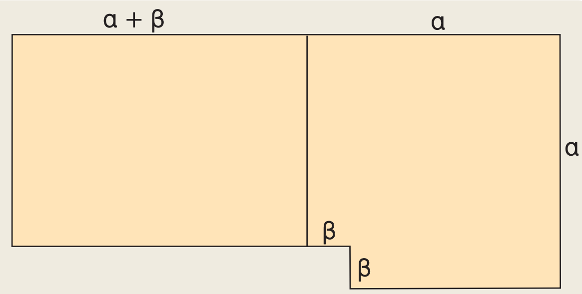
042-052 3-11-06 00:58 ™ÂÏ›‰·51

18 Ένας πατέρας μοίρασε ένα οικόπεδο στα δύο παιδιά του, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δύο οικόπεδα είχαν το ίδιο εμβαδόν ή κάποιο από τα παιδιά αδικήθηκε;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Το τρίγωνο του Πασκάλ και το ανάπτυγμα των δυνάμεων του α + β

1	$(\alpha+\beta)^0=$	1
1 1	$(\alpha+\beta)^1=$	$1\alpha + 1\beta$
1 2 1	$(\alpha+\beta)^2=$	$1\alpha^2 + 2\alpha\beta + 1\beta^2$
1 3 3 1	$(\alpha+\beta)^3=$	$1\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 1\beta^3$
1 4 6 4 1	$(\alpha+\beta)^4=$	$1\alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + 1\beta^4$
1 $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ 1	$(\alpha+\beta)^5=$	.... + ... + ... + ... + ... + ...
1 $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ 1	$(\alpha+\beta)^6=$	……… …… …… …… …… …… …. …. …

Παρατηρήστε τα αναπτύγματα των δυνάμεων του αθροίσματος α + β.

1. Οι αντίστοιχοι συντελεστές σε κάθε ανάπτυγμα σχηματίζουν μια γραμμή σ' ένα αριθμητικό τρίγωνο, που είναι γνωστό ως **τρίγωνο του Πασκάλ**. Το τρίγωνο αυτό πήρε το όνομά του από τον Γάλλο μαθηματικό Blaise Pascal (1623 - 1662) και οι αριθμοί του κρύβουν πολλές ιδιότητες. Ο πρώτος και ο τελευταίος αριθμός κάθε σειράς είναι 1.
Μπορείτε να ανακαλύψετε με ποιον τρόπο προκύπτουν οι υπόλοιποι αριθμοί κάθε σειράς;

2. Συνεχίστε την κατασκευή του τριγώνου και βρείτε τα αναπτύγματα $(\alpha + \beta)^5$ και $(\alpha + \beta)^6$, αφού πρώτα ανακαλύψετε με ποιον τρόπο γράφονται οι δυνάμεις του α και του β σε κάθε ανάπτυγμα.

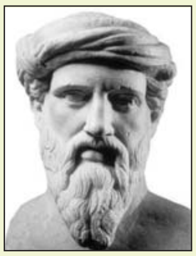
3. Να βρείτε και το ανάπτυγμα του $(\alpha - \beta)^6$, αν γνωρίζετε ότι και τα αναπτύγματα των δυνάμεων της διαφοράς α – β προκύπτουν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, μόνο που θέτουμε τα πρόσημα εναλλάξ, αρχίζοντας από +.
π.χ. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$, $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

4. Μπορείτε να βρείτε ποιες άλλες ιδιότητες κρύβουν οι αριθμοί του τριγώνου Πασκάλ;

042-052 3-11-06 00:59 ™ÂÏ›‰·52

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πυθαγόρειες τριάδες



Πυθαγόρας

Αν οι αριθμοί α, β, γ εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου, τότε όπως γνωρίζουμε, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad (1)$$

Πόσα όμως ορθογώνια τρίγωνα μπορούμε να βρούμε που τα μήκη των πλευρών τους εκφράζονται με ακέραιους αριθμούς;

Μια τριάδα **θετικών ακεραίων** αριθμών α, β, γ, για την οποία ισχύει η σχέση (1), λέμε ότι αποτελεί **Πυθαγόρεια τριάδα**. Την απλούστερη Πυθαγόρεια τριάδα σχηματίζουν οι αριθμοί 5, 4, 3 αφού $5^2 = 4^2 + 3^2$.

Υπάρχουν, άραγε, τρόποι να σχηματίζουμε Πυθαγόρειες τριάδες;

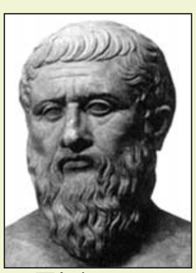
Ο **Πυθαγόρας** (6ος αιώνας π.Χ.) γνώριζε ότι οι αριθμοί της μορφής

$$\frac{\mu^2+1}{2}, \quad \frac{\mu^2-1}{2}, \quad \mu, \quad \text{όπου } \mu \text{ περιττός } (\mu = 3, 5, 7, \dots)$$

σχηματίζουν μια Πυθαγόρεια τριάδα.

α) Μπορείτε να το αποδείξετε;

β) Να βρείτε δύο τουλάχιστον Πυθαγόρειες τριάδες με τους αριθμούς του Πυθαγόρα.



Πλάτωνας

Ο **Πλάτωνας** (5ος – 4ος αιώνας π.Χ.) γνώριζε ότι οι αριθμοί της μορφής

$$\frac{\mu^2}{4}+1, \quad \frac{\mu^2}{4}-1, \quad \mu, \quad \text{όπου } \mu \text{ } \textbf{άρτιος} \text{ } (\mu = 4, 6, 8, \dots)$$

σχηματίζουν μια Πυθαγόρεια τριάδα.

α) Μπορείτε να το αποδείξετε;

β) Να βρείτε δύο τουλάχιστον Πυθαγόρειες τριάδες με τους αριθμούς του Πλάτωνα.

Ευκλείδης

Ο **Διόφαντος** (3ος αιώνας μ.Χ.) στηριζόμενος σε μία ταυτότητα την οποία γνώριζε και ο **Ευκλείδης**, έδωσε μια γενικότερη λύση στο πρόβλημα κατασκευής Πυθαγορείων τριάδων από οποιουσδήποτε αριθμούς (άρτιους ή περιττούς). Ανακάλυψε ότι ο αριθμοί της μορφής $\lambda^2 + \mu^2$, $\lambda^2 - \mu^2$, $2\lambda\mu$, όπου λ, μ θετικοί άνισοι ακέραιοι αριθμοί, σχηματίζουν Πυθαγόρεια τριάδα.

α) Μπορείτε να το αποδείξετε;

β) Να βρείτε δύο τουλάχιστον Πυθαγόρειες τριάδες με τους αριθμούς του Διόφαντου.

ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ: Η έννοια της απόδειξης

- Διερεύνηση του ρόλου της απόδειξης στην καθημερινή ζωή (δικαστήριο, εμπορικές συναλλαγές κ.τ.λ.)
- Η απόδειξη στα Μαθηματικά και στις άλλες επιστήμες (ευθεία απόδειξη, απαγωγή σε άτοπο κ.τ.λ.).

053-062 3-11-06 01:05 ™ÂÏ›‰·53

1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

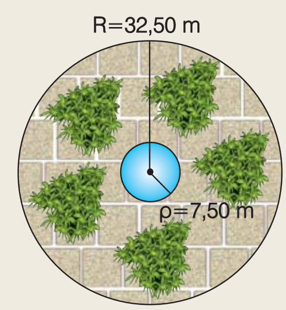
✔ *Μαθαίνω να μετατρέπω μια αλγεβρική παράσταση σε γινόμενο παραγόντων*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $7{,}32 \cdot 25 + 7{,}32 \cdot 75$ β) $347 \cdot \frac{7}{6} - 347 \cdot \frac{1}{6}$

2. Σε μια κυκλική πλατεία ακτίνας R = 32,50 m κατασκευάστηκε ένα κυκλικό συντριβάνι ακτίνας ρ = 7,50 m.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν της πλατείας που απέμεινε μετά την κατασκευή του συντριβανιού.



Πολλές φορές, για την επίλυση ενός προβλήματος, μιας εξίσωσης, μιας ανίσωσης ή για την απλοποίηση ενός κλάσματος, είναι χρήσιμο να μετατραπεί μία παράσταση από άθροισμα σε γινόμενο.

Η διαδικασία με την οποία μια παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται **παραγοντοποίηση**.

Για παράδειγμα, η παράσταση $\pi R^2 - \pi \rho^2$ με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας γράφεται $\pi(R^2 - \rho^2)$ και σύμφωνα με την ταυτότητα $(R + \rho)(R - \rho) = R^2 - \rho^2$, παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\pi R^2 - \pi \rho^2 = \pi(R^2 - \rho^2) = \pi(R + \rho)(R - \rho)$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα η παράσταση $\pi(R + \rho)(R - \rho)$ δεν επιδέχεται περαιτέρω παραγοντοποίηση και γι' αυτό λέμε ότι η παράσταση έχει αναλυθεί σε **γινόμενο πρώτων παραγόντων**.

Στο εξής, όταν λέμε ότι παραγοντοποιούμε μία παράσταση, θα εννούμε ότι την αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Στη συνέχεια, θα δούμε τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης μιας αλγεβρικής παράστασης.

053-062 3-11-06 01:05 ™ÂÏ›‰·54

α) Κοινός παράγοντας

Αν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα.

παραγοντοποιούμε

$$\boxed{3α + 3β - 3γ} = \boxed{3(α + β - γ)}$$

αναπτύσσουμε

Για παράδειγμα, σε όλους τους όρους της παράστασης $3α + 3β - 3γ$ υπάρχει κοινός παράγοντας το 3, οπότε η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$3α + 3β - 3γ = 3(α + β - γ).$$

Ομοίως η παράσταση $2α^2 - 2αβ + 2α$, γράφεται $2α \cdot α - 2α \cdot β + 2α \cdot 1$, οπότε σε όλους τους όρους της υπάρχει κοινός παράγοντας το $2α$.

Άρα, η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$2α^2 - 2αβ + 2α = 2α(α - β + 1).$$

Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι «βγάζουμε κοινό παράγοντα το 2α».

Κάθε όρος μέσα στην παρένθεση είναι το πηλίκο της διαίρεσης των αντίστοιχων όρων της παράστασης με τον κοινό παράγοντα:

$$(2α^2) : (2α) = \frac{2α^2}{2α} = α$$

$$(2αβ) : (2α) = \frac{2αβ}{2α} = β$$

$$(2α) : (2α) = \frac{2α}{2α} = 1$$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $12x^2y - 30xy^2 + 6x^2y^2$ β) $α(ω - x) + 3β(x - ω)$ γ) $3(2x - 1) + x(4x - 2)$

Λύση

α) Σε όλους τους όρους της παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας το $6xy$, οπότε έχουμε:

$$12x^2y - 30xy^2 + 6x^2y^2 = 6xy(2x - 5y + xy)$$

β) Η παράσταση έχει δύο όρους, τους $α(ω - x)$ και $3β(x - ω)$. Για να δημιουργήσουμε και στους δύο όρους κοινό παράγοντα τον $ω - x$, το δεύτερο όρο της τον γράφουμε $-3β(ω - x)$, οπότε έχουμε:

$$α(ω - x) + 3β(x - ω) = α(ω - x) - 3β(ω - x) = (ω - x)(α - 3β)$$

γ) Αν από το δεύτερο όρο της παράστασης βγάλουμε κοινό παράγοντα το 2, τότε δημιουργούμε κοινό παράγοντα το $2x - 1$, οπότε έχουμε:

$$3(2x - 1) + x(4x - 2) = 3(2x - 1) + 2x(2x - 1) = (2x - 1)(3 + 2x)$$

β) Κοινός παράγοντας κατά ομάδες (Ομαδοποίηση)

Στην παράσταση $αx + αy + 2x + 2y$, δεν υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους της. Αν όμως βγάλουμε κοινό παράγοντα, από τους δύο πρώτους όρους το α και από τους δύο τελευταίους το 2, τότε σχηματίζονται δύο όροι με κοινό παράγοντα τον $x + y$. Έτσι, η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\underbrace{ax + ay} + \underbrace{2x + 2y} = a(x + y) + 2(x + y) = (x + y)(a + 2)$$

Την προηγούμενη παράσταση μπορούμε να τη χωρίσουμε και σε διαφορετικές **ομάδες**. Το αποτέλεσμα όμως της παραγοντοποίησης είναι και πάλι το ίδιο. Πράγματι, έχουμε:

$$ax + ay + 2x + 2y = x(a + 2) + y(a + 2) = (a + 2)(x + y)$$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
α) $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20$ β) $\alpha\beta - 3\alpha - 3\beta + 9$ γ) $3x^2 + 5xy + 2y^2$

Λύση

α) $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x - 4) + 5(x - 4) = (x - 4)(3x^2 + 5)$

β) $\alpha\beta - 3\alpha - 3\beta + 9 = \alpha(\beta - 3) - 3(\beta - 3) = (\beta - 3)(\alpha - 3)$

γ) $3x^2 + 5xy + 2y^2 = 3x^2 + 3xy + 2xy + 2y^2 =$
$= 3x(x + y) + 2y(x + y) =$
$= (x + y)(3x + 2y)$.

