθμό, τότε η τιμή του άλλου διαιρείται με τον αριθμό αυτό. Το γινόμενο  $u \cdot t$  των ποσών  $u$  και  $t$ , αν είναι αντιστρόφως ανάλογα, είναι σταθερό.

γ) Σε σύστημα συντεταγμένων τοποθετούμε όλα τα σημεία που έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη  $(t, u)$  του παραπάνω πίνακα. Μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης, φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Όταν δύο ποσά  $x$  και  $y$  είναι **αντιστρόφως ανάλογα**, τότε το **γινόμενο** των αντιστοίχων τιμών τους είναι **σταθερό**. Αν  $\alpha \neq 0$  είναι το σταθερό γινόμενο των  $x$  και  $y$ , τότε το  $y$  εκφράζεται ως συνάρτηση του  $x$  από τον τύπο  $y = \frac{\alpha}{x}$ .

Σε δύο ανάλογα ποσά  $x$  και  $y$ , οι τιμές τους μπορεί να είναι και αρνητικοί αριθμοί.

**ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2**

α) Δίνεται η συνάρτηση  $y = \frac{3}{x}$ ,  $x \neq 0$ . Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα τιμών να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

<b>x</b>	-3	-2	-1	1	2	3
<b>y</b>						

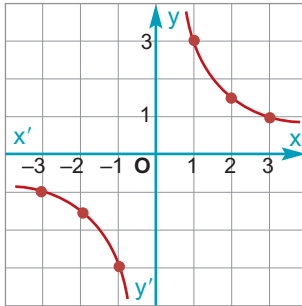
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = -\frac{3}{x}$ ,  $x \neq 0$ .

**Λύση**

α) Συμπληρώνουμε τον πίνακα:

<b>x</b>	-3	-2	-1	1	2	3
<b>y</b>	-1	$-\frac{3}{2}$	-3	3	$\frac{3}{2}$	1

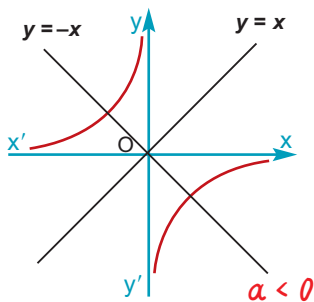
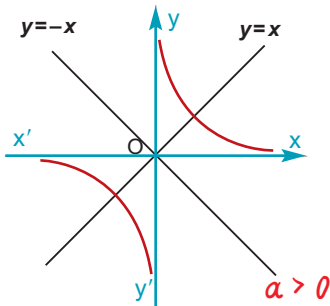
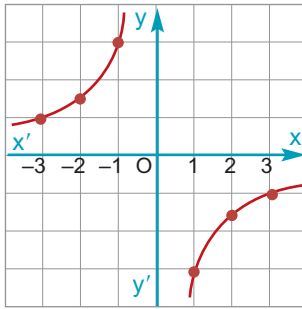
Σε σύστημα συντεταγμένων τοποθετούμε τα σημεία που έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη τιμών  $(x, y)$  του παραπάνω πίνακα. Τα σημεία αυτά σχηματίζουν δύο γραμμές, μία στο πρώτο τεταρτημόριο και μία στο τρίτο, όπως στο διπλανό σχήμα.



β) Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

<b>x</b>	-3	-2	-1	1	2	3
<b>y</b>	1	$\frac{3}{2}$	3	-3	$-\frac{3}{2}$	-1

Τα σημεία αυτά σχηματίζουν δύο γραμμές, μία στο δεύτερο τεταρτημόριο και μία στο τρίτο τεταρτημόριο, όπως στο διπλανό σχήμα.



Οι γραφικές παραστάσεις που κάναμε λέγονται **υπερβολές** και οι δύο γραμμές που τις συνθέτουν λέγονται **κλάδοι** της υπερβολής.

Γενικά:

Η **γραφική παράσταση** της συνάρτησης  $y = \frac{a}{x}$ , όπου  $a \neq 0$  λέγεται **υπερβολή** και αποτελείται από **δύο κλάδους** που βρίσκονται:

- Στο **1ο** και στο **3ο** τεταρτημόριο των αξόνων, όταν  $a > 0$ .
- Στο **2ο** και στο **4ο** τεταρτημόριο των αξόνων, όταν  $a < 0$ .

Και στις δύο περιπτώσεις η γραφική παράσταση μιας υπερβολής έχει:

- **Κέντρο συμμετρίας** την αρχή **O** των αξόνων.
- **Άξονες συμμετρίας** τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις  $y = x$  και  $y = -x$ .

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1**

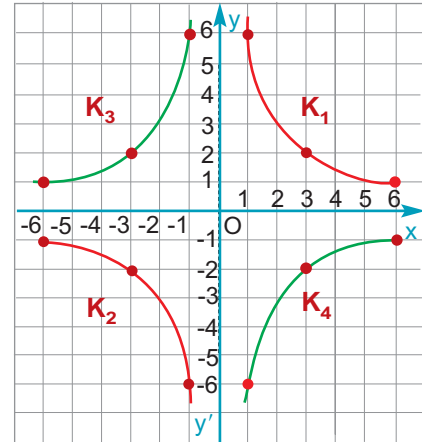
- α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις υπερβολές:  $y = \frac{6}{x}$ ,  $x \neq 0$  και  $y = -\frac{6}{x}$ ,  $x \neq 0$ .
- β) Ποιες είναι οι συμμετρίες που ισχύουν μεταξύ των κλάδων των παραπάνω υπερβολών;

**Λύση:** α) Σχηματίζουμε τους πίνακες τιμών:

x	-6	-3	-1	1	3	6
y	-1	-2	-6	6	2	1

x	-6	-3	-1	1	3	6
y	1	2	6	-6	-2	-1

Κατόπιν σχεδιάζουμε τις δύο υπερβολές.



- β) Αν ονομάσουμε τους τέσσερις κλάδους  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$  όπως φαίνεται στο σχήμα, τότε έχουμε ότι:

- Ο  $K_1$  είναι συμμετρικός με τον  $K_3$  ως προς τον άξονα  $y'y'$ .
  - Ο  $K_1$  είναι συμμετρικός με τον  $K_4$  ως προς τον άξονα  $x'x$ .
  - Ο  $K_1$  είναι συμμετρικός με τον  $K_2$  ως προς την αρχή των αξόνων.
- Παρόμοιες συμμετρίες ισχύουν και για τους άλλους κλάδους.

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ**

1. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις τα ποσά  $x$  και  $y$  είναι αντιστρόφως ανάλογα;

α)	<table border="1"><tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td><math>\frac{1}{2}</math></td><td><math>\frac{1}{3}</math></td><td><math>\frac{1}{5}</math></td></tr></table>	x	2	3	5	y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	β)	<table border="1"><tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,5</td></tr></table>	x	2	3	5	y	0,2	0,3	0,5	γ)	<table border="1"><tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>6</td><td>4</td><td>2,4</td></tr></table>	x	2	3	5	y	6	4	2,4	δ)	<table border="1"><tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-5</td></tr></table>	x	2	3	5	y	-2	-3	-5
x	2	3	5																																				
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$																																				
x	2	3	5																																				
y	0,2	0,3	0,5																																				
x	2	3	5																																				
y	6	4	2,4																																				
x	2	3	5																																				
y	-2	-3	-5																																				

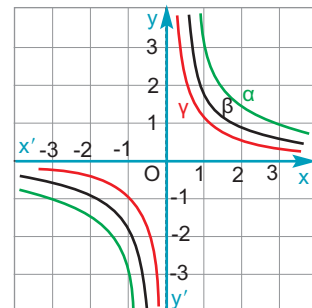
2. Να χαρακτηρίσετε ως Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη) τις παρακάτω προτάσεις:

**ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ**

- α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = \frac{2}{x}$  έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία  $x = 2$ .
- β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = \frac{5}{x}$  διέρχεται από την αρχή  $O$  των αξόνων.
- γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = \frac{10}{x}$  βρίσκεται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο των αξόνων.
- δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = -\frac{5}{x}$  έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή  $O$  των αξόνων.

3. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις (α), (β) και (γ) τριών υπερβολών. Να αντιστοιχίσετε σε καθεμιά την εξίσωσή της.

- A.  $y = \frac{1}{x}$
- B.  $y = \frac{2}{x}$
- Γ.  $y = \frac{3}{x}$





## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1 Τα ποσά  $x$  και  $y$  είναι αντιστρόφως ανάλογα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x	1	2	3	4	6	12
y			4			

- 2 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$\alpha) y = \frac{3}{x} \quad \beta) y = \frac{5}{x} \quad \gamma) y = \frac{20}{x}.$$

- 3 Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$y = \frac{12}{x} \quad \text{και} \quad y = -\frac{12}{x}.$$

- 4 Η απόσταση Γης - Σελήνης είναι περίπου  $\Gamma\Sigma = 380.000$  χιλιόμετρα.

- α) Ποια είναι η ταχύτητα σε km/h ενός πυραύλου που διανύει την απόσταση  $\Gamma\Sigma$  σε 3 ημέρες;

- β) Να εκφράσετε την ταχύτητα  $u$  ενός πυραύλου ως συνάρτηση του χρόνου  $t$  που χρειάζεται για να διανύσει την απόσταση  $\Gamma\Sigma$ . Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

- 5 Θεωρούμε όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν  $36 \text{ cm}^2$ .

- α) Ονομάζοντας  $x$  και  $y$  τις διαστάσεις ενός τέτοιου ορθογωνίου να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	1	2	3	4	6	12	18	36
y								

Τι έχετε να παρατηρήσετε για τα μεγέθη  $x$  και  $y$ ;








- β) Να εκφράσετε το πλάτος  $y$  ενός τέτοιου ορθογωνίου ως συνάρτηση του μήκους  $x$ .  
 γ) Να σχεδιάσετε σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

