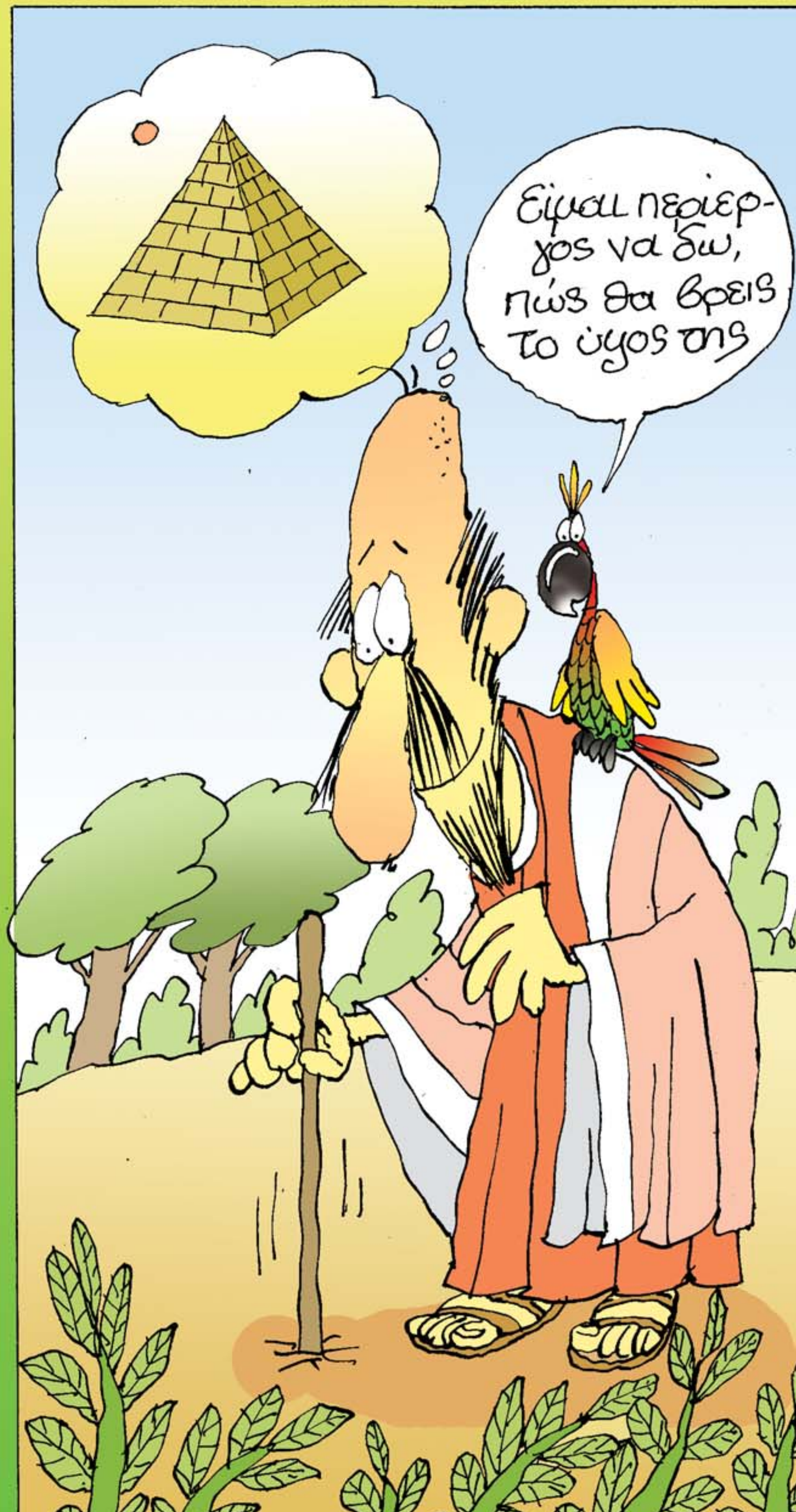

Β΄ ΜΕΡΟΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

(183-184) ∂•ø°À§§√ (°∂øª∂∆ƒπ∞) 3-11-06 11:25 ™ÂÏ›‰·184

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

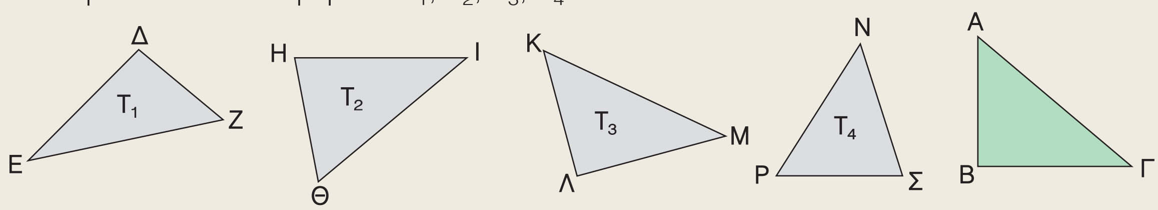


1.1 Ισότητα τριγώνων

- ✔ *Θυμάμαι ποια είναι τα στοιχεία ενός τριγώνου (κύρια – δευτερεύοντα) και τα είδη των τριγώνων.*
- ✔ *Μαθαίνω πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα και ποια είναι τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.*
- ✔ *Μαθαίνω ποια είναι τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

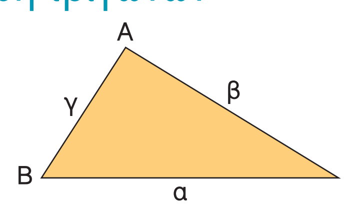
Αν μετατοπίσουμε κατάλληλα το τρίγωνο ΑΒΓ, χωρίς αυτό να μεταβληθεί, τότε θα ταυτιστεί με ένα από τα τρίγωνα T_1, T_2, T_3, T_4.



1. Να αποτυπώσετε το τρίγωνο ΑΒΓ σε διαφανές χαρτί και να βρείτε με ποιο από τα τρίγωνα T_1, T_2, T_3, T_4 ταυτίζεται.
2. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:
   ΑΒ = ..., ΒΓ = ..., ΓΑ = ..., $\hat{A}$ = ..., $\hat{B}$ = ... και $\hat{\Gamma}$ = ...

Κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνων

Σε κάθε τρίγωνο οι πλευρές και οι γωνίες του ονομάζονται **κύρια στοιχεία** του τριγώνου. Οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ που βρίσκονται απέναντι από τις γωνίες του $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ συμβολίζονται αντιστοίχως α, β, γ.

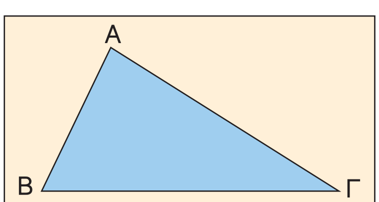


Για τις γωνίες κάθε τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$

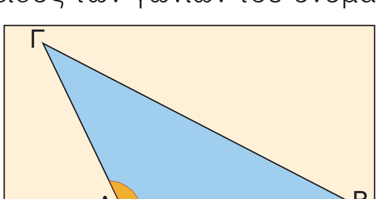
Η γωνία του τριγώνου που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών λέγεται **περιεχόμενη** γωνία των πλευρών αυτών, π.χ. περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΑΒ, ΑΓ είναι η γωνία $\hat{A}$.

Οι γωνίες του τριγώνου που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς λέγονται **προσκείμενες** γωνίες της πλευράς αυτής π.χ. προσκείμενες γωνίες της πλευράς ΒΓ είναι οι $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

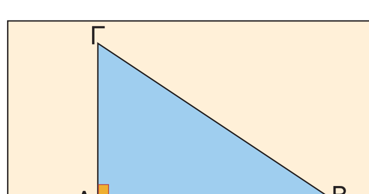
Ένα τρίγωνο ανάλογα με το είδος των γωνιών του ονομάζεται:



Οξυγώνιο, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.



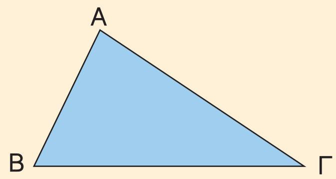
Αμβλυγώνιο, όταν έχει μια γωνία αμβλεία.



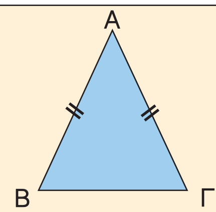
Ορθογώνιο, όταν έχει μια γωνία ορθή.

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία ονομάζεται **υποτείνουσα**, ενώ οι άλλες δύο ονομάζονται **κάθετες πλευρές**.

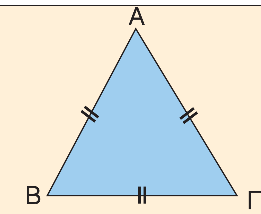
Ένα τρίγωνο ανάλογα με τις σχέσεις που συνδέονται οι πλευρές του ονομάζεται:



Σκαληνό, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του άνισες.



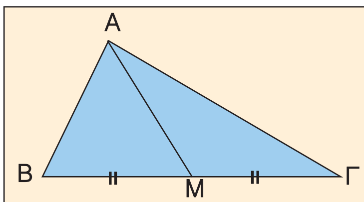
Ισοσκελές, όταν έχει δύο πλευρές ίσες.



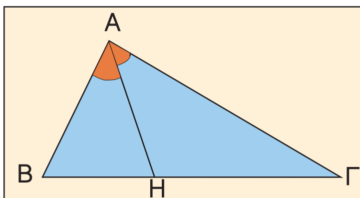
Ισόπλευρο, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες.

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ η πλευρά ΒΓ ονομάζεται **βάση** του και το σημείο Α **κορυφή** του.

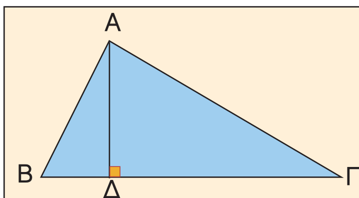
Σ' ένα τρίγωνο, εκτός από τα κύρια στοιχεία, υπάρχουν και τα **δευτερεύοντα στοιχεία**, που είναι οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη.



Διάμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.



Διχοτόμος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.

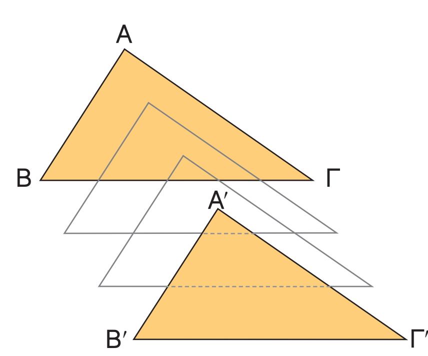


Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή και είναι κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς.

Ίσα τρίγωνα

Αν μετατοπίσουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ σε μια άλλη θέση και θεωρήσουμε ότι κατά τη μετατόπισή του αυτό δε μεταβάλλεται, τότε οι κορυφές του Α, Β, Γ θα πάρουν τις θέσεις των σημείων Α′, Β′, Γ′ αντιστοίχως και το τρίγωνο ΑΒΓ θα πάρει τη θέση του τριγώνου Α′Β′Γ′.

Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ ταυτίζονται, τότε οι αντίστοιχες πλευρές και γωνίες τους θα είναι ίσες, αφού και αυτές ταυτίζονται. Έτσι έχουμε:



$$AB = A'B', \quad B\Gamma = B'\Gamma', \quad A\Gamma = A'\Gamma' \quad \text{και}$$
$$\hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{B} = \hat{B}', \quad \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'.$$

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′, για τα οποία ισχύουν οι προηγούμενες ισότητες, λέμε ότι είναι ίσα. Δηλαδή

- **Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.**

(185-197) 3-11-06 11:29 ™ÂÏ›‰·188

Ισχύει ακόμη και το αντίστροφο. Δηλαδή

- **Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.**

Στο εξής σε κάθε μετατόπιση τριγώνου θα θεωρούμε ότι αυτό δε μεταβάλλεται. Αυτό σημαίνει ότι, αν έχουμε δύο ίσα τρίγωνα και μετατοπίσουμε κατάλληλα το ένα από αυτά, τότε τα τρίγωνα ταυτίζονται.
Για να αποδείξουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα δεν είναι απαραίτητο να αποδείξουμε ότι έχουν όλες τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες μία προς μία.
Στη συνέχεια, θα μάθουμε προτάσεις με τις οποίες διαπιστώνουμε ότι και με λιγότερα στοιχεία είναι δυνατόν να διακρίνουμε αν δύο τρίγωνα είναι ίσα.
Οι προτάσεις αυτές είναι γνωστές ως **κριτήρια ισότητας τριγώνων**.