Μερικές παραστάσεις παραγοντοποιούνται κατά ομάδες, αν **διασπάσουμε** κατάλληλα έναν ή περισσότερους όρους π.χ. $5xy = 3xy + 2xy$

γ) Διαφορά τετραγώνων

Αν εναλλάξουμε τα μέλη της ταυτότητας
$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$, τότε γράφεται και ως εξής:

$$\boldsymbol{\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}$$

Σύμφωνα με την ταυτότητα αυτή, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση που είναι διαφορά τετραγώνων, π.χ. $a^2 - 9 = a^2 - 3^2 = (a + 3)(a - 3)$.

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις: α) $4\beta^2 - 25$ β) $(3x - 1)^2 - 81$ γ) $\alpha^2 - 7$.

Λύση

α) $4\beta^2 - 25 = (2\beta)^2 - 5^2 = (2\beta + 5)(2\beta - 5)$

β) $(3x - 1)^2 - 81 = (3x - 1)^2 - 9^2 =$
$= (3x - 1 + 9)(3x - 1 - 9) =$
$= (3x + 8)(3x - 10)$

γ) $\alpha^2 - 7 = \alpha^2 - (\sqrt{7})^2 = (\alpha - \sqrt{7})(\alpha + \sqrt{7})$

Για να σχηματίσουμε διαφορά τετραγώνων εκφράζουμε κάθε όρο ως τετράγωνο μιας παράστασης.

δ) Διαφορά – άθροισμα κύβων

Οι ταυτότητες $(α - β)(α^2 + αβ + β^2) = α^3 - β^3$ και $(α + β)(α^2 - αβ + β^2) = α^3 + β^3$ γράφονται και ως εξής:

$$α^3 - β^3 = (α - β)(α^2 + αβ + β^2) \qquad α^3 + β^3 = (α + β)(α^2 - αβ + β^2)$$

Σύμφωνα με τις ταυτότητες αυτές, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση που είναι διαφορά ή άθροισμα κύβων, π.χ.

$$x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x - 4)(x^2 + x \cdot 4 + 4^2) = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$$

$$y^3 + 27 = y^3 + 3^3 = (y + 3)(y^2 - y \cdot 3 + 3^2) = (y + 3)(y^2 - 3y + 9)$$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις: α) $x^3 - 27$ β) $x^3 + 64$ γ) $8α^3 - β^3$

Λύση

α) $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + x \cdot 3 + 3^2) =$
$= (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

β) $x^3 + 64 = x^3 + 4^3 = (x + 4)(x^2 - x \cdot 4 + 4^2) =$
$= (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$

γ) $8α^3 - β^3 = (2α)^3 - β^3 = (2α - β)\left[(2α)^2 + 2α \cdot β + β^2\right] = (2α - β)(4α^2 + 2αβ + β^2)$

Για να σχηματίσουμε διαφορά ή άθροισμα κύβων εκφράζουμε κάθε όρο ως κύβο μιας παράστασης.

ε) Ανάπτυγμα τετραγώνου

Οι ταυτότητες $(α + β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2$ και $(α - β)^2 = α^2 - 2αβ + β^2$ γράφονται και ως εξής:

$$α^2 + 2αβ + β^2 = (α + β)^2 \qquad α^2 - 2αβ + β^2 = (α - β)^2$$

Σύμφωνα με τις ταυτότητες αυτές, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση που είναι ανάπτυγμα τετραγώνου **(τέλειο τετράγωνο)**, π.χ.

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x + 2)^2$$

$$y^2 - 6y + 9 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 = (y - 3)^2$$

Οι παραστάσεις $(x + 2)^2$ και $(y - 3)^2$ είναι γινόμενα παραγόντων, αφού
$(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$ και
$(y - 3)^2 = (y - 3)(y - 3)$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
α) $4α^2 + 12α + 9$ β) $α^2 - 10αβ + 25β^2$ γ) $-4y^2 + 4y - 1$

Λύση

α) $4α^2 + 12α + 9 = (2α)^2 + 2 \cdot 2α \cdot 3 + 3^2 = (2α + 3)^2$

β) $\alpha^2 - 10\alpha\beta + 25\beta^2 = \alpha^2 - 2\cdot\alpha\cdot 5\beta + (5\beta)^2 =$
$= (\alpha - 5\beta)^2$

γ) $-4y^2 + 4y - 1 = -(4y^2 - 4y + 1) =$
$= -\left[(2y)^2 - 2\cdot 2y\cdot 1 + 1^2\right] =$
$= -(2y - 1)^2$

Γράφουμε κάθε παράσταση ως ανάπτυγμα τετραγώνου της μορφής
$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ ή $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

στ) Παραγοντοποίηση τριωνύμου της μορφής $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

Το ανάπτυγμα του γινομένου $(x + \alpha)(x + \beta)$ είναι το τριώνυμο $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$, αφού

$$(x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + \alpha x + \beta x + \alpha\beta = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta.$$

Επομένως, ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο $\boxed{x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)}$

Για παράδειγμα, για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2 + 8x + 12$ αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο 12 (σταθερός όρος) και άθροισμα 8 (συντελεστής του x).
Υπάρχουν πολλά ζευγάρια αριθμών που έχουν γινόμενο 12 (π.χ. $1\cdot 12$, $2\cdot 6$, $3\cdot 4$ κ.τ.λ.).
Όμως, μόνο το ζευγάρι 2 και 6 έχει άθροισμα 8. Άρα έχουμε:

$$x^2 + 8x + 12 = x^2 + (6 + 2)x + 6\cdot 2 = (x + 6)(x + 2)$$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα:
α) $x^2 - 8x + 12$ β) $x^2 + 5x - 6$ γ) $-3y^2 + 12y - 9$

Λύση

α) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2 - 8x + 12$, αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο 12 και άθροισμα –8. Οι αριθμοί αυτοί πρέπει να είναι αρνητικοί, αφού έχουν γινόμενο θετικό και άθροισμα αρνητικό. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι το –2 και το –6.
Άρα έχουμε $x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$

$$x^2 \overset{(-2)+(-6)}{\overbrace{-\,8}}x + \underset{(-2)\cdot(-6)}{\underbrace{12}} = (x-2)(x-6)$$

β) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2 + 5x - 6$, αναζητούμε δύο ετερόσημους αριθμούς, που έχουν γινόμενο –6 και άθροισμα 5.
Οι αριθμοί αυτοί είναι το 6 και το –1, οπότε έχουμε $x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$.