# Επανάληψη Κεφαλαίου

## 3

### Συναρτήσεις

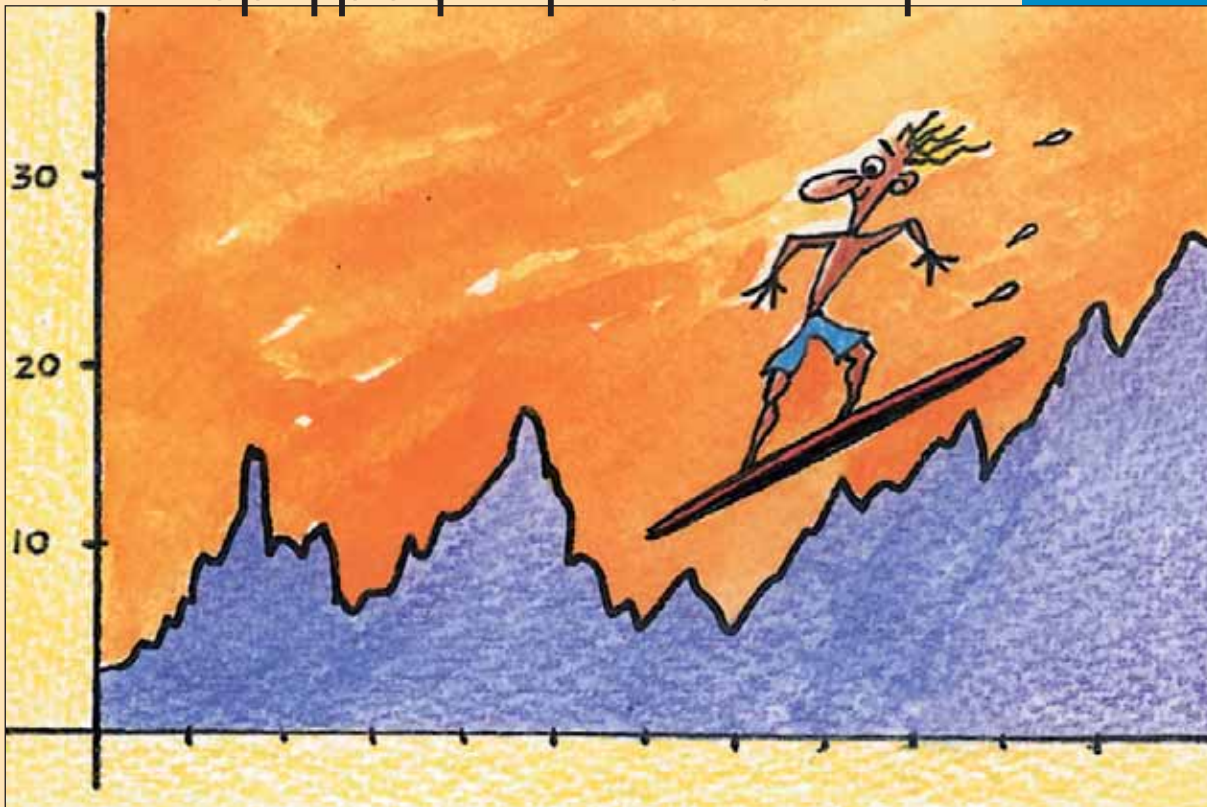


-  Αν ο σταθερός λόγος  $\frac{y}{x}$  δύο ανάλογων ποσών  $x$  και  $y$  είναι ίσος με  $a$ , τότε το  $y$  εκφράζεται ως συνάρτηση του  $x$  από την ισότητα  $y = ax$ .
-  Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = ax$  είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή  $O$  των αξόνων και έχει κλίση  $a$ .
-  Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής  $y = ax + \beta$ ,  $\beta \neq 0$  είναι ευθεία παράλληλη προς την ευθεία  $y = ax$  και τέμνει τον αξόνα  $y'$  στο σημείο με τεταγμένη  $\beta$ .
-  Μια εξίσωση της μορφής  $ax + \beta y = \gamma$ , με  $a \neq 0$  ή  $\beta \neq 0$  παριστάνει ευθεία.
-  Όταν δύο ποσά  $x$  και  $y$  είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους είναι σταθερό. Αν  $a$  είναι η τιμή του γινομένου  $x \cdot y$ , το  $y$  εκφράζεται ως συνάρτηση του  $x$  από τη συνάρτηση  $y = \frac{a}{x}$ ,  $x \neq 0$ .
-  Η γραφική παράσταση μιας υπερβολής  $y = \frac{a}{x}$ ,  $x \neq 0$ , βρίσκεται:
  - στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν  $a > 0$
  - στο 2ο και στο 4ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν  $a < 0$ .
-  Η γραφική παράσταση μιας υπερβολής  $y = \frac{a}{x}$ ,  $x \neq 0$ , έχει:
  - κέντρο συμμετρίας την αρχή  $O$  των αξόνων.
  - άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις  $y = x$  και  $y = -x$ .

# ΜΕΡΟΣ Α΄

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

## Περιγραφική Στατιστική



## ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

- 4.1** Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός - Δείγμα
- 4.2** Γραφικές παραστάσεις
- 4.3** Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων
- 4.4** Ομαδοποίηση παρατηρήσεων
- 4.5** Μέση τιμή - Διάμεσος

**Η** Στατιστική αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της ζωής μας.

*Τα αποτελέσματα των εκλογών ,  
οι προτιμήσεις των καταναλωτών,  
οι μονάδες τηλεθέασης αποτελούν  
μερικά μόνο παραδείγματα της  
χρήσης της Στατιστικής.*

*Αφού μελετήσουμε τις βασικές έννοιες,  
θα εξετάσουμε πώς τα στατιστικά  
αποτελέσματα παριστάνονται γραφικά  
μέσω διαγραμμάτων.*

*Θα γνωρίσουμε, τέλος, τον τρόπο με  
τον οποίο ομαδοποιούμε  
παρατηρήσεις και θα μελετήσουμε δύο  
χαρακτηριστικές τιμές μιας  
στατιστικής έρευνας:  
τη μέση τιμή και τη διάμεσο.*



## 4.1. Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα

### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Από μία έρευνα που έγινε μεταξύ των μαθητών ενός Γυμνασίου στη Βόρεια Ελλάδα σχετικά με τις ποδοσφαιρικές προτιμήσεις τους προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα: Από τους 60 μαθητές που απάντησαν στην έρευνα, 12 μαθητές προτιμούν τον ΠΑΟΚ, 6 την ΑΕΚ, 9 τον Ολυμπιακό, 18 τον Άρη Θεσσαλονίκης, 3 τον Παναθηναϊκό, 9 τον Ηρακλή και 3 τον ΟΦΗ.



- Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών αυτού του Γυμνασίου που προτιμούν τον Άρη, τον ΠΑΟΚ και ποιο το ποσοστό των μαθητών που προτιμούν τον Ηρακλή;
- Ποια είναι τα αντίστοιχα ποσοστά για τις υπόλοιπες ομάδες;
- Είναι αξιόπιστα τα προηγούμενα αποτελέσματα, δηλαδή γενικεύονται για όλη την Ελλάδα;

### Λύση

- Οι μαθητές που προτιμούν τον Άρη είναι 18 στους 60. Μετατρέπουμε αυτόν τον αριθμό σε ποσοστό επί τοις εκατό:  $\frac{18}{60} = 0,3 = 30\%$   
Ομοίως, έχουμε:
  - ❖ Για τον ΠΑΟΚ:  $\frac{12}{60} = 0,2 = 20\%$
  - ❖ Για τον Ηρακλή:  $\frac{9}{60} = 0,15 = 15\%$
- Για τις υπόλοιπες ομάδες τα ποσοστά είναι:
  - ❖ Ολυμπιακός:  $\frac{9}{60} = 0,15 = 15\%$
  - ❖ ΑΕΚ:  $\frac{6}{60} = 0,1 = 10\%$
  - ❖ Παναθηναϊκός:  $\frac{3}{60} = 0,05 = 5\%$
  - ❖ ΟΦΗ:  $\frac{3}{60} = 0,05 = 5\%$
- Προφανώς, τα αποτελέσματα δεν είναι αξιόπιστα, δηλαδή δε μπορούν να γενικευθούν για όλο το μαθητικό πληθυσμό των Γυμνασίων της Ελλάδας.

Για να εξασφαλίσουμε αξιοπιστία στα αποτελέσματα, θα πρέπει να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα διαφορετικά.



Θέλουμε να εξετάσουμε τις ποδοσφαιρικές προτιμήσεις των μαθητών όλων των Γυμνασίων της Ελλάδας. Οι μαθητές αυτοί αποτελούν τον «πληθυσμό» της έρευνάς μας.

Γενικά:

Ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία μελετάμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό τους, λέγεται **πληθυσμός**. Το χαρακτηριστικό (π.χ. η ομάδα προτίμησης στο ποδόσφαιρο) ως προς το οποίο μελετάμε τα στοιχεία ενός πληθυσμού, ονομάζεται **μεταβλητή**.

Επειδή στην Ελλάδα υπάρχουν περίπου 400.000 μαθητές Γυμνασίου, δε θα μπορούσαμε φυσικά να τους ρωτήσουμε όλους. Στη δραστηριότητα είχαμε ένα «**δείγμα**» από 60 μαθητές, δηλαδή κάναμε μία «**δειγματοληψία**» (ή «**δημοσκόπηση**»). Το πλήθος των μαθητών που ρωτήσαμε (60 άτομα), αποτελεί το «**μέγεθος του δείγματος**».

Στη συνέχεια, διαπιστώσαμε ότι τα αποτελέσματα που βρήκαμε δε μπορούν να γενικευθούν για όλο τον πληθυσμό, αφού το δείγμα ήταν μόνο από μία περιοχή της Ελλάδας και δεν είναι «**αντιπροσωπευτικό**» του πληθυσμού.

### Απογραφή και Δειγματοληψία

Η συγκέντρωση στατιστικών δεδομένων γίνεται με απογραφή, με διαρκή εγγραφή και κυρίως με δειγματοληψία.



- Με την απογραφή συγκεντρώνονται στοιχεία απ' όλα τα άτομα του πληθυσμού σε μία καθορισμένη ημερομηνία. Στη χώρα μας η απογραφή του πληθυσμού γίνεται κάθε 10 χρόνια από την ΕΣΥΕ (Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδας).
- Η διαρκής εγγραφή γίνεται καθημερινά στα ληξιαρχεία στα οποία καταχωρούνται γεννήσεις, γάμοι κ.τ.λ., στα τελωνεία για εμπορεύματα, στα νοσοκομεία για ασθένειες κ.τ.λ.
- Σε μια δειγματοληψία συγκεντρώνουμε στοιχεία μόνο από ένα μέρος του πληθυσμού, που λέγεται δείγμα και προσπαθούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για όλο τον πληθυσμό.

Η δειγματοληψία, σε σύγκριση με την απογραφή, έχει το πλεονέκτημα του μικρού κόστους και της ταχύτητας συγκέντρωσης των πληροφοριών. Από την άλλη πλευρά, όμως, έχει το μειονέκτημα ότι ο σχεδιασμός και η εκτέλεσή της χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή, γιατί διαφορετικά δεν οδηγούν σε σωστά συμπεράσματα.

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

Για να εκτιμήσουμε το αποτέλεσμα των ερχομένων βουλευτικών εκλογών, ρωτήσαμε 3.000 φοιτητές για το κόμμα που θα ψηφίσουν.

- α) Ποιος είναι ο πληθυσμός και ποιο είναι το δείγμα; Είναι το δείγμα αντιπροσωπευτικό;  
 β) Αν οι φοιτητές προτίμησαν τα κόμματα Α, Β, Γ με ποσοστά 40%, 35% και 25% αντίστοιχα, να βρείτε πόσοι από αυτούς προτίμησαν το Α κόμμα, πόσοι το Β και πόσοι το Γ;

**Λύση:** α) Ο πληθυσμός είναι όλοι οι Έλληνες ψηφοφόροι, ενώ το δείγμα είναι οι 3.000 φοιτητές. Το δείγμα αυτό δεν είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού, γιατί οι φοιτητές αποτελούν μια ειδική κατηγορία ψηφοφόρων (έχουν νεαρή ηλικία, ανώτερο επίπεδο σπουδών και ριζοσπαστικό τρόπο σκέψης).

β) Το κόμμα Α το προτίμησαν  $3.000 \cdot \frac{40}{100} = 1.200$  φοιτητές.

Το κόμμα Β το προτίμησαν  $3.000 \cdot \frac{35}{100} = 1.050$  φοιτητές.

Το κόμμα Γ το προτίμησαν  $3.000 \cdot \frac{25}{100} = 750$  φοιτητές.

**ΕΡΩΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ**

Ένα εργοστάσιο που κατασκευάζει απορρυπαντικά για να προωθήσει ένα νέο προϊόν, έκανε πρώτα μία έρευνα της ελληνικής αγοράς. Απευθύνθηκε σε μια εταιρεία δημοσκοπήσεων και ζήτησε να μάθει πόσες φορές οι ελληνίδες νοικοκυρές αγοράζουν απορρυπαντικό κάθε μήνα. Η εταιρεία δημοσκοπήσεων επέλεξε να ρωτήσει 2000 νοικοκυρές και έδωσε τα αποτελέσματα στον εργοστασιάρχη.

Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

- Ο πληθυσμός της έρευνας είναι:
  - Όλοι οι Έλληνες πολίτες.
  - 2000 νοικοκυρές.
  - Όλες οι ελληνίδες νοικοκυρές.
  - Όλοι οι πελάτες των σούπερ-μάρκετ.
- Η μεταβλητή της έρευνας είναι:
  - Οι ελληνίδες νοικοκυρές.
  - Τα απορρυπαντικά που κυκλοφορούν στην Ελλάδα.
  - Το απορρυπαντικό που χρησιμοποιούν οι ελληνίδες νοικοκυρές.
  - Πόσες φορές αγοράζουν απορρυπαντικό οι ελληνίδες νοικοκυρές.
- Το μέγεθος του δείγματος είναι:
  - Περίπου 5.000.000 ελληνίδες νοικοκυρές.
  - Οι 2000 νοικοκυρές που ρωτήθηκαν.
  - Το πλήθος των απορρυπαντικών που αγοράζονται κάθε μήνα.
  - Όλες οι μάρκες απορρυπαντικών που κυκλοφορούν στην ελληνική αγορά.





## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1** Να υπολογίσετε χωρίς μολύβι και χαρτί:

- α) το 100% του 72
- β) το 50% του 60
- γ) το 25% του 80
- δ) το 10% του 70
- ε) το 20% του 80
- στ) το 72% του 100

**2** Να υπολογίσετε:

- α) το 15% του 80
- β) το 40% του 60
- γ) το 35% του 120
- δ) το 75% του 80
- ε) το 30% του 30
- στ) το 5% του 1000

**3** Το 15 είναι το 25% του αριθμού:

- α) 25, β) 60, γ) 100, δ) 40.