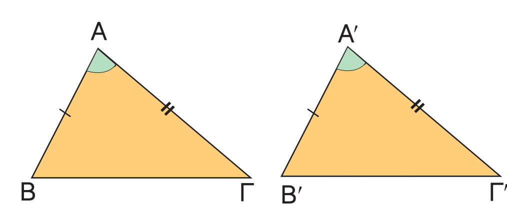
Κριτήρια ισότητας τριγώνων

1ο κριτήριο ισότητας (Π – Γ – Π)

Για δύο τρίγωνα ισχύει η παρακάτω **βασική ιδιότητα ισότητας**

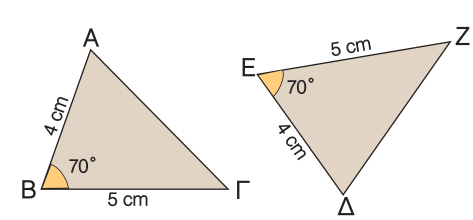
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.

Πράγματι, σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ που να έχουν δύο πλευρές ίσες ΑΒ = Α′Β′, ΑΓ = Α′Γ′ και την περιεχόμενη γωνία τους ίση $\hat{A} = \hat{A}'$.



Αν μετατοπίσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ, έτσι ώστε η γωνία $\hat{A}$ να συμπέσει με την ίση της γωνία $\hat{A}'$ και η πλευρά ΑΒ να συμπέσει με την ίση της πλευρά Α′Β′, τότε η πλευρά ΑΓ θα συμπέσει με την ίση της πλευρά Α′Γ′ και οι κορυφές Β, Γ θα συμπέσουν με τις κορυφές Β′, Γ′ αντιστοίχως. Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ ταυτίζονται, οπότε είναι ίσα.

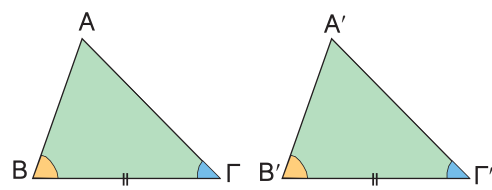
Για παράδειγμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες (ΑΒ = ΔΕ = 4 cm, ΒΓ = ΕΖ = 5 cm) και την περιεχόμενη γωνία τους ίση ($\hat{B} = \hat{E} = 70^\circ$). Επομένως, τα τρίγωνα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή



$$ΑΓ = ΔΖ,\ \ \hat{Γ} = \hat{Z}\ \ \text{και}\ \ \hat{Δ} = \hat{A}.$$

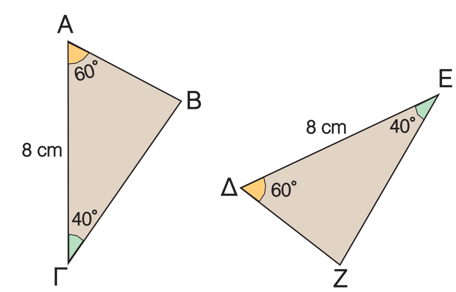
Παρατηρούμε ότι οι ίσες γωνίες $\hat{Γ}$, $\hat{Z}$ βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ, ΕΔ.
Γενικά:
Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

2ο κριτήριο ισότητας (Γ – Π – Γ).



Σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ που να έχουν μία πλευρά ίση ΒΓ = Β′Γ′ και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες $\hat{B} = \hat{B}'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$. Αν μετατοπίσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ, έτσι ώστε η πλευρά του ΒΓ να συμπέσει με την ίση της πλευρά Β′Γ′ και η γωνία $\hat{B}$ να συμπέσει με τη ίση της γωνία $\hat{B}'$, τότε η γωνία $\hat{\Gamma}$ θα συμπέσει με την ίση της γωνία $\hat{\Gamma}'$ και η κορυφή Α θα συμπέσει με την κορυφή Α′.
Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ ταυτίζονται, οπότε είναι ίσα. Επομένως

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



Για παράδειγμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν μία πλευρά ίση (ΑΓ = ΔΕ = 8 cm) και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = \hat{E} = 40^\circ$). Επομένως τα τρίγωνα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή

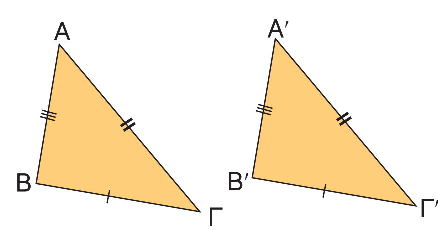
$$\hat{B} = \hat{Z},\ AB = \Delta Z,\ B\Gamma = EZ.$$

Παρατηρούμε ότι οι ίσες πλευρές ΑΒ, ΔΖ βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\Gamma}$, $\hat{E}$.

Γενικά:

Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

3ο κριτήριο ισότητας (Π – Π – Π).

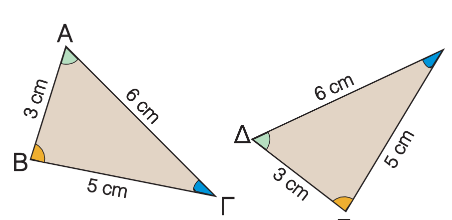


Σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ που να έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες

$$(AB = A'B',\ B\Gamma = B'\Gamma',\ A\Gamma = A'\Gamma').$$

Αν μετατοπίσουμε κατάλληλα το τρίγωνο ΑΒΓ, τότε αυτό ταυτίζεται με το τρίγωνο Α′Β′Γ′, οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

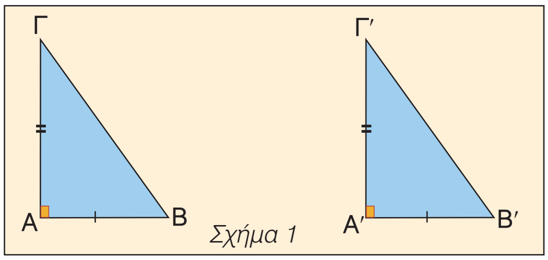


Για παράδειγμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες, ΑΒ = ΔΕ = 3 cm, ΑΓ = ΔΖ = 6 cm και ΒΓ = ΕΖ = 5 cm. Άρα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή

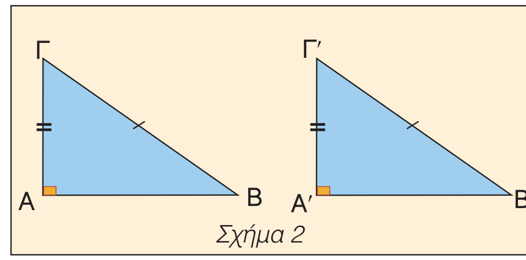
$$\hat{A} = \hat{\Delta},\ \hat{B} = \hat{E} \text{ και } \hat{\Gamma} = \hat{Z}.$$

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Τα προηγούμενα κριτήρια ισότητας τριγώνων μπορούμε να τα εφαρμόσουμε και στα ορθογώνια τρίγωνα.



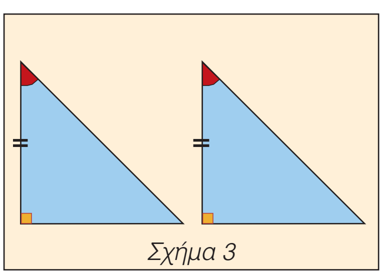
Σχήμα 1

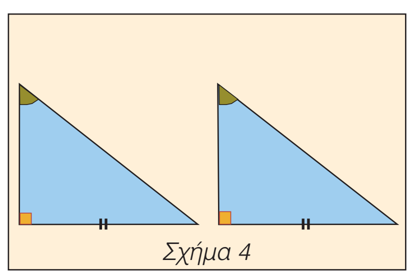


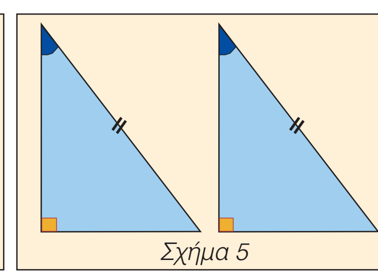
Σχήμα 2

Στο σχήμα 1 τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα, γιατί έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, αφού αυτή είναι ορθή. Στο σχήμα 2 τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά ίση και όπως προκύπτει από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουν και την τρίτη πλευρά τους ίση. Άρα τα τρίγωνα θα είναι ίσα, αφού έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Οι δύο αυτές περιπτώσεις συνοψίζονται στο εξής κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.
Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.


Σχήμα 3


Σχήμα 4


Σχήμα 5

Στο σχήμα 3 τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.
Στα σχήματα 4 και 5 τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση, αφού το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°. Άρα είναι ίσα γιατί έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

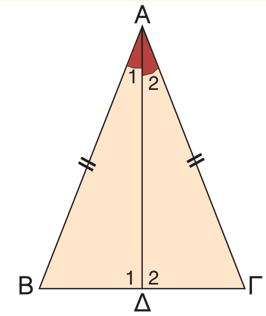
Ο τρεις αυτές περιπτώσεις συνοψίζονται στο εξής κριτήριο ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων.
Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση, τότε είναι ίσα.
Από τα προηγούμενα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων διαπιστώνουμε ότι:

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν
- δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή
- μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ.**
α) Να συγκριθούν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ.
β) Να αποδειχθεί ότι $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$ και ότι η διχοτόμος ΑΔ είναι διάμεσος και ύψος.

Λύση



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ και παρατηρούμε ότι έχουν:

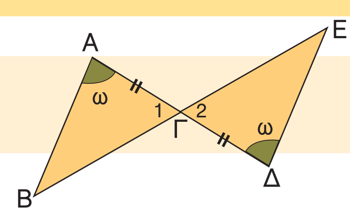
- ΑΔ = ΑΔ, κοινή πλευρά
- ΑΒ = ΑΓ από την υπόθεση
- $\widehat{Α}_1 = \widehat{Α}_2$, αφού ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Α}$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα, θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$, ΒΔ = ΔΓ και $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Δ}_2$.
Αφού είναι $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Δ}_2$ και $\widehat{Δ}_1 + \widehat{Δ}_2 = 180^\circ$, θα έχουμε $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Δ}_2 = 90^\circ$, οπότε η διχοτόμος ΑΔ είναι και ύψος. Η διχοτόμος ΑΔ είναι και διάμεσος, αφού ΒΔ = ΔΓ.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:
α) Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.
β) Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή προς τη βάση του συμπίπτουν.

2 **Στο διπλανό σχήμα είναι $\widehat{Α} = \widehat{Δ} = ω$ και ΑΓ = ΓΔ.**
Να αποδειχθεί ότι ΑΒ = ΔΕ.



Λύση

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΔΕ και παρατηρούμε ότι έχουν:

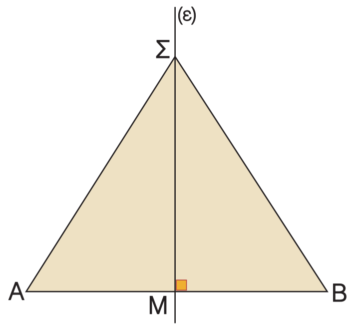
- ΑΓ = ΓΔ από την υπόθεση
- $\widehat{Α} = \widehat{Δ}$ από την υπόθεση
- $\widehat{Γ}_1 = \widehat{Γ}_2$ γιατί είναι κατακορυφήν γωνίες

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή την πλευρά γωνίες ίσες μία προς μία.
Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε ΑΒ = ΔΕ.

3 **Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.**

Λύση

Φέρουμε τη μεσοκάθετο ε ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ που το τέμνει στο



σημείο Μ. Αν Σ είναι τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου, θα αποδείξουμε ότι ΣΑ = ΣΒ. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΣ, ΒΜΣ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- ΣΜ = ΣΜ, κοινή πλευρά και
- ΑΜ = ΜΒ, αφού το Μ είναι μέσον του ΑΒ.

Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε ΣΑ = ΣΒ.

Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος

Από το προηγούμενο παράδειγμα συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

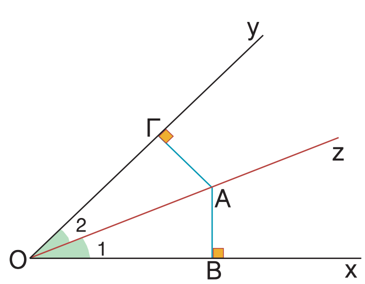
Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Αποδεικνύεται ακόμη ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή

Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.

4 Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο της διχοτόμου γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

Λύση



Φέρνουμε τη διχοτόμο Οz της γωνίας $x\hat{O}y$ και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Α. Αν ΑΒ, ΑΓ είναι οι αποστάσεις του σημείου Α από τις πλευρές της γωνίας, θα αποδείξουμε ότι ΑΒ = ΑΓ.
Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΑΓ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- ΟΑ = ΟΑ κοινή πλευρά και
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, αφού η Οz είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.

Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν αντίστοιχα μια πλευρά και μια οξεία γωνία ίση.
Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε ΑΒ = ΑΓ.

Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας

Από το προηγούμενο παράδειγμα συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

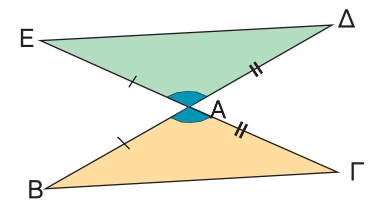
Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

Αποδεικνύεται ακόμη ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή

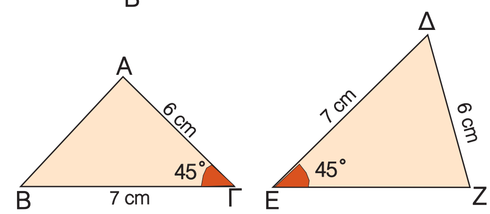
Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου της.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

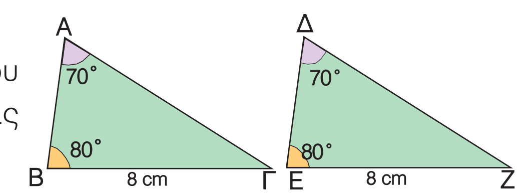
1 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες
$\hat{B}$ = ..., $\hat{\Gamma}$ = ... και ΒΓ = ...



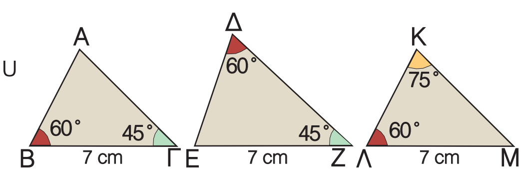
2 Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος, αν και έχουν δύο πλευρές ίσες και μια γωνία ίση.



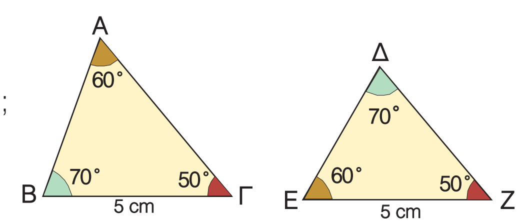
3 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες ΑΒ = ... και ΑΓ = ...



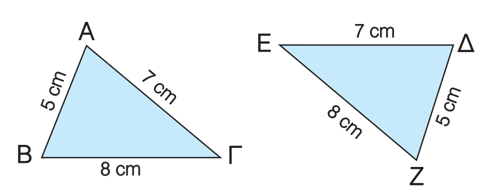
4 Να βρείτε το ζεύγος των ίσων τριγώνων του διπλανού σχήματος.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



5 Είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



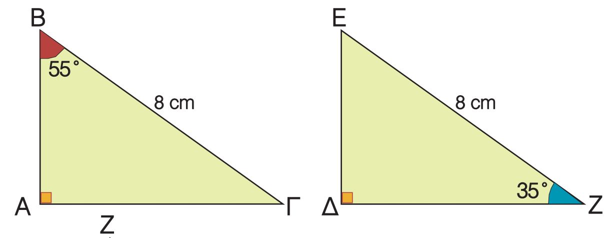
6 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες $\hat{A}$ = ... , $\hat{B}$ = ... και $\hat{\Gamma}$ = ...



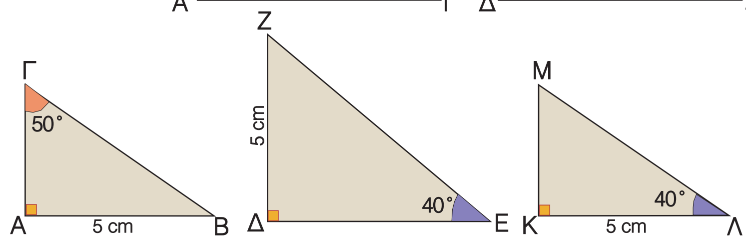
7 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. ☐
β) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. ☐
γ) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες. ☐
δ) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές. ☐
ε) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση. ☐
στ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση. ☐

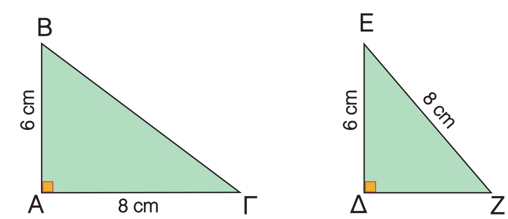
8 Είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα του διπλανού σχήματος;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



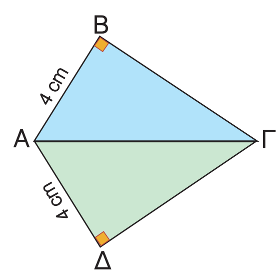
9 Να βρείτε το ζεύγος των ίσων τριγώνων.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



10 Τα ορθογώνια τρίγωνα του διπλανού σχήματος έχουν δύο πλευρές ίσες. Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ίσα.

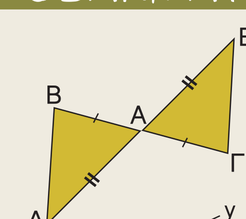


11 Να αιτιολογήσετε γιατί είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ.