γ) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $-3y^2 + 12y - 9$, βγάζουμε κοινό παράγοντα το –3, ώστε ο συντελεστής του y^2 να γίνει 1, οπότε έχουμε

$$-3y^2 + 12y - 9 = -3(y^2 - 4y + 3)$$

Για την παραγοντοποίηση του τριωνύμου $y^2 - 4y + 3$, αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο 3 και άθροισμα –4. Οι αριθμοί αυτοί είναι το –3 και το –1, οπότε έχουμε $-3y^2 + 12y - 9 = -3(y^2 - 4y + 3) = -3(y - 3)(y - 1)$.

053-062 3-11-06 01:05 ™ÂÏ›‰·58

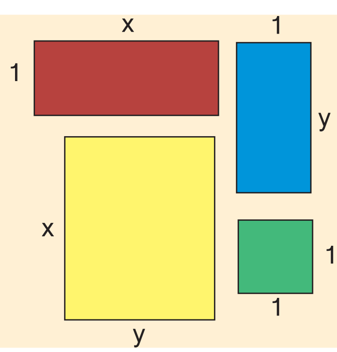
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 α) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $3x^2 - 18x$.
β) Να λυθεί η εξίσωση $3x^2 = 18x$.

Λύση

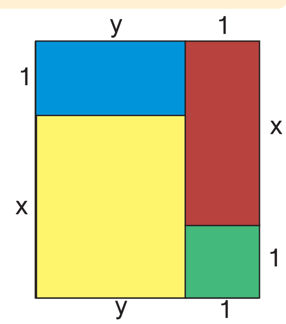
α) Η παράσταση $3x^2 - 18x$ παραγοντοποιείται ως εξής: $3x^2 - 18x = 3x(x - 6)$.

β) Η εξίσωση $3x^2 = 18x$ γράφεται $3x^2 - 18x = 0$ και σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $3x(x - 6) = 0$. Για να είναι το γινόμενο $3x(x - 6)$ ίσο με το μηδέν, πρέπει $3x = 0$ ή $x - 6 = 0$, δηλαδή $x = 0$ ή $x = 6$.

2 

Αν τοποθετήσουμε κατάλληλα τα τέσσερα σχήματα, σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο.
Να βρεθούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου.

Λύση



Το ορθογώνιο που θα σχηματιστεί θα έχει εμβαδόν Ε, ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων σχημάτων, δηλαδή, $Ε = x \cdot 1 + y \cdot 1 + xy + 1 \cdot 1 = x + y + xy + 1$.

Όμως, $x + y + xy + 1 = (x + xy) + (y + 1) =$
$= x(1 + y) + (1 + y) = (1 + y)(x + 1)$.

Άρα, οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $1 + y$ και $1 + x$.

3 Να υπολογιστούν οι αριθμητικές παραστάσεις χωρίς να χρησιμοποιηθεί υπολογιστής τσέπης:
α) $786 \cdot 45 + 786 \cdot 55$ β) $2005^2 - 1995^2$ γ) $565 \cdot 499 + 565 \cdot 66 - 435^2$.

Λύση

α) $786 \cdot 45 + 786 \cdot 55 = 786(45 + 55) = 786 \cdot 100 = 78600$

β) $2005^2 - 1995^2 = (2005 - 1995)(2005 + 1995) = 10 \cdot 4000 = 40000$

γ) $565 \cdot 499 + 565 \cdot 66 - 435^2 = 565(499 + 66) - 435^2 = 565^2 - 435^2 =$
$(565 - 435)(565 + 435) = 130 \cdot 1000 = 130000$

4 Να αναλυθούν σε γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:
α) $3x^2y - 12y^3$ β) $5x^2y + 10x^2 + 5xy + 10x$ γ) $x^4 - 16y^4$
δ) $16α^3β - 54β$ ε) $x^2 - 4x + 4 - y^2$ στ) $3x^3 + 12x^2 - 15x$

Λύση

α) $3x^2y - 12y^3 = 3y(x^2 - 4y^2) = 3y\left[x^2 - (2y)^2\right] = 3y(x - 2y)(x + 2y)$

β) $5x^2y + 10x^2 + 5xy + 10x = 5x(xy + 2x + y + 2) = 5x\left[y(x + 1) + 2(x + 1)\right] =$
$= 5x(x + 1)(y + 2)$

053-062 3-11-06 01:05 ™ÂÏ›‰·59

γ) $x^4 - 16y^4 = (x^2)^2 - (4y^2)^2 = (x^2 + 4y^2)(x^2 - 4y^2) = (x^2 + 4y^2)\left[x^2 - (2y)^2\right] =$
$= (x^2 + 4y^2)(x - 2y)(x + 2y)$

δ) $16\alpha^3\beta - 54\beta = 2\beta(8\alpha^3 - 27) = 2\beta\left[(2\alpha)^3 - 3^3\right] = 2\beta(2\alpha - 3)(4\alpha^2 + 6\alpha + 9)$

ε) $x^2 - 4x + 4 - y^2 = (x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) - y^2 = (x - 2)^2 - y^2 = (x - 2 + y)(x - 2 - y)$.

στ) $3x^3 + 12x^2 - 15x = 3x(x^2 + 4x - 5)$

Το τριώνυμο $x^2 + 4x - 5$ παραγοντοποιείται, εφόσον υπάρχουν αριθμοί με γινόμενο -5 και άθροισμα 4, που είναι οι 5 και -1.
Άρα, $3x^2 + 12x^2 - 15x = 3x(x^2 + 4x - 5) = 3x(x + 5)(x - 1)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

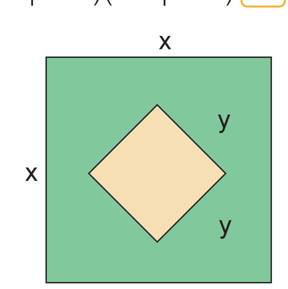
1 Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι γινόμενο παραγόντων;
α) $2(x - y)(x + y)$ β) $2 + (x - y)(x + y)$ γ) $4(\alpha - \beta)^2$ δ) $4 + (\alpha - \beta)^2$
ε) $(x + 2y)x - y$ στ) $(x + 2y)(x - y)$ ζ) $(\alpha + \beta)(\alpha + 3\beta)$
η) $(\alpha + \beta)(\alpha + 3\beta) + 1$.