**4** Το 15% του αριθμού 200 είναι:

- α) 30, β) 7, γ) 21, δ) 42.

**5** Σε μια έρευνα που έγινε σε 2000 άτομα οι 300 ήταν νέοι κάτω των 25 ετών. Τι ποσοστό του δείγματος αντιπροσωπεύει ο αριθμός αυτός;

**6** Σε μια δημοσκόπηση που έγινε για τις Προεδρικές εκλογές, 360 άτομα απάντησαν ότι προτιμούν τον υποψήφιο «Α», 280 άτομα τον υποψήφιο «Β», και 160 άτομα τον υποψήφιο «Γ». Ποια είναι τα ποσοστά κάθε υποψηφίου σ' αυτή τη δημοσκόπηση;



**7** Σ' ένα σχολείο φοιτούν 120 αγόρια και 180 κορίτσια. Στη Β' Γυμνασίου φοιτούν συνολικά 90 άτομα.

- α) Ποιο είναι το ποσοστό των κοριτσιών στο σχολείο;
- β) Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών της Β' Γυμνασίου;

**8** Για να βρούμε τα ποσοστά των οπαδών των ομάδων ποδοσφαίρου, ρωτήσαμε 1000 άτομα στον Πειραιά ποια ομάδα υποστηρίζουν.



Ποιος είναι ο πληθυσμός της έρευνας και ποιο το δείγμα; Είναι το δείγμα αξιόπιστο;

**9** Η Κατερίνα για να βρεί το δημοφιλέστερο τραγούδι την περίοδο αυτή, σκοπεύει να ρωτήσει τους μαθητές ενός σχολείου. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί το αποτέλεσμα της έρευνας δε θα είναι αντικειμενικό; Τι πρέπει να κάνει η Κατερίνα για να καταλήξει σ' ένα αξιόπιστο συμπέρασμα;



## 4.2. Γραφικές παραστάσεις



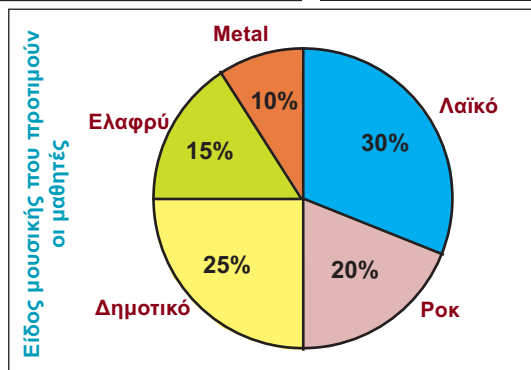
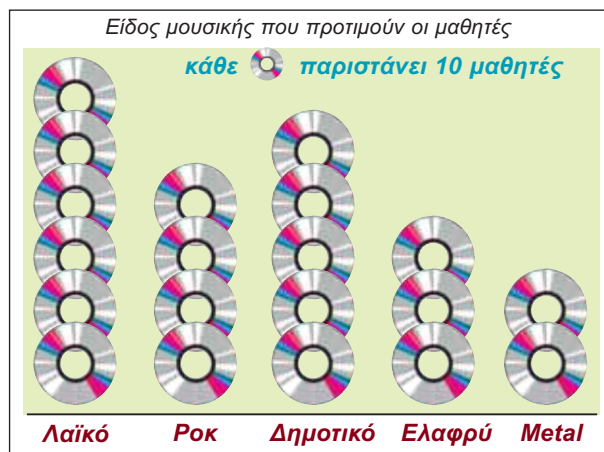
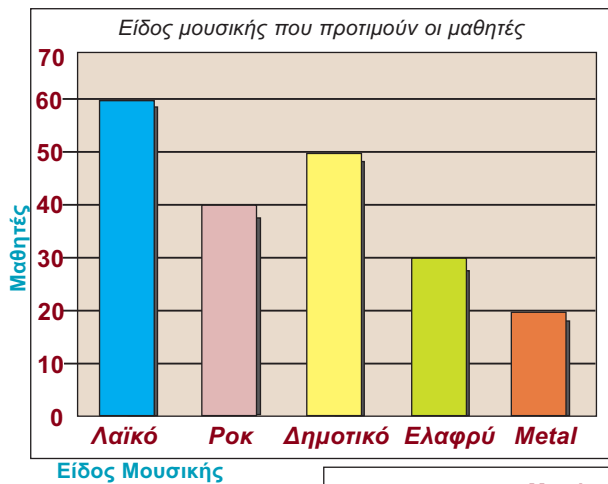
### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Μια δισκογραφική εταιρεία προσπαθεί να επεκτείνει τις πωλήσεις της σε εφήβους. Προτού να επενδύσει σε είδη μουσικής που προτιμούν οι μαθητές, αποφασίζει να κάνει μία έρευνα ανάμεσα σε 200 μαθητές που επέλεξε τυχαία απ' όλη την Ελλάδα. Ο υπεύθυνος, που έκανε την έρευνα, παρουσίασε στο διευθυντή της εταιρείας τις παρακάτω τρεις γραφικές παραστάσεις (διαγράμματα).

- Πόσοι μαθητές προτίμησαν κάθε είδος μουσικής;
- Σε ποια είδη μουσικής προτείνετε να επενδύσει η εταιρεία;

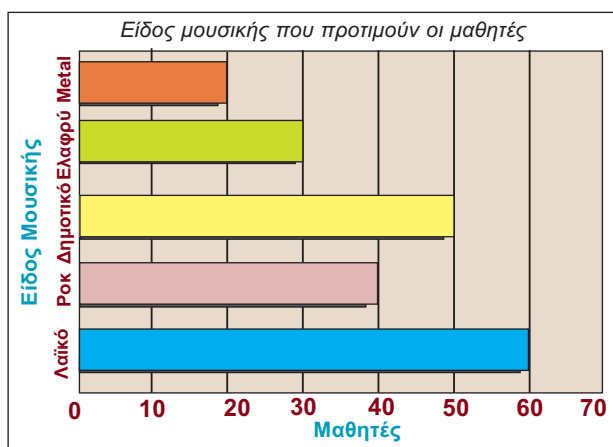
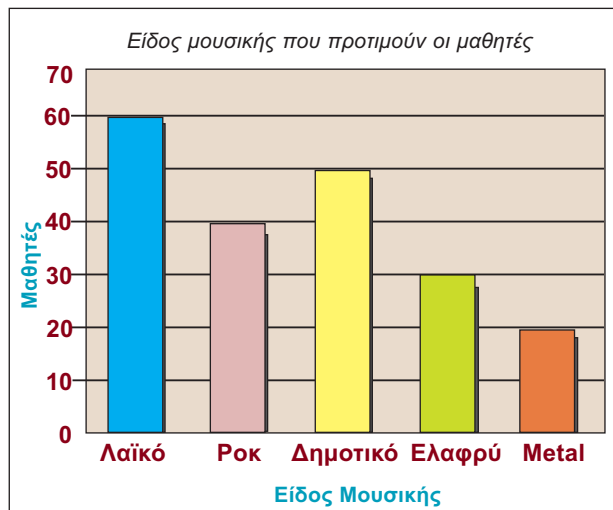
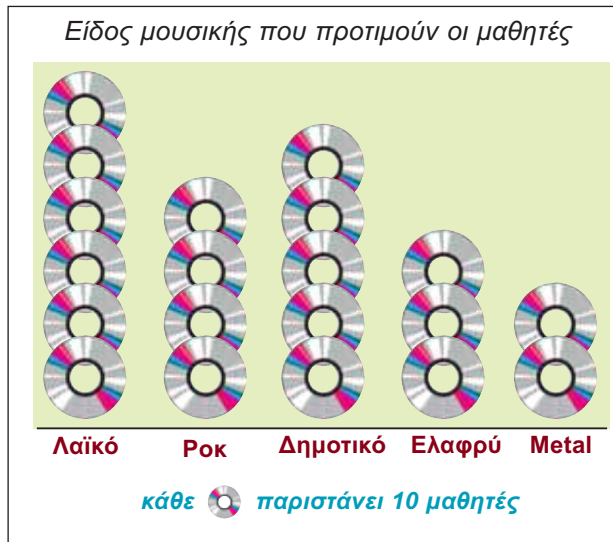
### Λύση

- Παρατηρούμε ότι 60 μαθητές στους 200 προτιμούν λαϊκό τραγούδι, δηλαδή ποσοστό 30%. 40 μαθητές στους 200 προτιμούν το ροκ, δηλαδή ποσοστό 20%. 50 μαθητές στους 200 προτιμούν το δημοτικό τραγούδι, δηλαδή ποσοστό 25%. 30 μαθητές στους 200 προτιμούν το ελαφρύ, δηλαδή ποσοστό 15%, ενώ 20 μαθητές στους 200 προτιμούν το Metal, δηλαδή ποσοστό 10%.
- Η εταιρεία πρέπει να επενδύσει κατά σειρά προτεραιότητας στο λαϊκό, δημοτικό, ροκ, ελαφρύ και metal.





Τέτοια διαγράμματα βλέπουμε καθημερινά στις εφημερίδες και τα περιοδικά, που παρουσιάζουν τα αποτελέσματα μιας έρευνας με τρόπο πιο παραστατικό και κατανοητό. Ας δούμε μερικά διαγράμματα που χρησιμοποιούμε πιο συχνά:



## Εικονογράμματα

Στα **εικονογράμματα** χρησιμοποιούμε την εικόνα ενός αντικειμένου για να δείξουμε πόσες φορές αυτό παρουσιάζεται στην έρευνά μας. Σ' ένα τέτοιο διάγραμμα, βέβαια, πρέπει να υπάρχει ο **τίτλος** που μας κατατοπίζει για το είδος και τη μεταβλητή της έρευνας, η **κλίμακα** που δείχνει τον αριθμό των αντικειμένων που παριστάνει η εικόνα (π.χ. στο διπλανό εικονογράμμα, κάθε CD παριστάνει 10 μαθητές) καθώς και ο **τίτλος κάθε στήλης** (π.χ. λαϊκό - ροκ - δημοτικό κ.τ.λ.)

## Ραβδογράμματα

Στα **ραβδογράμματα** χρησιμοποιούμε ορθογώνια για να δείξουμε το πλήθος των μαθητών που δήλωσαν ότι προτιμούν ένα συγκεκριμένο είδος μουσικής. Σ' ένα τέτοιο ραβδογράμμα πρέπει, βέβαια, να υπάρχουν ο τίτλος του που μας κατατοπίζει για το είδος της έρευνας και οι τίτλοι των αξόνων. Αυτοί οι τίτλοι αξόνων μας δείχνουν ότι ο οριζόντιος άξονας παριστάνει τα είδη της μουσικής και ο κάθετος άξονας τον αριθμό των μαθητών.

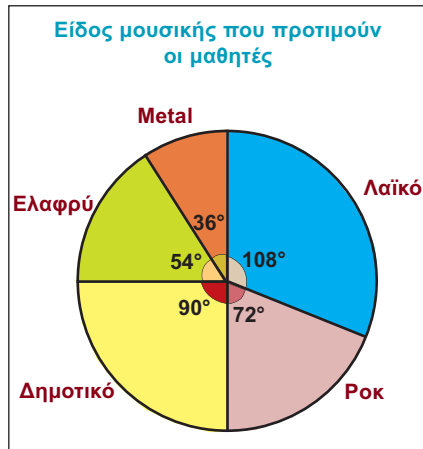
Τα ραβδογράμματα, γενικά, σχεδιάζονται εύκολα και είναι πιο ακριβή από τα εικονογράμματα.

Τα ορθογώνια ενός ραβδογράμματος μπορεί να είναι τοποθετημένα οριζόντια, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Πολλές φορές αντί για ορθογώνια, σχεδιάζουμε κάθετες γραμμές.