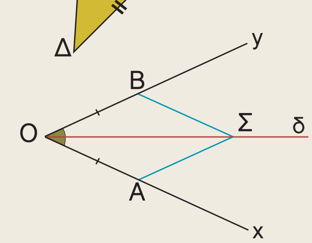


ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ = ΑΕ.
Να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.

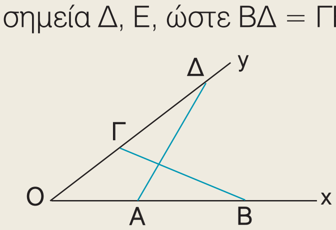


2 Στο διπλανό σχήμα η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$. Αν ΟΑ = ΟΒ και Σ τυχαίο σημείο της διχοτόμου, να αποδείξετε ότι ΣΑ = ΣΒ.

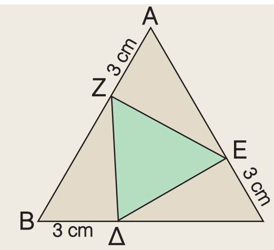


3 Στη βάση ΒΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε σημεία Δ, Ε, ώστε ΒΔ = ΓΕ.
Να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΑΕ.

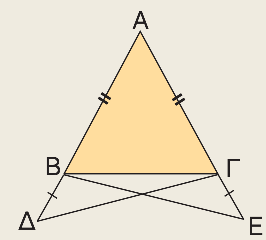
4 Στο διπλανό σχήμα είναι ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ.
Να αποδείξετε ότι ΒΓ = ΑΔ.



5 Κάθε πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι 8 cm. Αν είναι ΑΖ = ΒΔ = ΓΕ = 3 cm, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.



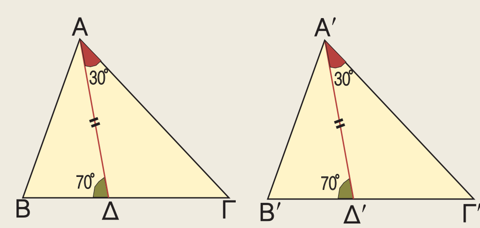
6 Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών ΑΒ, ΑΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε αντιστοίχως τμήματα ΒΔ = ΓΕ.
Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta} = \hat{E}$.



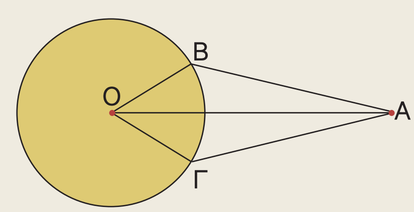
7 Σ' ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$.
Να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΑΔ και ΒΓ = ΓΔ.

8 Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.

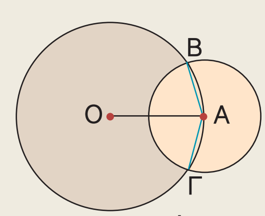
9 Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ του διπλανού σχήματος έχουν τις διχοτόμους ΑΔ και Α′Δ′ ίσες. Να αποδείξετε ότι:
α) ΑΒ = Α′Β′
β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα.



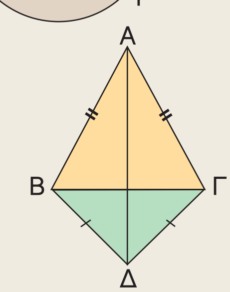
10 Στο διπλανό σχήμα το σημείο Α ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ ενός κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Ο. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑΓ είναι ίσα.



11 Αν Ο, Α είναι τα κέντρα των κύκλων του διπλανού σχήματος, να αποδείξετε ότι η ΑΟ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.



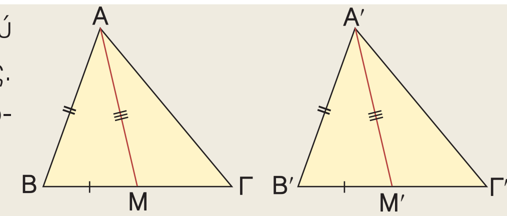
12 Τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ του διπλανού σχήματος έχουν κοινή βάση ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$.



13 Στα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ του διπλανού σχήματος οι διάμεσοι ΑΜ και Α′Μ′ είναι ίσες. Αν ΑΒ = Α′Β′ και ΒΜ = Β′Μ′, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = \hat{B}'$.

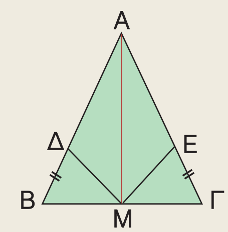
β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα.



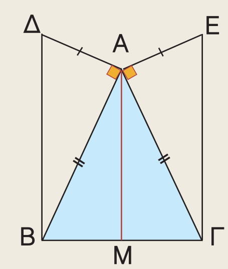
14 Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Μ είναι μέσο της βάσης ΒΓ. Αν είναι ΒΔ = ΓΕ, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές

β) τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΑΕΜ είναι ίσα.



15 Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) να φέρετε ΑΔ ⊥ ΑΒ και ΑΕ ⊥ ΑΓ. Αν είναι ΑΔ = ΑΕ, να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.



16 Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και ΑΒ = ΑΔ. Να αποδείξετε ότι ΒΓ = ΓΔ και ότι η ΑΓ είναι μεσοκάθετος του ΒΔ.

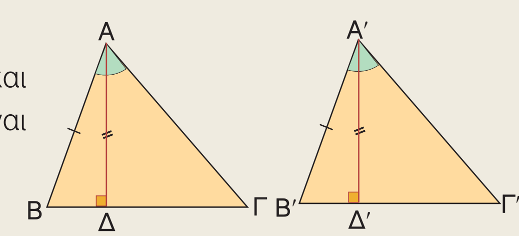
17 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) να φέρετε τη διχοτόμο ΒΔ. Αν ΔΕ ⊥ ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΒΕ.

18 Μια ευθεία (ε) διέρχεται από το μέσον Μ ενός τμήματος ΑΒ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β ισαπέχουν από την ευθεία (ε).

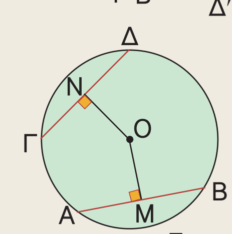
19 Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$ και ΑΒ = Α′Β′. Αν τα ύψη τους ΑΔ και Α′Δ′ είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = \hat{B}'$

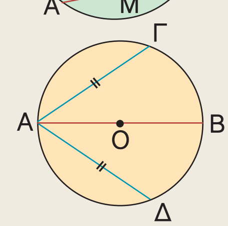
β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα.