2 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.
α) $8x + 16 = 8(.............)$ β) $3\alpha y - y^2 = y(.............)$
γ) $6x^2 + 12x = ...(x + 2)$ δ) $-4x^2 + 8x = -4x(.............)$
ε) $\sqrt{2}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}(.............)$ στ) $(x - 1)^2 - (x - 1) = (x - 1)(.............)$

3 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.
Η παράσταση $3x^3 + 3x^2 + x + 1$ παραγοντοποιείται ως εξής:
α) $3x^2(x + 1)$ β) $(x + 3)(3x^2 - 1)$ γ) $(x + 1)(3x^2 + 1)$ δ) $x(3x^2 + x + 1)$.

4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.
α) $x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$ ☐ β) $x^2 - 9 = (x - 9)(x + 9)$ ☐
γ) $112^2 - 12^2 = 100 \cdot 124$ ☐ δ) $4y^2 - 1 = (4y - 1)(4y + 1)$ ☐
ε) $4x^2 - \alpha^2 = (2x - \alpha)(2x + \alpha)$ ☐ στ) $\alpha^2 - (\beta - 1)^2 = (\alpha + \beta - 1)(\alpha - \beta - 1)$ ☐

5 Αν ισχυριστούμε ότι το εμβαδόν του πράσινου μέρους είναι $(x - y)(x + y)$, αυτό είναι σωστό ή λάθος;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



6 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.
α) $\alpha^3 - 2^3 = (\alpha - 2)(...............................)$
β) $\alpha^3 + 3^3 = (\alpha + 3)(...............................)$
γ) $(2x)^3 - 1 = (2x - 1)(...............................)$
δ) $1 + (5y)^3 = (1 + 5y)(...............................)$

053-062 3-11-06 01:05 ™ÂÏ›‰·60

7 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $x^3 - 5^3 = (x - 5)(x^2 - 5x + 25)$ ☐

β) $8 + α^3 = (2 + α)(2^2 - 2α + α^2)$ ☐

γ) $(3y)^3 + 1 = (3y + 1)(3y^2 - 3y + 1)$ ☐

δ) $1 - (2β)^3 = (1 - 2β)(1 + 2β + 4β^2)$ ☐

8 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α) $x^2 + 6x + 9 = (............)^2$ β) $4α^2 - 4α + 1 = (............)^2$

γ) $y^4 - 2y^2 + 1 = (............)^2$ δ) $25 + 10x^3 + x^6 = (............)^2$

9 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Ο κύκλος εμβαδού $πα^2 + 2πα + π$, με $α > 0$, έχει ακτίνα

α) $α + 2$ β) $α^2 + 1$ γ) $α + 1$ δ) $π(α + 1)$

10 Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

$x^2 + (α + β)x + αβ$	$αβ$	$α + β$	$α$	$β$	$(x + α)(x + β)$
$x^2 + 3x + 2$					
$x^2 - 3x + 2$					
$x^2 + 5x - 6$					
$x^2 + 5x + 6$					
$x^2 - x - 2$					
$x^2 + x - 2$					

11 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α) $x^2 + (α + 2)x + 2α = (x + ...) \cdot (x + ...)$

β) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = (x + ...) \cdot (x + ...)$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3α + 6β$ β) $2x - 8$ γ) $8ω^2 + 6ω$

δ) $-9x^2 - 6x$ ε) $8α^2β + 4αβ^2$ στ) $2x^2 - 2xy + 2x$

ζ) $α^2β + αβ^2 - αβ$ η) $2α^3 - 4α^2 + 6α^2β$ θ) $\sqrt{2}\,xy - \sqrt{18}\,y + \sqrt{8}\,y^2$

2 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x(α - β) + y(α - β)$ β) $α(x + y) + β(x + y)$ γ) $(3x - 1)(x - 2) - (x + 4)(x - 2)$

δ) $α^2(α - 2) - 3(2 - α)$ ε) $4x(x - 1) - x + 1$ στ) $2x^2(x - 3) - 6x(x - 3)^2$

3 i) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $x^2 + x$ β) $2y^2 - 5y$ γ) $\omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega)$ δ) $\alpha(3\alpha + 1) - 4\alpha$
ii) Να επιλύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^2 + x = 0$ β) $2y^2 = 5y$ γ) $\omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega) = 0$ δ) $\alpha(3\alpha + 1) = 4\alpha$

4 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $x^2 + xy + \alpha x + \alpha y$ β) $x^3 - x^2 + x - 1$ γ) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20$
δ) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$ ε) $4x^2 - 8x - \alpha x + 2\alpha$ στ) $9\alpha\beta - 18\beta^2 + 10\beta - 5\alpha$
ζ) $12x^2 - 8xy - 15x + 10y$ η) $x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + x + \sqrt{2}$ θ) $\sqrt{6}x^2 + 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}x - 2$

5 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $7\alpha^2 + 10\alpha\beta + 3\beta^2$ β) $5x^2 - 8xy + 3y^2$ γ) $3x^2 - xy - 2y^2$

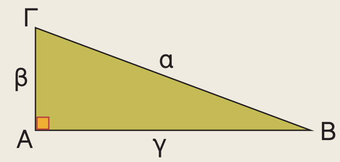
6 α) Να αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων την παράσταση $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta$.
β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha + \beta$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι.

7 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $2\alpha^2 - 2\alpha + \alpha\beta - \beta + \alpha x - x$ β) $2\alpha\beta - 4\beta + 5\alpha - 10 + 2\alpha\gamma - 4\gamma$

8 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $x^2 - 9$ β) $16x^2 - 1$ γ) $\alpha^2 - 9\beta^2$
δ) $\alpha^2\beta^2 - 4$ ε) $36\omega^2 - (\omega + 5)^2$ στ) $4(x + 1)^2 - 9(x - 2)^2$
ζ) $\frac{1}{x^2} - 16$ η) $x^2 - 3$ θ) $x^2 - 2y^2$

9 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $2x^2 - 32$ β) $28 - 7y^2$ γ) $2x^3 - 2x$ δ) $5\alpha x^2 - 80\alpha$ ε) $2(x - 1)^2 - 8$

10 Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να υπολογίσετε την πλευρά γ, όταν:
α) $\alpha = 53, \beta = 28$ β) $\alpha = 0{,}37, \beta = 0{,}12$
γ) $\alpha = 26\lambda, \beta = 10\lambda$



11 Να επιλύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^2 - 49 = 0$ β) $9x^3 - 4x = 0$ γ) $x(x + 1)^2 = 4x$ δ) $(x + 2)^3 = x + 2$

12 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $x^3 - 27$ β) $y^3 + 8$ γ) $\omega^3 + 64$ δ) $8x^3 - 1$ ε) $27y^3 + 1$

13 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $3x^3 - 24$ β) $16\alpha^4 + 2\alpha$ γ) $\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi\rho^3$ δ) $\alpha^4\beta + \alpha\beta^4$