## Κυκλικά διαγράμματα

Στα **κυκλικά διαγράμματα** μπορούμε να δούμε τι μέρος του δείγματος προτιμά κάθε είδος μουσικής. Συγκεκριμένα, το δείγμα παριστάνεται με έναν κυκλικό δίσκο και οι τιμές της μεταβλητής με κυκλικούς τομείς



διαφορετικού χρώματος. Πώς, όμως, υπολογίζουμε τη γωνία κάθε κυκλικού τομέα;

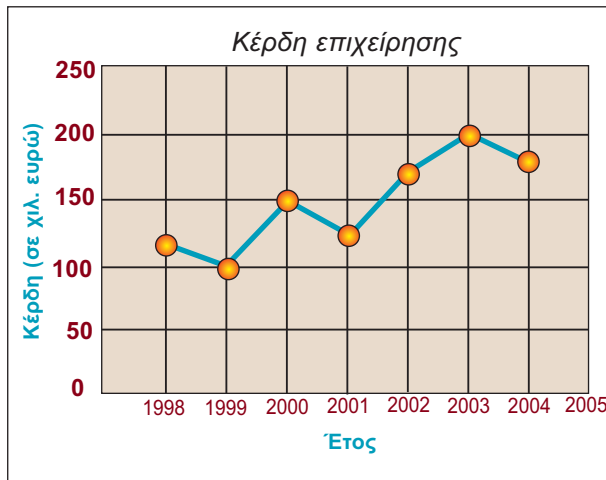
Επειδή έλαβαν μέρος στην έρευνα 200 άτομα και ο κύκλος έχει  $360^\circ$ , θα πρέπει τα 200 άτομα να αντιστοιχούν στις  $360^\circ$ .

Επομένως, τα 60 άτομα που δήλωσαν ότι προτιμούν το λαϊκό τραγούδι, θα πρέπει να αντιστοιχούν σε μία γωνία  $\theta$ , τέτοια ώστε:  $\frac{200}{60} = \frac{360^\circ}{\theta}$ .

Επομένως έχουμε:  $\theta = \frac{60}{200} \cdot 360^\circ$  ή  $\theta = 108^\circ$ .

Με όμοιο τρόπο υπολογίζουμε και τις υπόλοιπες γωνίες του κυκλικού διαγράμματος:

- Για το ροκ:  $\theta = \frac{40}{200} \cdot 360^\circ = 72^\circ$
- Για το δημοτικό:  $\theta = \frac{50}{200} \cdot 360^\circ = 90^\circ$
- Για το ελαφρύ:  $\theta = \frac{30}{200} \cdot 360^\circ = 54^\circ$
- Για το metal:  $\theta = \frac{20}{200} \cdot 360^\circ = 36^\circ$



### Χρονογράμματα

Τα **χρονογράμματα** είναι διαγράμματα, τα οποία χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε τη χρονική εξέλιξη ενός φαινομένου. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να παραστήσουμε τα κέρδη μιας εταιρείας (σε χιλιάδες €) κατά τα έτη 1998 - 2004 (πίνακας 1), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το διπλανό χρονογράμμα.

Έτος	Κέρδη (χιλ. €)
1998	120
1999	100
2000	150
2001	130
2002	170
2003	200
2004	180

Πίνακας 1

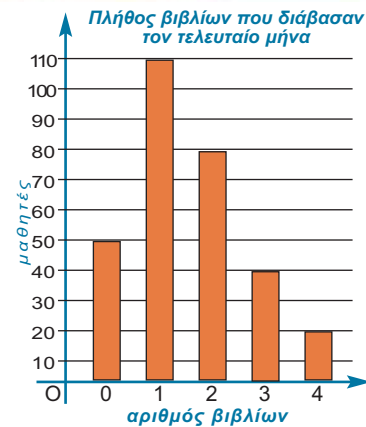
## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε μια έρευνα που έγινε σε δείγμα 300 μαθητών σχετικά με το πλήθος των εξωσχολικών βιβλίων που διάβασαν τον τελευταίο μήνα, προέκυψαν τα αποτελέσματα του διπλανού πίνακα. Για τα δεδομένα αυτά να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα, κυκλικό διάγραμμα και εικονόγραμμα (με εικόνα = 10 μαθητές).

Αριθμός βιβλίων	Μαθητές
0	50
1	110
2	80
3	40
4	20

**Λύση:** ➤ **Για το ραβδόγραμμα:**

Στον οριζόντιο άξονα χ'χ τοποθετούμε τους αριθμούς 0, 1, 2, 3, 4 της πρώτης στήλης του πίνακα και στον κατακόρυφο άξονα γ'γ τους αριθμούς 0 έως 110 (ανά 10). Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε ορθογώνια με ίσες βάσεις και αντίστοιχα ύψη, ίσα με τους αριθμούς της δεύτερης στήλης του πίνακα.

➤ **Για το κυκλικό διάγραμμα:**

Για να κατασκευάσουμε το κυκλικό διάγραμμα, πρέπει να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες. Το πλήθος των ατόμων του δείγματος (300 άτομα) αντιστοιχεί στις  $360^\circ$  του κύκλου. Άρα:

– Για τους 50 μαθητές που δε διάβασαν κανένα βιβλίο έχουμε:  $\frac{300}{50} = \frac{360^\circ}{\theta}$

$$\text{οπότε: } \theta = \frac{50}{300} \cdot 360 = \frac{1}{6} \cdot 360 = 60^\circ.$$

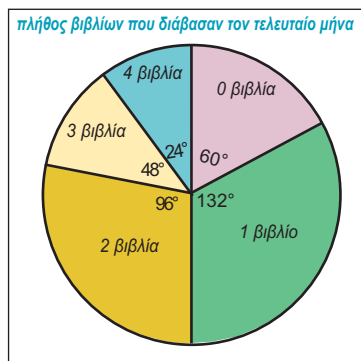
– Ομοίως, για τους 110 μαθητές που διάβασαν ένα βιβλίο έχουμε:

$$\theta = \frac{110}{300} \cdot 360 = 11 \cdot 12 = 132^\circ.$$

– Για τους 80 μαθητές που διάβασαν 2 βιβλία:  $\theta = \frac{80}{300} \cdot 360 = 8 \cdot 12 = 96^\circ.$

– Για τους 40 μαθητές που διάβασαν 3 βιβλία:  $\theta = \frac{40}{300} \cdot 360 = 4 \cdot 12 = 48^\circ.$

– Για τους 20 μαθητές που διάβασαν 4 βιβλία:  $\theta = \frac{20}{300} \cdot 360 = 2 \cdot 12 = 24^\circ.$



Με τη βοήθεια ενός μοιρογνωμόνιου χωρίζουμε τον κύκλο σε κυκλικούς τομείς με επίκεντρες γωνίες  $60^\circ$ ,  $132^\circ$ ,  $96^\circ$ ,  $48^\circ$  και  $24^\circ$  και συμπληρώνουμε τους τίτλους σε κάθε κυκλικό τομέα.

➤ **Για το εικονόγραμμα:**

Αφού η εικόνα  αντιστοιχεί σε 10 μαθητές:

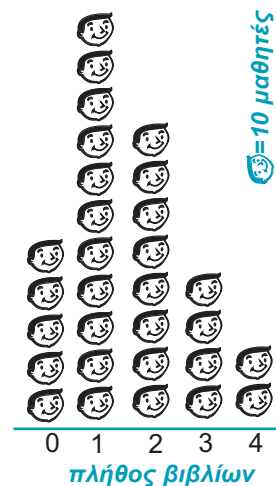
– Για 50 μαθητές που δε διάβασαν κανένα βιβλίο, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε 5 φορές την εικόνα  $\left(\frac{50}{10} = 5\right).$

– Ομοίως, για τους 110 μαθητές που διάβασαν ένα βιβλίο, θα χρησιμοποιήσουμε  $\frac{110}{10} = 11$  φορές την εικόνα.

– Ομοίως, βρίσκουμε για 80 μαθητές, 8 φορές την εικόνα.

– Για 40 μαθητές, 4 φορές την εικόνα.

– Για 20 μαθητές, 2 φορές την εικόνα.







## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Ρωτήσαμε μερικούς μαθητές ενός Γυμνασίου πόσες φορές πήγαν στον κινηματογράφο τον τελευταίο μήνα. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα.



Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

	A	B	Γ	Δ
1. Το πλήθος των μαθητών που ρωτήθηκαν ήταν:	8	5	25	100
2. Πόσοι μαθητές πήγαν 3 φορές σε κινηματογράφο τον τελευταίο μήνα;	6	5	8	0
3. Πόσοι μαθητές πήγαν 5 φορές σε κινηματογράφο τον τελευταίο μήνα;	3	0	8	5
4. Πόσοι μαθητές πήγαν τουλάχιστον 2 φορές σε κινηματογράφο τον τελευταίο μήνα;	10	8	18	15
5. Πόσοι μαθητές πήγαν το πολύ 2 φορές σε κινηματογράφο τον τελευταίο μήνα;	10	8	18	15
6. Οι μαθητές που δεν πήγαν ούτε μία φορά σε κινηματογράφο τον τελευταίο μήνα αποτελούν ποσοστό:	3%	12%	10%	30%

2. Σε μία έρευνα ρωτήθηκαν 400 φίλαθλοι μιας πόλης ποια από τις τρεις ομάδες ποδοσφαίρου της πόλης τους είναι η καλύτερη. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στο διπλανό κυκλικό διάγραμμα.

Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:




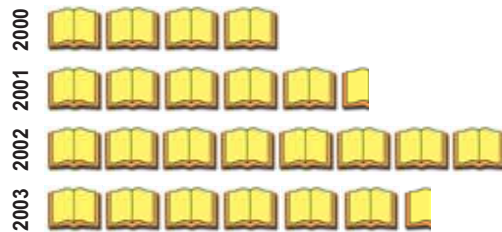
	A	B	Γ	Δ
1. Τι ποσοστό αποτελούν οι οπαδοί της «κίτρινης καταιγίδας»;	25%	90%	30%	50%
2. Τι ποσοστό αποτελούν οι οπαδοί της «πράσινης λαίλαπας»;	35%	40%	90%	30%
3. Τι ποσοστό αποτελούν οι οπαδοί της «κόκκινης θύελλας»;	160%	35%	80%	25%
4. Πόσα άτομα υποστηρίζουν την «κίτρινη καταιγίδα»;	90	200	100	25
5. Η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στην «κόκκινη θύελλα» είναι:	126°	150°	160°	144°









## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1 Το παρακάτω εικονόγραμμα μας πληροφορεί για τον αριθμό των βιβλίων που πούλησε ένας εκδοτικός οίκος τα έτη 2000, 2001, 2002 και 2003.

( = 20.000 βιβλία)



- α) Να βρείτε πόσα βιβλία πουλήθηκαν κάθε έτος και πόσα συνολικά και τα τέσσερα έτη.  
 β) Να υπολογίσετε το ποσοστό των συνολικών πωλήσεων που αντιπροσωπεύουν οι πωλήσεις που πραγματοποιήθηκαν το έτος 2002.  
 γ) Να μετατρέψετε το παραπάνω εικονόγραμμα σε χρονόγραμμα.
- 2 Με τη βοήθεια του παρακάτω εικονογράμματος ( = 12 μαθητές):
- α) Να βρείτε πόσους μαθητές έχει συνολικά το Γυμνάσιο αυτό.  
 β) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που προτιμούν το λεωφορείο.  
 γ) Να παραστήσετε τα δεδομένα με ραβδόγραμμα.

Λεωφορείο	
Αυτοκίνητο	
Ποδήλατο	
Παπάκι	
Με τα πόδια	

- 3 Σε μία αποθήκη υπάρχουν τέσσερις τύποι κινητών τηλεφώνων Α, Β, Γ, Δ σε ποσοστό 10%, 30%, 40%, 20% αντίστοιχα.
- α) Να παραστήσετε τα δεδομένα με κυκλικό διάγραμμα.  
 β) Να βρείτε πόσα κινητά τηλέφωνα υπάρχουν από κάθε τύπο, αν ο συνολικός τους αριθμός είναι 400.

- 4 Ρωτήσαμε τους μαθητές ενός Γυμνασίου πόσες ημέρες απουσίασαν από το σχολείο τον τελευταίο μήνα. Οι απαντήσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός ημερών	Αριθμός μαθητών
0	35
1	12
2	8
3	2
4	
<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>60</b>

- α) Πόσοι μαθητές απουσίασαν 4 ημέρες; Τι ποσοστό αποτελούν αυτοί οι μαθητές;  
 β) Να παραστήσετε τα δεδομένα του πίνακα με ραβδόγραμμα και με κυκλικό διάγραμμα.

- 5 Δίνεται το διπλανό κυκλικό διάγραμμα:
- α) Να βρείτε τη γωνία ω.  
 β) Να το μετατρέψετε σε εικονόγραμμα.



- 6 Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τον αριθμό των λεπτών που μελετούν κατά μέσο όρο ημερησίως, οι μαθητές της Γ' Γυμνασίου ενός σχολείου.