20 Αν οι χορδές ΑΒ, ΓΔ ενός κύκλου είναι ίσες, να αποδείξετε ότι και τα αποστήματά τους ΟΜ, ΟΝ είναι ίσα και αντιστρόφως.



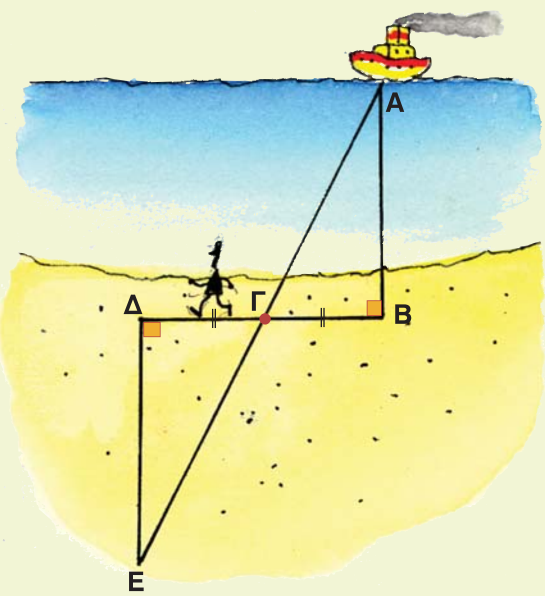
21 Στο διπλανό σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου. Αν οι χορδές ΑΓ και ΑΔ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι και οι χορδές ΒΓ και ΒΔ είναι ίσες.



ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Υπολογισμός της απόστασης ενός πλοίου από τη στεριά

Αν ένα πλοίο βρίσκεται στη θέση Α στη θάλασσα, εμείς στεκόμαστε στη θέση Β στη στεριά και θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση ΑΒ, τότε:



- Ξεκινάμε από το σημείο Β και περπατώντας πάνω στην παραλία κάθετα στην ΑΒ διανύουμε μιαν απόσταση ΒΓ. Στο σημείο Γ βάζουμε ένα σημάδι, π.χ. στερεώνουμε ένα ραβδί και συνεχίζοντας πάνω στην ίδια ευθεία διανύουμε την απόσταση ΓΔ = ΒΓ.

- Στο σημείο Δ αφού βάλουμε ένα σημάδι, π.χ. μια πέτρα, κάνουμε στροφή και περπατώντας κάθετα στη ΒΔ σταματάμε όταν βρεθούμε σ' ένα σημείο Ε, από το οποίο τα σημεία Α και Γ φαίνονται να είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

Η ζητούμενη απόσταση ΑΒ είναι ίση με την απόσταση ΔΕ την οποία μπορούμε να μετρήσουμε, αφού είναι πάνω στη στεριά.

Τη μέθοδο αυτή, λέγεται, ότι εφάρμοσε πριν από 2.500 χρόνια περίπου ο **Θαλής ο Μιλήσιος**.

Πώς ήταν σίγουρος ο Θαλής ότι ΑΒ = ΔΕ; Μπορείτε να το αποδείξετε; Βρείτε τις πέντε προτάσεις που απέδειξε ο Θαλής και σημειώστε ποια απ' αυτές χρησιμοποίησε για να υπολογίσει την απόσταση του πλοίου από τη στεριά.

1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

- ✔ *Μαθαίνω πότε παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία που τις τέμνει.*
- ✔ *Μαθαίνω να διαιρώ ένα ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα τμήματα.*
- ✔ *Μαθαίνω τι ονομάζεται λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων και πώς υπολογίζεται.*
- ✔ *Μαθαίνω πότε δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα προς δύο άλλα τμήματα.*

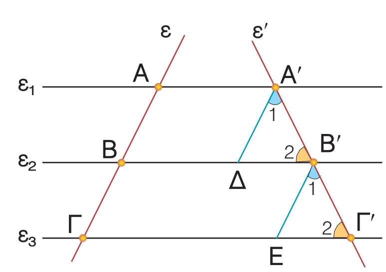
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να χαράξετε μια ευθεία ε κάθετη στις γραμμές του τετραδίου σας και να διαπιστώσετε ότι τρεις διαδοχικές γραμμές του τετραδίου ορίζουν στην ευθεία ε ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

2. Αν χαράξετε μια άλλη ευθεία ε' που δεν είναι κάθετη στις γραμμές του τετραδίου, τότε οι τρεις προηγούμενες διαδοχικές γραμμές ορίζουν ίσα τμήματα και στην ε';

Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων ευθειών

Παίρνουμε τρεις παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 που τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία Α, Β, Γ αντιστοίχως, έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ να είναι ίσα μεταξύ τους.



Αν μια άλλη ευθεία ε' τέμνει τις ε_1, ε_2, ε_3 στα σημεία Α′, Β′, Γ′ αντιστοίχως, τότε θα αποδείξουμε ότι και τα ευθύγραμμα τμήματα Α′Β′, Β′Γ′ είναι ίσα μεταξύ τους.

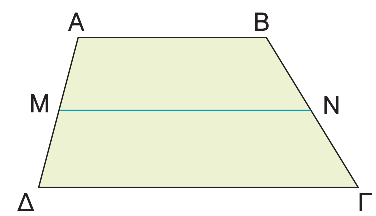
Πράγματι, αν φέρουμε Α′Δ // ε, Β′Ε // ε και συγκρίνουμε τα τρίγωνα Α′Β′Δ και Β′Γ′Ε παρατηρούμε ότι έχουν:

- Α′Δ = Β′Ε γιατί Α′Δ = ΑΒ, Β′Ε = ΒΓ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων ΑΑ′ΔΒ, ΒΒ′ΕΓ αντιστοίχως και από την υπόθεση έχουμε ΑΒ = ΒΓ.
- $\widehat{B}_2' = \widehat{\Gamma}_2'$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ε_2, ε_3 που τέμνονται από την ε'.
- $\widehat{A}_1' = \widehat{B}_1'$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων Α′Δ, Β′Ε που τέμνονται από την ε'.