14 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:
α) $x^3 - \ldots.. = (x - 3)(\ldots.. + \ldots.. + 9)$ β) $\ldots.. + y^3 = (2x + y)(4x^2 - \ldots.. + \ldots..)$
γ) $\alpha^3 - \ldots.. = (\alpha - 2\beta)(\ldots.. + \ldots.. + 4\beta^2)$ δ) $\alpha^3 + \ldots.. = (\alpha + 5\beta)(\ldots.. - \ldots.. + 25\beta^2)$

053-062 3-11-06 01:05 ™ÂÏ›‰·62

15 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 - 2x + 1$ β) $y^2 + 4y + 4$ γ) $ω^2 - 6ω + 9$ δ) $α^2 + 10α + 25$

ε) $1 - 4β + 4β^2$ στ) $9x^4 + 6x^2 + 1$ ζ) $4y^2 - 12y + 9$ η) $16x^2 + 8xy + y^2$

θ) $25α^2 - 10αβ + β^2$ ι) $(α + β)^2 - 2(α + β) + 1$ ια) $\frac{y^2}{9} - 2y + 9$ ιβ) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

16 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

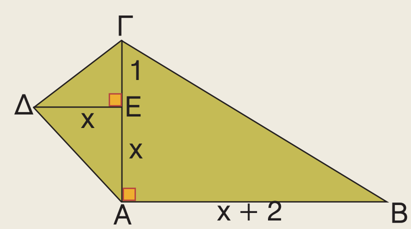
α) $3x^2 + 24x + 48$ β) $-y^2 + 4y - 4$ γ) $2α^2 - 8αβ + 8β^2$ δ) $4α^3 + 12α^2 + 9α$

17 Να βρείτε:

α) Ένα πολυώνυμο που να εκφράζει το εμβαδόν του διπλανού σχήματος.

β) Την πλευρά ενός τετραγώνου που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του διπλανού σχήματος.

18 Να βρείτε την πλευρά ενός τετραγώνου, που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.



19 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2 + 3x + 2$ β) $y^2 - 4y + 3$ γ) $ω^2 + 5ω + 6$ δ) $α^2 + 6α + 5$

ε) $x^2 - 7x + 12$ στ) $y^2 - y - 12$ ζ) $ω^2 - 9ω + 18$ η) $α^2 + 3α - 10$

20 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2 + (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3}$ β) $x^2 + (2α + 3β)x + 6αβ$ γ) $x^2 + (3 - \sqrt{2})x - 3\sqrt{2}$

21 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2ω^2 + 10ω + 8$ β) $3α^2 - 12α - 15$ γ) $αx^2 - 7αx + 6α$

22 Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις χωρίς να χρησιμοποιήσετε υπολογιστή τσέπης.

α) $1453 \cdot 1821 - 1453 \cdot 821$ β) $801^2 + 199 \cdot 801$ γ) $998^2 - 4$

δ) $999 \cdot 1001 + 1$ ε) $999^2 + 2 \cdot 999 + 1$ στ) $97^2 + 6 \cdot 97 + 9$

23 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

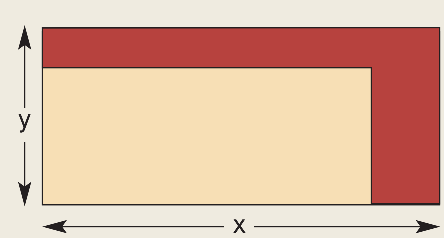
α) $x^2y^2 - 4y^2 - x^2 + 4$ β) $x^4 - 1 + x^3 - x$ γ) $x^3(x^2 - 1) + 1 - x^2$

δ) $(x^2 + 9)^2 - 36x^2$ ε) $α^2 - 2αβ + β^2 - α + β$ στ) $x^2 - 2xy + y^2 - ω^2$

ζ) $1 - α^2 + 2αβ - β^2$ η) $y^2 - x^2 - 10y + 25$ θ) $2(x-1)(x^2-4)-5(x-1)(x-2)^2$

ι) $(y^2 - 4)^2 - (y + 2)^2$ ια) $(α^2 + β^2 - γ^2)^2 - 4α^2β^2$ ιβ) $(x^2+9)(α^2+4) - (αx+6)^2$

24 Ενός ορθογωνίου οικοπέδου οι διαστάσεις x, y μειώθηκαν, επειδή έπρεπε να αυξηθεί το πλάτος των διπλανών δρόμων. Αν το εμβαδόν του οικοπέδου που απέμεινε είναι $xy - x - 2y + 2$, να βρείτε ποια θα μπορούσε να είναι η μείωση κάθε διάστασής του.



063-067 3-11-06 01:08 ™ÂÏ›‰·63

1.7 Διαίρεση πολυωνύμων

✔ *Μαθαίνω να βρίσκω το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου Δ(x) με το πολυώνυμο δ(x).*

✔ *Μαθαίνω να γράφω την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του Δ(x) με το δ(x).*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Αν τοποθετήσουμε σε μια αίθουσα 325 καθίσματα σε σειρές και κάθε σειρά περιέχει 19 καθίσματα, πόσες σειρές θα σχηματίσουμε και πόσα καθίσματα θα περισσέψουν; Να γράψετε την ισότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

2. Να βρείτε το πολυώνυμο Δ(x) το οποίο διαιρούμενο με το πολυώνυμο $δ(x) = x^2 – x$, δίνει πηλίκο $π(x) = 2x^2 – 3x – 1$ και υπόλοιπο $υ(x) = 7x – 4$.

Ξέρουμε ότι, αν έχουμε δύο φυσικούς αριθμούς **Δ** (διαιρετέος) και **δ** (διαιρέτης) με $δ \neq 0$ και κάνουμε τη διαίρεση **Δ : δ**, τότε βρίσκουμε δύο μοναδικούς φυσικούς αριθμούς **π** (πηλίκο) και **υ** (υπόλοιπο), για τους οποίους ισχύει:

$$Δ = δπ + υ \quad \text{με} \quad υ < δ$$

Αν $υ = 0$, είναι $Δ = δ \cdot π$ και τότε λέμε ότι έχουμε **τέλεια διαίρεση**.
Στην περίπτωση αυτή λέμε ακόμα ότι ο δ **διαιρεί** το Δ ή ότι ο δ είναι **παράγοντας** του Δ.