Αριθμός ωρών	% Αγοριών	% Κοριτσιών
30'	6%	4%
60'	14%	12%
90'	33%	27%
120'	30%	33%
150'	12%	16%
180'	5%	8%

- α) Να παραστήσετε τα δεδομένα του πίνακα με ένα ραβδόγραμμα.  
 β) Να βρείτε το ποσοστό (%) των μαθητών που μελετούν τουλάχιστον 90', καθώς και το ποσοστό των μαθητών που μελετούν το πολύ 120'.

## 4.3. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

2	4	1	3	5	3	4	4	5	3
5	4	6	7	4	7	4	7	2	4
1	7	5	6	2	3	6	1	5	6
4	3	2	4	4	6	5	4	7	3
6	2	5	4	5	3	5	4	5	2

### Συχνότητες

Ρωτήσαμε ένα δείγμα 50 μαθητών Γυμνασίου πόσες ώρες περίπου βλέπουν τηλεόραση την εβδομάδα. Οι απαντήσεις τους (με τη σειρά που καταγράφηκαν) φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **παρατηρήσεις**.

Τα αποτελέσματα αυτά, όμως, έτσι όπως είναι τοποθετημένα, δε μας δίνουν μια σαφή εικόνα της έρευνας. Δε φαίνεται εύκολα, δηλαδή, πόσοι μαθητές βλέπουν τηλεόραση π.χ. 5 ώρες την εβδομάδα και πόσοι 3 ώρες την εβδομάδα. Για το λόγο αυτό, τοποθετούμε τα παραπάνω στατιστικά δεδομένα, σε έναν πίνακα, ως εξής:



Ώρες (τιμές) τηλεθέασης την εβδομάδα	Διαλογή	Αριθμός μαθητών (συχνότητες)
1		3
2		6
3		7
4		13
5		10
6		6
7		5
	<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>50</b>

Πίνακας 1

Όπως βλέπουμε:

- Στην πρώτη στήλη του παραπάνω πίνακα έχουμε γράψει κατά σειρά μεγέθους το πλήθος των ωρών που μπορεί κάποιος μαθητής να έχει παρακολουθήσει τηλεόραση. Οι αριθμοί αυτοί είναι 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7 και λέγονται **τιμές**.
- Στη δεύτερη στήλη κάνουμε **διαλογή** των παρατηρήσεων. Δηλαδή, διαβάζουμε με τη σειρά τη λίστα των δεδομένων και καταγράφουμε κάθε παρατήρηση με συμβολικό τρόπο, με μία γραμμή (|) για την αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής. Για ευκολία στην καταμέτρηση σχηματίζουμε πεντάδες (||||).
- Στην τρίτη στήλη μεταφέρουμε τα αποτελέσματα της διαλογής. Έτσι, η απάντηση «βλέπω περίπου 3 ώρες την εβδομάδα τηλεόραση» εμφανίζεται 7 φορές. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η τιμή «3 ώρες» έχει **συχνότητα** 7. Ομοίως, η τιμή «4 ώρες» έχει συχνότητα 13 και η τιμή «7 ώρες» έχει συχνότητα 5. Γενικά, στον παραπάνω πίνακα φαίνεται πώς κατανέμονται οι 50 μαθητές του δείγματος ως προς το χαρακτηριστικό: «πόσες ώρες βλέπουν τηλεόραση την εβδομάδα». Για το λόγο αυτό, ο συγκεκριμένος πίνακας δίνει μια **κατανομή συχνοτήτων**.

## Σχετικές Συχνότητες

Ο παραπάνω πίνακας μας δίνει κάποιες πληροφορίες, όπως για παράδειγμα, ότι η τιμή 4 έχει συχνότητα 13 (δηλαδή 13 από τους μαθητές απάντησαν ότι βλέπουν τηλεόραση 4 ώρες την εβδομάδα). Η συχνότητα όμως αυτή (δηλαδή ο αριθμός 13) δεν έχει καμιά αξία μόνη της, αν δεν αναφερθεί ο αριθμός των μαθητών που ρωτήθηκαν. Πράγματι, άλλη αξία έχει η συχνότητα 13 στους 50 και άλλη θα έχει η συχνότητα 13 στους 100 ή 13 στους 1000 μαθητές.

Δηλαδή, είναι ανάγκη να ξέρουμε τι μέρος του δείγματος αποτελούν οι 13 μαθητές. Το μέρος αυτό εκφράζεται με το κλάσμα  $\frac{13}{50}$ , το οποίο λέγεται **σχετική συχνότητα** της τιμής 4. Συνήθως, τη σχετική συχνότητα τη μετατρέπουμε σε ποσοστό επί τοις εκατό %.

Έτσι, έχουμε:  $\frac{13}{50} = 0,26 = 26\%$ .

Δηλαδή, το 26% των μαθητών αυτού του Γυμνασίου βλέπει 4 ώρες την εβδομάδα τηλεόραση.

Για να βρούμε τη **σχετική συχνότητα** μιας τιμής, **διαιρούμε τη συχνότητα της τιμής αυτής με το πλήθος όλων των παρατηρήσεων**. Στη συνέχεια, εκφράζουμε τον αριθμό αυτό ως ποσοστό επί τοις εκατό (%).

Με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε όλες τις σχετικές συχνότητες του πίνακα συχνοτήτων που είναι αντίστοιχα:

$$\frac{3}{50} = 0,06 = 6\%, \quad \frac{6}{50} = 0,12 = 12\%, \quad \frac{7}{50} = 0,14 = 14\%, \quad \frac{13}{50} = 0,26 = 26\%,$$

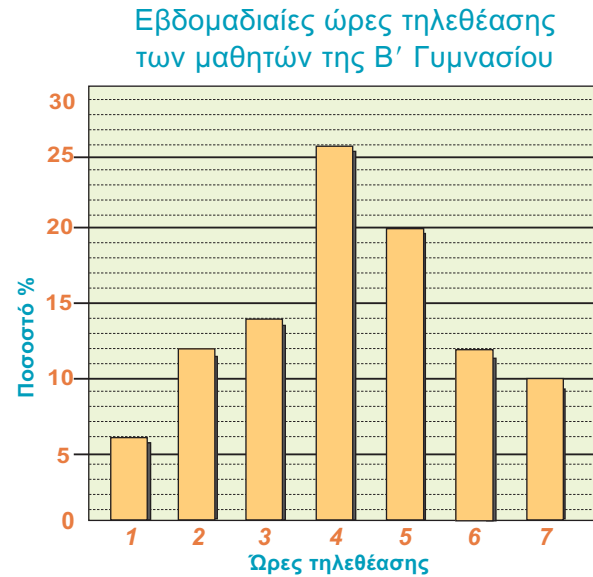
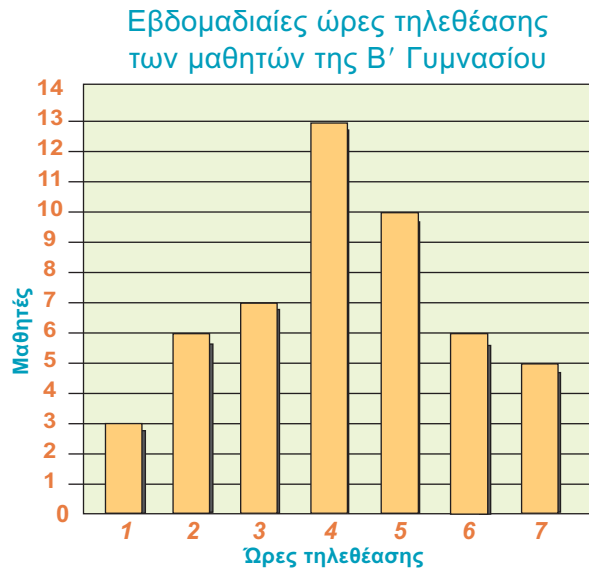
$$\frac{10}{50} = 0,20 = 20\%, \quad \frac{6}{50} = 0,12 = 12\% \text{ και } \frac{5}{50} = 0,10 = 10\%.$$

Τώρα μπορούμε προσθέτοντας μια ακόμη στήλη στον πίνακα 1 να έχουμε έναν πίνακα, στον οποίο να φαίνονται οι **τιμές**, οι **συχνότητες** και οι **σχετικές συχνότητες** των παρατηρήσεων της έρευνας. Ένας τέτοιος πίνακας ονομάζεται **πίνακας κατανομής συχνοτήτων**.

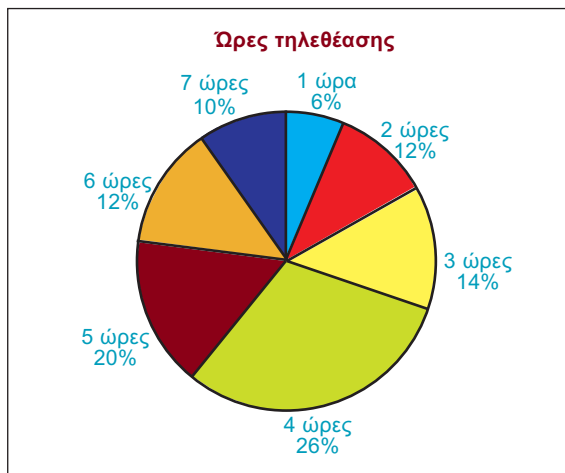
Τιμές (ώρες) τηλεθέασης	Διαλογή	Συχνότητες (μαθητές)	Σχετικές Συχνότητες (επί %)
1		3	6
2		6	12
3		7	14
4		13	26
5		10	20
6		6	12
7		5	10
	<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>50</b>	<b>100</b>

Πίνακας 2

- Παρατηρούμε ότι: **το άθροισμα όλων των συχνοτήτων ισούται με το πλήθος των παρατηρήσεων του δείγματος.**
- Επίσης, **το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων ισούται με 100.**  
Χρησιμοποιώντας τώρα τα στοιχεία του πίνακα 2 μπορούμε να έχουμε και μια εποπτική εικόνα της έρευνας, κάνοντας διαγράμματα, όπως τα παρακάτω:



Εβδομαδιαίες ώρες τηλεθέασης των μαθητών της Β' Γυμνασίου



Υπολογισμός γωνιών κυκλικού διαγράμματος

Τιμές	Γωνία
1	$\frac{3}{50} \cdot 360^\circ = 21,6^\circ$
2	$\frac{6}{50} \cdot 360^\circ = 43,2^\circ$
3	$\frac{7}{50} \cdot 360^\circ = 50,4^\circ$
4	$\frac{13}{50} \cdot 360^\circ = 93,6^\circ$
5	$\frac{10}{50} \cdot 360^\circ = 72^\circ$
6	$\frac{6}{50} \cdot 360^\circ = 43,2^\circ$
7	$\frac{5}{50} \cdot 360^\circ = 36^\circ$
Άθροισμα	360°



## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στο διπλανό πίνακα έχουμε συγκεντρώσει τα αποτελέσματα μιας έρευνας, που έγινε σε μια κωμόπολη σχετικά με το πλήθος των παιδιών που έχει κάθε οικογένεια. Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Παιδιά	0	1	2	3	4	5
Πλήθος οικογενειών	11	12	7	5	3	2

	A	B	Γ	Δ
1 Το συνολικό πλήθος οικογενειών που ρωτήθηκαν είναι:	5	6	40	12
2 Η συχνότητα της τιμής 4 είναι:	3	6	40	2
3 Η σχετική συχνότητα των οικογενειών που δεν έχουν παιδιά είναι:	$\frac{11}{100}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{40}{11}$	$\frac{100}{11}$
4 Η σχετική συχνότητα των οικογενειών που έχουν 3 παιδιά ως ποσοστό επί τοις εκατό είναι:	$\frac{5}{100} \cdot 40$	$\frac{100}{5} \cdot 40$	$\frac{5}{100}$	$\frac{5}{40} \cdot 100$
5 Αν κατασκευάσουμε κυκλικό διάγραμμα, η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στις οικογένειες που έχουν 1 παιδί είναι:	$\frac{12}{40} \cdot 360^\circ$	$\frac{40}{12} \cdot 360^\circ$	$\frac{40}{360^\circ} \cdot 12$	$\frac{1}{12} \cdot 360^\circ$

2. Μια έρευνα που έγινε μεταξύ των μαθητών ενός Γυμνασίου της Κρήτης, σχετικά με τις ποδοσφαιρικές προτιμήσεις τους, κατέληξε σε έντονη «διαφωνία» με αποτέλεσμα να «χαθούν» μερικά στοιχεία. Μπορείτε να βρείτε τα στοιχεία που λείπουν;

Ομάδες	Συχνότητες	Σχετικές συχνότητες (επί τοις %)
ΑΕΚ		
ΠΑΟΚ		5
ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΣ	30	
ΠΑΝΑΘΗΝΑΪΚΟΣ		10
ΟΦΗ	70	35
ΕΡΓΟΤΕΛΗΣ	30	
<b>Σύνολο</b>		



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1 Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες:  
Αριθμός παιδιών των οικογενειών ενός χωριού

Αριθμός παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
0	4	
1	10	
2	14	
3	8	
4	4	
<b>Σύνολο</b>		

Αριθμός απουσιών των μαθητών μιας τάξης κατά το Νοέμβριο

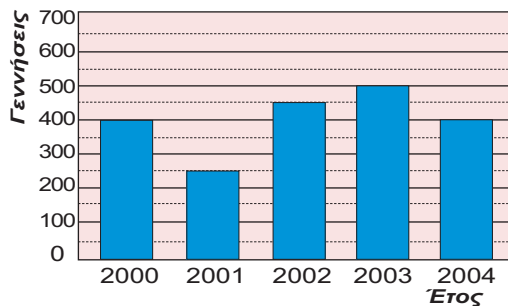
Αριθμός απουσιών	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα %
0	3	
1	8	
2	12	
3	6	
4	6	
5		
6	1	
<b>Σύνολο</b>	<b>40</b>	



- 2 Ο αριθμός των γεννήσεων σ' ένα μαιευτήριο τα έτη



2000 έως 2004 φαίνεται στο παρακάτω ραβδόγραμμα:



- α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.  
β) Να μετατρέψετε το ραβδόγραμμα σε χρονόγραμμα.  
γ) Ποια χρονιά οι γεννήσεις παρουσίασαν αύξηση και ποια μείωση;

- 3 Ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων μιας βιοτεχνίας το πρώτο δεκαήμερο του Μαρτίου είναι: 0, 0, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 0, 1.