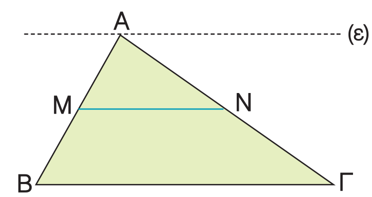
Τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία. Άρα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε Α′Β′ = Β′Γ′. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι:

Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Για παράδειγμα, σ' ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) αν από το μέσο Μ της ΑΔ φέρουμε ευθεία ΜΝ παράλληλη προς τις βάσεις του, τότε οι παράλληλες ΑΒ, ΜΝ, ΔΓ, αφού ορίζουν ίσα τμήματα στην ΑΔ, θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΒΓ. Άρα ΒΝ = ΝΓ.



Ομοίως, σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αν από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε // ΒΓ και από το μέσο Μ της ΑΒ φέρουμε ΜΝ // ΒΓ, τότε οι παράλληλες ε, ΜΝ, ΒΓ αφού ορίζουν ίσα τμήματα στην ΑΒ, θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΓ. Άρα ΑΝ = ΝΓ.



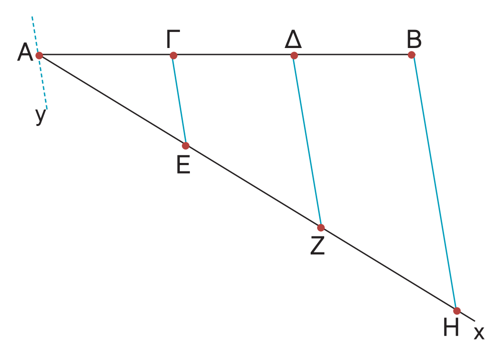
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι:

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε ν ίσα τμήματα

Αν πάρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 5 cm και θέλουμε να το διαιρέσουμε σε τρία ίσα τμήματα, τότε το μήκος κάθε τμήματος θα είναι 1,66... cm, οπότε καθένα από αυτά δεν προσδιορίζεται με ακρίβεια.

Μπορούμε όμως να διαιρέσουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα τμήματα με ακρίβεια, αν εργαστούμε με τη βοήθεια κανόνα και διαβήτη ως εξής:



Από το σημείο Α φέρουμε μια τυχαία ημιευθεία Αx και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε με το διαβήτη τρία διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ, ΕΖ, ΖΗ.

Ενώνουμε τα σημεία Β, Η και από τα σημεία Ζ, Ε, Α φέρνουμε ΖΔ, ΕΓ, Αy παράλληλες προς τη ΒΗ. Οι παράλληλες αυτές ορίζουν στην Αx ίσα τμήματα, οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΒ. Άρα έχουμε ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ.

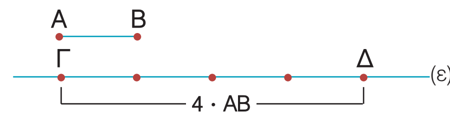
Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να διαιρέσουμε το ευθύγραμμο ΑΒ σε 4, 5, 6, ..., ν ίσα τμήματα.

Η έννοια του λόγου δύο ευθυγράμμων τμημάτων

- Αν έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σε μια ευθεία ε πάρουμε τέσσερα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα που το καθένα είναι ίσο με ΑΒ, τότε κατασκευάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, για το οποίο λέμε ότι είναι ίσο με 4 · ΑΒ και γράφουμε ΓΔ = 4 · ΑΒ.

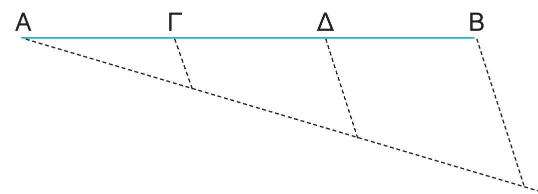
  Η ισότητα αυτή γράφεται και ως εξής: $\frac{\Gamma\Delta}{AB} = 4$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο **λόγος** του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι ο αριθμός 4.



- Αν διαιρέσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ, τότε λέμε ότι το τμήμα ΑΓ είναι ίσο με $\frac{1}{3} \cdot ΑΒ$ και γράφουμε:

  $ΑΓ = \frac{1}{3} \cdot ΑΒ$ ή $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{1}{3}$.

  Λέμε ακόμη ότι:

  $ΑΔ = \frac{2}{3} \cdot ΑΒ$ ή $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$.

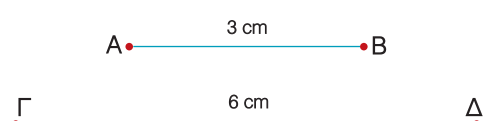
  Δηλαδή ο λόγος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι $\frac{1}{3}$,

  ενώ ο λόγος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι $\frac{2}{3}$.

  Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι:

Ο λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ συμβολίζεται $\frac{ΓΔ}{ΑΒ}$ και είναι ο αριθμός λ, για τον οποίο ισχύει $ΓΔ = λ \cdot ΑΒ$.

- Αν πάρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ = 3 cm και ΓΔ = 6 cm, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο λόγος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ είναι $\frac{1}{2}$,

  δηλαδή είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους $\frac{3\ cm}{6\ cm} = \frac{1}{2}$

Γενικά

Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

Για παράδειγμα, αν έχουμε ΔΕ = 120 cm και ΖΗ = 1,5 m, τότε

$$\frac{ΔΕ}{ΖΗ} = \frac{120\ cm}{1{,}5\ m} = \frac{120\ cm}{150\ cm} = \frac{4}{5}$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ένας αριθμός που εκφράζει τη σχέση που συνδέει τα μήκη τους.
Αν γνωρίζουμε λοιπόν το λόγο δύο ευθυγράμμων τμημάτων π.χ. $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = 2$, αυτό σημαίνει ότι το μήκος του ΑΒ είναι διπλάσιο από το μήκος του ΓΔ, αλλά δε γνωρίζουμε το μήκος κάθε τμήματος, αφού είναι δυνατό να είναι ΑΒ = 80 cm και ΓΔ = 40 cm ή ΑΒ = 18 cm και ΓΔ = 9 cm κ.τ.λ.