Για παράδειγμα, αν $Δ = 325$ και $δ = 19$, τότε με τη διαίρεση 325 : 19, βρίσκουμε τους αριθμούς $π = 17$ και $υ = 2$, για τους οποίους ισχύει

$$325 = 19 \cdot 17 + 2 \quad \text{με} \quad 2 < 19$$

$$\begin{array}{r|l} 325 & 19 \\ \hline -19 & 17 \\ \hline 135 & \\ -133 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

Ομοίως, αν έχουμε δύο πολυώνυμα **Δ(x)** (διαιρετέος) και **δ(x)** (διαιρέτης) με $δ(x) \neq 0$ και κάνουμε τη διαίρεση **Δ(x) : δ(x)**, τότε βρίσκουμε ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων **π(x)** (πηλίκο) και **υ(x)** (υπόλοιπο), για τα οποία ισχύει:

$$Δ(x) = δ(x)π(x) + υ(x)$$ (Ταυτότητα Ευκλείδειας διαίρεσης)

όπου το υ(x) ή είναι ίσο με μηδέν ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του δ(x).

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, περιγράφεται η διαδικασία της διαίρεσης του πολυωνύμου $Δ(x) = 2x^2 – 5x^3 + 2x^4 – 4 + 8x$ με το πολυώνυμο $δ(x) = x^2 – x$.

063-067 7-11-06 21:32 ™ÂÏ›‰·64

Γράφουμε τα πολυώνυμα του διαιρετέου και του διαιρέτη κατά τις φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής του x.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-5x^3+2x^2+8x-4 & x^2-x \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Διαιρούμε τον πρώτο όρο $2x^4$ του διαιρετέου με τον πρώτο όρο x^2 του διαιρέτη $\left(\frac{2x^4}{x^2}=2x^2\right)$ Το αποτέλεσμα $2x^2$ είναι ο πρώτος όρος του πηλίκου.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-5x^3+2x^2+8x-4 & x^2-x \\ \cline{2-2} & 2x^2 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζουμε το $2x^2$, που είναι ο πρώτος όρος του πηλίκου, με το διαιρέτη x^2-x και το γινόμενο $2x^2(x^2-x)=2x^4-2x^3$ το αφαιρούμε από το διαιρετέο. Για να γίνουν ευκολότερα οι πράξεις, αλλάζουμε τα πρόσημα και αντί για αφαίρεση κάνουμε πρόσθεση και έτσι βρίσκουμε το **πρώτο μερικό υπόλοιπο**

$$υ_1=-3x^3+2x^2+8x-4.$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-5x^3+2x^2+8x-4 & x^2-x \\ \cline{2-2} -2x^4+2x^3 & 2x^2 \\ \cline{1-1} -3x^3+2x^2+8x-4 & \end{array}$$

Στη συνέχεια διαιρούμε τον πρώτο όρο $-3x^3$ του υπολοίπου $υ_1$ με τον πρώτο όρο x^2 του διαιρέτη $\left(-\frac{3x^3}{x^2}=-3x\right)$. Το αποτέλεσμα $-3x$ είναι ο δεύτερος όρος του πηλίκου.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-5x^3+2x^2+8x-4 & x^2-x \\ \cline{2-2} -2x^4+2x^3 & 2x^2-3x \\ \cline{1-1} -3x^3+2x^2+8x-4 & \end{array}$$

Πολλαπλασιάζουμε το $-3x$, που είναι ο δεύτερος όρος του πηλίκου, με το διαιρέτη x^2-x και το γινόμενο $-3x(x^2-x)=-3x^3+3x^2$ το αφαιρούμε από το υπόλοιπο $υ_1$ και βρίσκουμε το **δεύτερο μερικό υπόλοιπο** $υ_2=-x^2+8x-4$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-5x^3+2x^2+8x-4 & x^2-x \\ \cline{2-2} -2x^4+2x^3 & 2x^2-3x \\ \cline{1-1} -3x^3+2x^2+8x-4 & \\ 3x^3-3x^2 & \\ \cline{1-1} -x^2+8x-4 & \end{array}$$

Συνεχίζουμε τη διαίρεση με τον ίδιο τρόπο μέχρι να καταλήξουμε σε υπόλοιπο που να είναι ίσο με μηδέν **(τέλεια διαίρεση)** ή να έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του διαιρέτη x^2-x **(ατελής διαίρεση)**, οπότε η διαίρεση δεν μπορεί να συνεχιστεί.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-5x^3+2x^2+8x-4 & x^2-x \\ \cline{2-2} -2x^4+2x^3 & 2x^2-3x-1 \\ \cline{1-1} -3x^3+2x^2+8x-4 & \\ 3x^3-3x^2 & \\ \cline{1-1} -x^2+8x-4 & \\ x^2-x & \\ \cline{1-1} 7x-4 & \end{array}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα, η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$$\underset{\text{(Διαιρετέος)}}{2x^4-5x^3+2x^2+8x-4} = \underset{\text{(διαιρέτης)}}{(x^2-x)} \cdot \underset{\text{(πηλίκο)}}{(2x^2-3x-1)} + \underset{\text{(υπόλοιπο)}}{(7x-4)}$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των βαθμών διαιρέτη και πηλίκου είναι ίσο με το βαθμό του διαιρετέου.

063-067 3-11-06 01:08 ™ÂÏ›‰·65

Ομοίως η διαίρεση $(8x^4 + 8x^3 + 17x - 5) : (2x^2 + 3x - 1)$, γίνεται ως εξής:

> Από το διαιρετέο λείπει ο όρος 2ου βαθμού, οπότε, όταν τον γράφουμε κατά τις φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής του, συνήθως τον συμπληρώνουμε με το μηδενικό μονώνυμο ή αφήνουμε τη θέση του κενή για να γίνει ευκολότερα η αναγωγή ομοίων όρων.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
8x^4 & +8x^3 & & +17x & -5 & 2x^2+3x-1 \\ \cline{6-6}
-8x^4 & -12x^3 & +4x^2 & & & 4x^2-2x+5 \\ \cline{1-5}
 & -4x^3 & +4x^2 & +17x & -5 & \\
 & +4x^3 & +6x^2 & -2x & & \\ \cline{2-5}
 & & 10x^2 & +15x & -5 & \\
 & & -10x^2 & -15x & +5 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Στην τελευταία διαίρεση, όπου το υπόλοιπο είναι μηδέν, η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$$8x^4 + 8x^3 + 17x - 5 = (2x^2 + 3x - 1) \cdot (4x^2 - 2x + 5)$$

(Διαιρετέος) = (διαιρέτης) · (πηλίκο)

Τα πολυώνυμα $\delta = 2x^2 + 3x - 1$ και $\pi = 4x^2 - 2x + 5$ λέγονται **παράγοντες** ή **διαιρέτες** του πολυωνύμου $\Delta = 8x^4 + 8x^3 + 17x - 5$.