- α) Να γίνει πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.  
β) Να παρασταθούν τα δεδομένα με κυκλικό διάγραμμα.  
γ) Να παρασταθεί η κατανομή σχετικών συχνοτήτων με ραβδόγραμμα.

- 4 Τα αποτελέσματα που πέτυχε μια ομάδα ποδοσφαίρου σε 34 αγώνες ήταν:

H, H, I, N, I, I, I, I, N, H, I, H, H, I, N, I, H, N, I, I, I, N, H, H, I, I, I, I, I, N, I, N, N.

(H = Ήττα, N = Νίκη, I = Ισοπαλία)

- α) Να γίνει πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.  
β) Να παρασταθεί η κατανομή σχετικών συχνοτήτων με ραβδόγραμμα και κυκλικό διάγραμμα.

- 5 Ο αριθμός των μηνυμάτων που έστειλε ανά ημέρα τον Ιούλιο ο Τάκης, είναι:

4, 5, 2, 1, 5, 4, 0, 4, 7, 3, 5, 2, 2, 6, 5, 3, 2, 3, 1, 7, 6, 4, 5, 3, 3, 2, 2, 4, 2, 5, 2.

- α) Να γίνει πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.  
β) Να βρείτε πόσες ημέρες τα μηνύματα ήταν περισσότερα από 3.

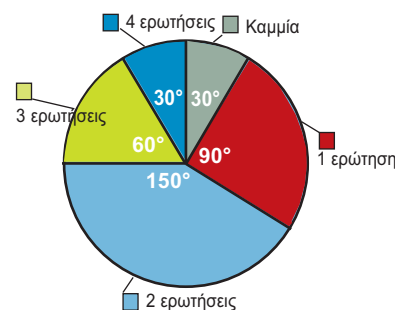
- γ) Να βρείτε το ποσοστό των ημερών στις οποίες τα μηνύματα ήταν το πολύ 3.  
δ) Να παραστήσετε την κατανομή σχετικών συχνοτήτων με ραβδόγραμμα.

- 6 Σε μια έρευνα που έγινε σε 25 μαθητές ως προς την ομάδα αίματος, έγιναν οι παρατηρήσεις:

O, A, A, A, O, AB, A, B, A, AB, B, O, A, O, B, B, B, A, A, AB, B, O, A, A, A.

- α) Να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.  
β) Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που έχουν ομάδα A ή B;  
γ) Ποια ομάδα αίματος εμφανίζεται λιγότερο στο δείγμα;

- 7 Σε ένα διαγώνισμα με τέσσερις ερωτήσεις ο αριθμός των σωστών απαντήσεων φαίνεται στο κυκλικό διάγραμμα.



- α) Να γίνει ο πίνακας σχετικών συχνοτήτων.  
β) Αν κάθε σωστή ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες, να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία μικρότερη ή ίση του 10.

- 8 Στο εικονόγραμμα δίνεται ο αριθμός των υπολογιστών που πούλησε μια εταιρεία το έτος 2003 για 4 μάρκες A, B, Γ, Δ.

- α) Πόσους συνολικά υπολογιστές πούλησε η εταιρεία;  
β) Να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων.  
γ) Ποιο είναι το ποσοστό των υπολογιστών που δεν είναι μάρκας A ή B;



= 1000 υπολογιστές



## 4.4. Ομαδοποίηση παρατηρήσεων

### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Εξετάσαμε τους μαθητές ενός Γυμνασίου ως προς το βάρος τους. Τα αποτελέσματα (στρογγυλοποιημένα σε κιλά) είναι:

53	59	46	61	47	64	47	72	53	58	55	67	57	59	53	66
52	41	57	65	75	60	71	42	62	49	63	52	43	49	57	62
55	81	54	55	42	52	68	54	67	43	42	60	56	59	47	78
59	63	54	48	56	60	44	53	59	50	55	46	56	47	53	62
57	46	63	61	55	69	51	54	61	51	61	41	58	53	73	56



Επειδή οι διαφορετικές τιμές που βρήκαμε είναι πάρα πολλές (από 41 έως 81 κιλά) και ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων που πρέπει να κατασκευάσουμε είναι πολύ μεγάλος, χωρίζουμε τις παραπάνω παρατηρήσεις σε «ομάδες» που λέγονται «κλάσεις», ως εξής:

Στην 1η κλάση τοποθετούμε όσους μαθητές ζυγίζουν 40 – 46 κιλά, στη 2η όσους ζυγίζουν 46 – 52, στην 3η 52 – 58, στην 4η 58 – 64, στην 5η 64 – 70, στην 6η 70 – 76 και στην 7η 76 – 82 κιλά. (Αν κάποια παρατήρηση συμπίπτει με το δεξιό άκρο μιας κλάσης, την τοποθετούμε στην αμέσως επόμενη κλάση). Να κάνετε διαλογή των παραπάνω παρατηρήσεων και να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων.

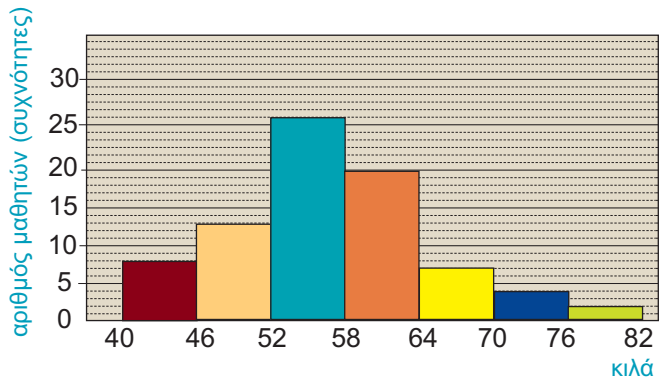
### Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα συμπληρώνουμε τον επόμενο πίνακα κατανομής συχνοτήτων:

Κλάσεις	Διαλογή	Συχνότητες	Σχετικές συχνότητες
40 – 46	+++	8	10 %
46 – 52	+++ +++	13	16,25 %
52 – 58	+++ +++ +++ +++	26	32,50 %
58 – 64	+++ +++ +++	20	25 %
64 – 70	+++	7	8,75 %
70 – 76		4	5 %
76 – 82		2	2,50 %
	<b>Σύνολα</b>	<b>80</b>	<b>100%</b>

Η διαδικασία, που είδαμε στην προηγούμενη δραστηριότητα, ονομάζεται **ομαδοποίηση των παρατηρήσεων**. Χωρίσαμε, δηλαδή, το διάστημα από 40 κιλά έως 81 κιλά, στο οποίο ανήκουν οι παρατηρήσεις, σε υποδιαστήματα. Τα υποδιαστήματα αυτά λέγονται **κλάσεις**. Στη δραστηριότητα θεωρήσαμε κλάσεις **πλάτους** 6 κιλών.

## Γραφική παρουσίαση ομαδοποιημένων παρατηρήσεων



Μια ομαδοποιημένη κατανομή παριστάνεται με **ιστόγραμμα**, που αποτελείται από συνεχόμενα ορθογώνια, τα οποία έχουν ύψος ίσο με τη συχνότητα ή τη σχετική συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης.

Έτσι, το ορθογώνιο της κλάσης 40 - 46 έχει ύψος 8. Οι αριθμοί 40 και 46 λέγονται **άκρα** της κλάσης. Επίσης, ο αριθμός 43 (δηλαδή  $\frac{40 + 46}{2} = \frac{46}{2} = 43$ ) λέγεται **κέντρο** της κλάσης 40 - 46.

### Παρατήρηση:

Από τη στιγμή που έχουμε κάνει ομαδοποίηση των παρατηρήσεων, οι συχνότητες και οι σχετικές συχνότητες που έχουμε βρει στον παραπάνω πίνακα κατανομής συχνοτήτων, δεν αναφέρονται σε μεμονωμένους αριθμούς, αλλά στις κλάσεις. Έτσι, λέμε ότι η κλάση 58 - 64 έχει συχνότητα 20 και σχετική συχνότητα 25% χωρίς να γνωρίζουμε τη συχνότητα καθεμιάς από τις τιμές 58, 59, 60, ..., 63 που ανήκουν στην κλάση αυτή. Έτσι, θεωρούμε ότι 20 μαθητές που έχουν βάρος 58 - 64 κιλά αντιπροσωπεύονται από το κέντρο της κλάσης, δηλαδή τον αριθμό

$$\frac{58 + 64}{2} = \frac{122}{2} = 61 \text{ κιλά.}$$



## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε μια εθνική οδό η Τροχαία έλεγξε 50 αυτοκίνητα ως προς την ταχύτητα που είχαν αναπτύξει. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

- Να κατασκευάσετε πίνακα σχετικών συχνοτήτων και ιστόγραμμα συχνοτήτων.
- Αν το όριο ταχύτητας στο συγκεκριμένο σημείο της Εθνικής οδού είναι 120 km/h, τι ποσοστό των οδηγών παρανόμησε; (Θεωρούμε ότι παρανόμησαν ακόμα και οι οδηγοί που έτρεχαν με 120 km/h).

Ταχύτητα σε km/h	Αυτοκίνητα
60-80	5
80-100	8
100-120	15
120-140	12
140-160	7
160-180	3
<b>Σύνολο</b>	<b>50</b>

**Λύση:** α) Η συχνότητα της κλάσης 60 - 80 είναι 5, οπότε η σχετική συχνότητα της κλάσης αυτής είναι:

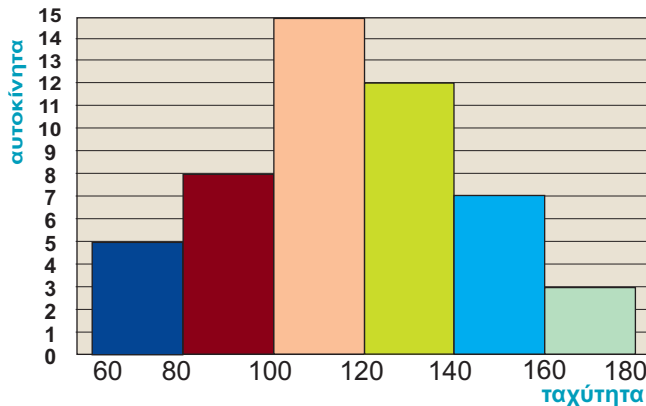
$$\frac{5}{50} = \frac{1}{10} = 0,10 \text{ ή } 10\%.$$

Ομοίως, βρίσκουμε και τις υπόλοιπες σχετικές συχνότητες.

Χρησιμοποιώντας τις συχνότητες της 2ης στήλης του διπλανού πίνακα κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα συχνότητων.

β) Παρανόμησαν όσοι οδηγοί ανήκουν στις τρεις τελευταίες κλάσεις, δηλαδή  $12+7+3=22$  οδηγοί, δηλαδή ποσοστό  $\frac{22}{50} = \frac{44}{100} = 0,44$  ή 44%.

Κλάσεις	Συχνότητες	Σχετικές Συχνότητες
60-80	5	10 %
80-100	8	16 %
100-120	15	30 %
120-140	12	24 %
140-160	7	14 %
160-180	3	6 %



## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Δίνονται τα ομαδοποιημένα δεδομένα του παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20
Συχνότητες	3	5	8	4

Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

		A	B	Γ	Δ
1	Το πλάτος της κάθε κλάσης είναι:	4	5	2	20
2	Το κέντρο της κλάσης 5 - 10 είναι:	5	15	7,5	10
3	Η συχνότητα της κλάσης 5 - 10 είναι:	$\frac{8}{5}$	8	$\frac{8}{20}$	5

2. Δίνονται οι βαθμοί που πήραν 20 μαθητές σ' ένα διαγώνισμα:

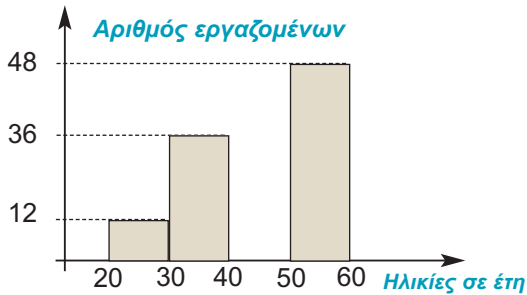
18	16	12	6	10
11	7	13	4	18
12	15	3	10	8
18	7	14	14	11

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	0 - 4	4 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 20
Συχνότητες					
Σχετικές συχνότητες					

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1 Στο παρακάτω ιστόγραμμα δίνονται οι ηλικίες 120 ατόμων που εργάζονται σ' ένα υπουργείο. Τα δεδομένα είναι ομαδοποιημένα σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Το ορθογώνιο της κλάσης 40 – 50 δεν είναι συμπληρωμένο.



- α) Να βρείτε τις συχνότητες των κλάσεων.  
β) Να συμπληρώσετε το ιστόγραμμα.
- 2 Σε μια έρευνα ρωτήθηκαν 50 άτομα για τον αριθμό των ημερών που ξεκουράστηκαν τον τελευταίο μήνα. Προέκυψαν οι παρατηρήσεις
- |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 | 2 | 6 | 1 | 1 | 2 | 0 | 5 | 4 | 7 | 2 | 4 | 7 | 1 | 2 |
| 5 | 2 | 0 | 1 | 4 | 6 | 0 | 3 | 6 | 2 | 4 | 6 | 9 | 4 | 4 | 3 | 4 |
| 8 | 5 | 6 | 2 | 4 | 4 | 3 | 8 | 4 | 3 | 8 | 3 | 3 | 5 | 6 | 4 |   |
- α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους.  
β) Να γίνει το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

- 3 Η βαθμολογία 30 μαθητών σ' ένα διαγώνισμα στο κεφάλαιο της Στατιστικής είναι:

18	10	19	4	1	12	14	10	4	10	19	12	6	12	14
14	12	14	4	14	12	14	19	8	16	18	6	16	18	18

- α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους.  
β) Να γίνει το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

- 4 Ο αριθμός των τροχαίων παραβάσεων στην Εθνική Οδό, που έγινε κατά τη διάρκεια ενός μήνα ανά ημέρα, ήταν:



261	211	223	282	272	211
233	267	247	243	207	221
294	201	249	214	242	211
262	285	298	272	214	232
215	272	245	241	263	242

- α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους.  
β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

- 5 Από μία έρευνα που έγινε σε 80 εργαζόμενους μιας επιχείρησης για το πόσες ημέρες ήταν άρρωστοι τον περασμένο χρόνο, βρέθηκαν τα αποτελέσματα που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

ημέρες ασθένειας	0-10	10-20	20-30	30-40
ποσοστό	35%	40%	15%	10%

- Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.



## 4.5. Μέση τιμή - Διάμεσος



### Μέση τιμή

#### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Ο Γιώργος έχει μια ταβέρνα σ' ένα μικρό νησί του Αιγαίου. Τα κέρδη του, σε €, για το προηγούμενο έτος ήταν ανά μήνα:

0, 0, 100, 400, 1000, 1500, 2500, 5000, 1500, 250, 50, 0.

Τι μηνιαίο μισθό θα έπρεπε να παίρνει, αν ήταν υπάλληλος, ώστε να είχε το ίδιο ετήσιο εισόδημα;

### Λύση

Ας εξετάσουμε πρώτα πόσα χρήματα κέρδισε ο Γιώργος όλη τη χρονιά. Ο Γιώργος κέρδισε συνολικά

$$0 + 0 + 100 + 400 + 1000 + 1500 + 2500 + 5000 + 1500 + 250 + 50 + 0 = 12.300 \text{ €}.$$

Αν το ποσό αυτό μοιραστεί εξίσου σε όλους τους μήνες, θα κέρδιζε  $\frac{12.300}{12} = 1025 \text{ €}$  κάθε μήνα.

Θα λέμε ότι ο **μέσος όρος** ή η **μέση τιμή** των κερδών του Γιώργου είναι 1025 €.

Για να βρούμε τη μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων, προσθέτουμε όλες τις παρατηρήσεις και διαιρούμε με το πλήθος των παρατηρήσεων αυτών.

Ισχύει λοιπόν ότι:

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{\text{άθροισμα των παρατηρήσεων}}{\text{πλήθος των παρατηρήσεων}}$$

### Διάμεσος

#### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Οι μηνιαίες αποδοχές εννέα εργαζομένων μιας επιχείρησης είναι (σε €):

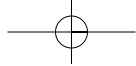
700, 600, 2900, 950, 700, 800, 700, 2100, 900.

- Να βρείτε τη μέση τιμή των αποδοχών των εργαζομένων.
- Να βρείτε την τιμή που «προσεγγίζει» καλύτερα τις αποδοχές των περισσότερων εργαζομένων.

### Λύση

α) Η μέση τιμή των αποδοχών είναι:

$$\frac{700 + 600 + 2900 + 950 + 700 + 800 + 700 + 2100 + 900}{9} = \frac{10350}{9} = 1150 \text{ €}$$



β) Παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι εργαζόμενοι (7 στους 9) έχουν αποδοχές μικρότερες (κάτω από 1000 €) από τη μέση τιμή που βρήκαμε (1150 €), ενώ μόνο δύο έχουν μεγαλύτερες αποδοχές (2100 και 2900 €). Αυτοί οι δύο μεγάλοι μισθοί φαίνεται ότι αυξάνουν τη μέση τιμή.

Τοποθετούμε κατά σειρά μεγέθους τις αποδοχές των 9 υπαλλήλων:

600	700	700	700	800	900	950	2100	2900
4 παρατηρήσεις				4 παρατηρήσεις				

Παρατηρούμε ότι η τιμή 800 € βρίσκεται ακριβώς στη μέση, γιατί υπάρχουν 4 παρατηρήσεις μικρότερες ή ίσες του 800 και 4 παρατηρήσεις μεγαλύτερες ή ίσες του 800. Η μεσαία αυτή παρατήρηση «προσεγγίζει» καλύτερα τις αποδοχές των περισσότερων εργαζομένων.

Η προηγούμενη δραστηριότητα παρουσιάζει ένα μέγεθος της Στατιστικής το οποίο ονομάζουμε **διάμεσο**.

Ένας εύκολος τρόπος για να βρούμε τη διάμεσο είναι ο εξής:

Γράφουμε τις παρατηρήσεις με σειρά μεγέθους:

600   700   700   700   800   900   950   2100   2900

Στη συνέχεια, διαγράφουμε την πρώτη και την τελευταία παρατήρηση:

~~600~~   700   700   700   800   900   950   2100   ~~2900~~

Μετά διαγράφουμε τη δεύτερη και την προτελευταία:

~~600~~   ~~700~~   700   700   800   900   950   ~~2100~~   ~~2900~~

Και συνεχίζουμε έτσι μέχρι να μείνει μόνο μία παρατήρηση, που είναι η διάμεσος:

~~600~~   ~~700~~   ~~700~~   ~~700~~   800   ~~900~~   ~~950~~   ~~2100~~   ~~2900~~

**Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, παίρνουμε ως διάμεσο τη μεσαία παρατήρηση.**

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που μένουν δύο «μεσαίες» παρατηρήσεις.

Αν έχουμε τις παρατηρήσεις: 15, 11, 11, 12, 16, 17, 13, 14, 16, 19, τις τοποθετούμε με σειρά μεγέθους και διαγράφουμε διαδοχικά από τα άκρα, προς τα μέσα:

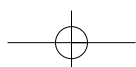
11   11   12   13   14   15   16   16   17   19

Παρατηρούμε ότι περισσεύουν δύο μεσαίες παρατηρήσεις: το 14 και το 15.

Αυτό οφείλεται στο ότι το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 10 (δηλαδή άρτιος αριθμός), οπότε δεν υπάρχει μεσαία παρατήρηση.

Σε αυτή την περίπτωση θα θεωρήσουμε ως διάμεσο τον αριθμό  $\frac{14 + 15}{2} = \frac{29}{2} = 14,5$ .

**Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο, παίρνουμε ως διάμεσο το μέσο όρο των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.**





## Μέση τιμή ομαδοποιημένης κατανομής

### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3

Βαθμοί	Μαθητές (συχνότητες)
0–4	1
4–8	2
8–12	6
12–16	10
16–20	6
<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>25</b>

Μετά το τέλος ενός διαγωνίσματος ο καθηγητής δίνει στον Γυμνασιάρχη το διπλανό πίνακα με τους βαθμούς των μαθητών της τάξης. Πώς θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το μέσο όρο των βαθμών όλης της τάξης;

#### Λύση

Είναι φανερό ότι δε μπορούμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια τη μέση τιμή των βαθμών, γιατί δε γνωρίζουμε τι βαθμό ακριβώς πήρε κάθε μαθητής. Γνωρίζουμε ότι 6 μαθητές πήραν βαθμό από 8 μέχρι 12, αλλά αγνοούμε τον ακριβή βαθμό του καθενός. Θα βρούμε μία τιμή που προσεγγίζει τη μέση τιμή, δηλαδή θα κάνουμε μια **εκτίμηση** της μέσης τιμής.

Θεωρούμε ότι όλοι οι βαθμοί μιας κλάσης **αντιπροσωπεύονται από το κέντρο της κλάσης**. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι οι 6 μαθητές που έχουν πάρει βαθμούς από 8 μέχρι 12, έχουν όλοι τον ίδιο βαθμό, ίσο με το κέντρο της κλάσης, δηλαδή βαθμό  $\frac{8 + 12}{2} = \frac{20}{2} = 10$ .

Ομοίως, θεωρούμε ότι οι 10 μαθητές που έχουν πάρει βαθμό από 12 έως 16, έχουν όλοι τον ίδιο βαθμό ίσο με:

$$\frac{12 + 16}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ κ.ο.κ.}$$

Κατασκευάζουμε, λοιπόν, τον διπλανό πίνακα:

Κλάσεις	Κέντρο κλάσης	Συχνότητα	(Συχνότητα) · (κέντρο κλάσης)
0 – 4	2	1	$2 \cdot 1 = 2$
4 – 8	6	2	$6 \cdot 2 = 12$
8 – 12	10	6	$10 \cdot 6 = 60$
12 – 16	14	10	$14 \cdot 10 = 140$
16 – 20	18	6	$18 \cdot 6 = 108$
<b>ΣΥΝΟΛΑ</b>		<b>25</b>	<b>322</b>

Στην περίπτωση αυτή, οι 25 μαθητές έχουν πάρει συνολικά 322 βαθμούς, οπότε η μέση τιμή των βαθμών είναι:  $\frac{322}{25} = 12,88$ .

Επομένως, για να βρούμε τη μέση τιμή ομαδοποιημένης κατανομής:

- **Βρίσκουμε τα κέντρα των κλάσεων.**
- **Πολλαπλασιάζουμε το κέντρο κάθε κλάσης με τη συχνότητα της κλάσης αυτής.**
- **Προσθέτουμε όλα τα γινόμενα.**
- **Διαιρούμε το άθροισμα αυτό με το άθροισμα των συχνοτήτων.**

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Η Έλενα εξετάστηκε πέντε φορές σ' αυτό το τρίμηνο στο μάθημα της Ιστορίας και πήρε τους βαθμούς: 16, 14, 18, 18 και 14. Τι βαθμό πρέπει να πάρει ως γενικό βαθμό τριμήνου;

**Λύση:** Η μέση τιμή των βαθμών της Έλενας είναι:  $\frac{16 + 14 + 18 + 18 + 14}{5} = \frac{80}{5} = 16$ .



**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2**

Ο διπλανός πίνακας δείχνει τον αριθμό των τερμάτων που πέτυχε μια ομάδα ποδοσφαίρου στους 15 πρώτους αγώνες πρωταθλήματος.

- α) Πόσα τέρματα έχει πετύχει συνολικά η ομάδα αυτή και στους 15 αγώνες;  
β) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός τερμάτων που πετυχαίνει η ομάδα αυτή σε κάθε αγώνα;

Τέρματα	Αγώνες
0	1
1	4
2	3
3	5
4	2
<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>15</b>



- Λύση:** α) Σε 1 αγώνα έχει πετύχει 0 τέρματα, άρα σύνολο  $1 \cdot 0 = 0$ .  
Σε 4 αγώνες έχει πετύχει 1 τέρμα, άρα σύνολο  $4 \cdot 1 = 4$ .  
Σε 3 αγώνες έχει πετύχει 2 τέρματα, άρα σύνολο  $3 \cdot 2 = 6$ .  
Σε 5 αγώνες έχει πετύχει 3 τέρματα, άρα σύνολο  $5 \cdot 3 = 15$ .  
Σε 2 αγώνες έχει πετύχει 4 τέρματα, άρα σύνολο  $4 \cdot 2 = 8$ .

Οπότε, συνολικά έχει πετύχει:

$$1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 0 + 4 + 6 + 15 + 8 = 33 \text{ τέρματα.}$$

- β) Αφού σε 15 αγώνες έχει πετύχει συνολικά 33 τέρματα, ο μέσος όρος για κάθε

αγώνα είναι:  $\frac{1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{15} = \frac{33}{15} = 2,2 \text{ τέρματα.}$

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3**

Σε μία τάξη υπάρχουν 8 μαθητές και 12 μαθήτριες. Το μέσο ύψος των 8 μαθητών είναι 168 cm και το μέσο ύψος των 12 μαθητριών είναι 162 cm. Ποιο είναι το μέσο ύψος όλων των μαθητών της τάξης;

- Λύση:** Το άθροισμα των υψών των 8 μαθητών (σε cm) είναι:  $8 \cdot 168 = 1344$ .  
Το άθροισμα των υψών των 12 μαθητριών (σε cm) είναι:  $12 \cdot 162 = 1944$ .  
Το άθροισμα των υψών και των 20 μαθητών (σε cm) είναι:  $1344 + 1944 = 3288$ .  
Επομένως, το μέσο ύψος (σε cm) είναι:  $\frac{3288}{20} = 164,4$ .

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4**

Να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων:

- α) 3    5    2    7    3    2    4    6    6    4    3  
β) 12    15    14    17    13    18    15    16    13    17    12    11

- Λύση:** α) Τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

2    2    3    3    3    4    4    5    6    6    7

Το πλήθος τους είναι 11 (περιπτώς). Διαγράφοντας τις ακραίες παρατηρήσεις ανά δύο:

~~2~~    ~~2~~    ~~3~~    ~~3~~    ~~3~~    4    4    5    6    6    7

περισεύει η 6η κατά σειρά παρατήρηση, η οποία ισούται με τη διάμεσο.

β) Τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά.

11 12 12 13 13 14 15 15 16 17 17 18

Το πλήθος τους είναι 12 (άρτιος). Διαγράφοντας τις ακραίες παρατηρήσεις ανά δύο:

~~11~~ ~~12~~ ~~12~~ ~~13~~ ~~13~~ 14 15 ~~15~~ ~~16~~ ~~17~~ ~~17~~ ~~18~~

περισσεύουν δύο παρατηρήσεις: η 6η (14) και η 7η (15).

Η διάμεσος είναι ο μέσος όρος αυτών των δύο παρατηρήσεων, δηλαδή ο

$$\text{αριθμός: } \frac{14 + 15}{2} = \frac{29}{2} = 14,5.$$



## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:  
Το άθροισμα 50 παρατηρήσεων είναι 100. Η μέση τιμή είναι:  
Α: 500      Β: 5      Γ:  $\frac{1}{2}$       Δ: 2
2. Η μέση τιμή 100 παρατηρήσεων είναι 28,2. Το άθροισμα των παρατηρήσεων είναι:  
Α: 2,82      Β: 282      Γ: 2820      Δ: 0,282
3. Η μέση τιμή μιας κατανομής είναι 3 και το άθροισμα των παρατηρήσεων είναι 60. Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι:  
Α: 5      Β: 20      Γ: 180      Δ:  $\frac{3}{60}$
4. Από τις παρακάτω παρατηρήσεις, που είναι τοποθετημένες σε αύξουσα σειρά μεγέθους, λείπει η 5η κατά σειρά παρατήρηση  
2 3 5 7 ..... 14 14 15  
α) Αν η διάμεσος είναι 7, η παρατήρηση που λείπει είναι: Α: 7 Β: 8 Γ: 9 Δ: 10  
β) Αν η διάμεσος είναι 8, η παρατήρηση που λείπει είναι: Α: 7 Β: 8 Γ: 9 Δ: 10  
γ) Αν η διάμεσος είναι 8,5, η παρατήρηση που λείπει είναι: Α: 7 Β: 8 Γ: 9 Δ: 10

5. Δίνεται η κατανομή συχνοτήτων του διπλανού πίνακα.  
Η μέση τιμή είναι ίση με:

$$\text{Α: } \frac{10 + 20 + 30}{3} \quad \text{Β: } \frac{10 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 30 \cdot 4}{3}$$

$$\text{Γ: } \frac{10 + 20 + 30}{9} \quad \text{Δ: } \frac{10 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 30 \cdot 4}{9}$$

Τιμές	Συχνότητες
10	2
20	3
30	4



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστεί η μέση τιμή των παρατηρήσεων κάθε γραμμής.  
α) 7 7 7 7 7 7  
β) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10  
γ) -3 -2 -2 0 1 1 1  
δ)  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{3}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{4}$   $\frac{1}{5}$   $\frac{1}{3}$
2. Να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε γραμμής:  
α) 4 3 2 1 -1 -2  
β) 2 2 4 2 3 3 1  
γ) 100 101 99 98 101 102 103  
δ) -5 -2 0 1 3 -4

- 3 Η βαθμολογία σε 14 μαθήματα του πρώτου τετραμήνου δύο μαθητών της Β' Γυμνασίου είναι:

**A μαθητής**

18 17 16 19 20 16 17 19 18 18 19 18 19 17

**B μαθητής**

19 19 18 18 19 20 18 17 19 19 18 19 18 20

- α) Να βρείτε τον μέσο όρο της βαθμολογίας κάθε μαθητή.  
β) Να εκτιμήσετε ποιος μαθητής έχει καλύτερη επίδοση.  
γ) Να βρείτε τη διάμεσο της βαθμολογίας κάθε μαθητή.
- 4 Το ύψος των 12 παικτών της ομάδας μπάσκετ της ΑΕΚ είναι σε cm:  
192, 197, 197, 198, 198, 200, 200, 201, 201, 204, 205, 206.
- α) Να βρείτε το μέσο ύψος της ομάδας.  
β) Να βρείτε τη διάμεσο των υψών της ομάδας.  
γ) Αν ο παίκτης με ύψος 192 cm αντικατασταθεί από άλλον ύψους 200 cm, ποιο είναι το νέο μέσο ύψος της ομάδας;

- 5 Η θερμοκρασία το μεσημέρι κάθε ημέρας του Νοεμβρίου στον Άλιμο είναι:

10 14 12 16 10 14 18 16 17 14

16 12 17 10 12 14 14 16 12 14

18 14 10 14 16 10 18 12 16 14

- α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.  
β) Να βρείτε τη μέση θερμοκρασία και τη διάμεσο των θερμοκρασιών.
- 6 Σε μία πόλη 200 παιδιά παρουσιάζουν αλλεργική αντίδραση σ' ένα φάρμακο, σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Ηλικία παιδιών	Συχνότητα
0 – 2	50
2 – 4	40
4 – 6	60
6 – 8	30
8 – 10	10
10 – 12	10

- α) Να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων της κατανομής.  
β) Να βρείτε τη μέση ηλικία των παιδιών.

- 7 Οι ηλικίες ενός δείγματος 200 φιλάθλων που παρακολουθούν έναν αγώνα τένις είναι:

Ηλικία	Συχνότητα
9–15	24
15–21	48
21–27	56
27–33	36
33–39	24
39–45	12
<b>ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>200</b>

Να βρείτε τη μέση τιμή της ηλικίας των φιλάθλων.

- 8 Μια ένωση καταναλωτών κατέγραψε την τιμή πώλησης ενός προϊόντος (σε €) σε 20 διαφορετικά σημεία πώλησης:

50 47 51 45 54 49 46 52 48 50

51 49 52 49 47 50 54 52 49 53

- α) i) Να τοποθετήσετε τα δεδομένα αυτά σε πίνακα συχνοτήτων.  
ii) Να βρείτε τη μέση τιμή πώλησης M του προϊόντος.
- β) i) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε κλάσεις, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	Συχνότητες
45 – 47	
47 – 49	
...	
...	
...	

- ii) Να βρείτε τη μέση τιμή πώλησης M' των ομαδοποιημένων παρατηρήσεων του πίνακα αυτού.  
iii) Ποια είναι η πραγματική μέση τιμή (M ή M');

# Επανάληψη Κεφαλαίου

## 4



### Περιγραφική Στατιστική



#### ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ

Ένα σύνολο του οποίου μελετάμε τα στοιχεία ως προς τουλάχιστον ένα χαρακτηριστικό λέγεται **πληθυσμός**.

Επειδή η έρευνα ολόκληρου του πληθυσμού δεν είναι πάντοτε εφικτή, καταφεύγουμε στη **δειγματοληψία**. Επιλέγουμε, δηλαδή, ένα **αντικειμενικό** δείγμα από το οποίο μπορούμε να βγάλουμε αξιόπιστα συμπεράσματα για όλο τον πληθυσμό.



#### ΠΙΝΑΚΕΣ – ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

Η παρουσίαση των στατιστικών δεδομένων γίνεται με **πίνακες** και **διαγράμματα**.

Υπάρχουν διαφόρων μορφών διαγράμματα, όπως το **εικονόγραμμα**, το **ραβδόγραμμα**, το **κυκλικό διάγραμμα** και το **χρονόγραμμα**.



#### ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

**Συχνότητα** μιας τιμής λέγεται ο αριθμός που εκφράζει πόσες φορές εμφανίζεται στο δείγμα η τιμή αυτή.



#### ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Η **σχετική συχνότητα** μιας τιμής **είναι το πηλίκο** της συχνότητας της τιμής αυτής με το πλήθος όλων των παρατηρήσεων, και εκφράζεται ως ποσοστό επί τοις εκατό.



#### ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ

Όταν κάνουμε **ομαδοποίηση** των παρατηρήσεων, χωρίζουμε τις παρατηρήσεις σε **ομάδες** ή **κλάσεις** και παρουσιάζουμε την κατανομή με **ιστόγραμμα** συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων.



#### ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

Για να βρούμε τη **μέση τιμή** ενός συνόλου παρατηρήσεων, **προσθέτουμε** όλες τις παρατηρήσεις **και διαιρούμε** με το πλήθος των παρατηρήσεων αυτών.



#### ΔΙΑΜΕΣΟΣ

Για να βρούμε τη **διάμεσο** μιας κατανομής, γράφουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά και βρίσκουμε τη μεσαία παρατήρηση. Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο, παίρνουμε ως διάμεσο το μέσο όρο των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.



#### ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Για να βρούμε τη μέση τιμή ομαδοποιημένης κατανομής:

- Βρίσκουμε τα **κέντρα των κλάσεων**.
- **Πολλαπλασιάζουμε** το κέντρο κάθε κλάσης με τη συχνότητα της κλάσης αυτής.
- **Προσθέτουμε** όλα τα γινόμενα.
- **Διαιρούμε** το άθροισμα αυτό με το άθροισμα των συχνοτήτων.