Γενικά

Ένα πολυώνυμο **δ** είναι διαιρέτης ή παράγοντας ενός πολυωνύμου **Δ**, αν η διαίρεση **Δ : δ** είναι τέλεια, δηλαδή αν υπάρχει πολυώνυμο **π**, τέτοιο ώστε να ισχύει **Δ = δ · π**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **α)** **Να γίνει η διαίρεση $(4x^4 + 3x^2 - 1) : (2x - 1)$.**
β) **Να αναλυθεί το πολυώνυμο $4x^4 + 3x^2 - 1$ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.**

Λύση

α)

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & & +3x^2 & & -1 & 2x-1 \\ \cline{6-6}
-4x^4 & +2x^3 & & & & 2x^3+x^2+2x+1 \\ \cline{1-5}
 & 2x^3 & +3x^2 & & -1 & \\
 & -2x^3 & +x^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & & 4x^2 & & -1 & \\
 & & -4x^2 & +2x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 2x & -1 & \\
 & & & -2x & +1 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

β) Από την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης, έχουμε:

$4x^4+3x^2-1=(2x-1)(2x^3+x^2+2x+1)$.

Παρατηρούμε ότι το πηλίκο μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:

$2x^3 + x^2 + 2x + 1 =$

$= x^2(2x + 1) + (2x + 1) =$

$= (2x + 1)(x^2 + 1)$.

Επομένως, το πολυώνυμο $4x^4 + 3x^2 - 1$ αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής:

$4x^4 + 3x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)(x^2 + 1)$.

063-067 3-11-06 01:08 ™ÂÏ›‰·66

2 Να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο $\delta = 3x + 2\alpha$ είναι διαιρέτης του πολυωνύμου $\Delta = 3x^3 - 4\alpha x^2 - \alpha^2 x + 2\alpha^3$.

Λύση

Το πολυώνυμο δ είναι διαιρέτης του πολυωνύμου Δ, αν το υπόλοιπο της διαίρεσης Δ : δ είναι μηδέν. Κάνουμε τη διαίρεση Δ : δ.

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & -\;4\alpha x^2 & -\;\alpha^2 x & +\;2\alpha^3 & 3x + 2\alpha \\ \cline{5-5} -3x^3 & -\;2\alpha x^2 & & & x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 \\ \hline & -\;6\alpha x^2 & -\;\alpha^2 x & +\;2\alpha^3 & \\ & 6\alpha x^2 & +\;4\alpha^2 x & & \\ \cline{2-4} & & +\;3\alpha^2 x & +\;2\alpha^3 & \\ & & -\;3\alpha^2 x & -\;2\alpha^3 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

Σύμφωνα με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε:

$3x^3 - 4\alpha x^2 - \alpha^2 x + 2\alpha^3 =$
$= (3x + 2\alpha)(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)$, που σημαίνει ότι το πολυώνυμο $3x + 2\alpha$ είναι διαιρέτης του πολυωνύμου $3x^3 - 4\alpha x^2 - \alpha^2 x + 2\alpha^3$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με το $4x + 7$ είναι πολυώνυμο:
α) 1ου βαθμού β) 2ου βαθμού γ) 3ου βαθμού δ) σταθερό.

ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με το $x^2 - 4x + 9$ δεν μπορεί να είναι:
α) 5 β) $3x - 2$ γ) $x^2 + 3$ δ) $4x$.

iii) Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $2x^2 + x + 5$ δίνει πηλίκο $x^4 + x - 2$, τότε ο βαθμός του $P(x)$ είναι:
α) 4 β) 6 γ) 8 δ) οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός.

2 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Βαθμός Διαιρετέου	Βαθμός Διαιρέτη	Βαθμός Πηλίκου
8	3	
7		2
	6	3

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Το πηλίκο της διαίρεσης του $(2x + 1)(x + 3)$ με το $2x + 1$ είναι το $x + 3$. ☐

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με το $x + 6$ είναι το $x^2 + 2$. ☐

γ) Αν διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο 6ου βαθμού με ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού, τότε το πηλίκο είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού. ☐

δ) Το $x - 4$ είναι παράγοντας του $x^2 - 16$. ☐

ε) Το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3 + 1) : (x + 1)$ είναι το $x^2 - x + 1$. ☐

063-067 3-11-06 01:08 ™ÂÏ›‰·67

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να κάνετε τις διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης σε κάθε περίπτωση.

α) $(2x^3 + x^2 - 3x + 6) : (x + 2)$ β) $(6x^3 - x^2 - 10x + 5) : (3x + 1)$

γ) $(6x^4 - x^2 + 2x - 7) : (x - 1)$ δ) $(4x^3 + 5x - 8) : (2x - 1)$

ε) $(x^5 - x^4 + 3x^2 + 2) : (x^2 - x + 2)$ στ) $(9x^4 - x^2 + 2x - 1) : (3x^2 - x + 1)$

ζ) $(8x^4 - 6x^2 - 9) : (2x^2 - 3)$ η) $(3x^5 - 2x^3 - 4) : (3x^2 - 1)$

2 Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να είναι οι διαιρέσεις σωστές.

α)
$$\begin{array}{rr|l} 6x^2 + \ldots\ldots + \ldots\ldots & & \ldots\ldots + 2 \\ \hline -6x^2 - \ \ldots\ldots & & 2x + \ldots\ldots \\ 18x \ + \ldots\ldots & & \\ -18x \ - \ \ldots\ldots & & \\ \hline 0 & & \end{array}$$

β)
$$\begin{array}{r|l} \ldots\ldots + \ldots\ldots + 2x + 20 & x + \ldots\ldots \\ \hline \ldots\ldots - \ 6x^2 \qquad\qquad & 2x^2 + \ldots\ldots - \ldots\ldots \\ 4x^2 + \ldots\ldots + 20 & \\ \ldots\ldots \ - \ \ldots\ldots \qquad & \\ \hline -10x \ + \ldots\ldots & \\ \ldots\ldots + \ldots\ldots & \\ \hline \ldots\ldots & \end{array}$$

3 Ποιο πολυώνυμο διαιρούμενο με το $x^2 - x + 1$ δίνει πηλίκο $2x + 3$ και υπόλοιπο $3x + 2$;

4 Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x)$ είναι διαιρέτης του πολυώνυμου $P(x)$, όταν:

α) $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 9x - 18$ και $Q(x) = 2x - 3$

β) $P(x) = 2x^4 - x^2 + 5x - 3$ και $Q(x) = x^2 + x - 1$.

5 α) Να κάνετε τη διαίρεση $(x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9) : (x^2 - 9)$

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9$.

6 α) Να αποδείξετε ότι ο $x + 1$ είναι παράγοντας του πολυώνυμου $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

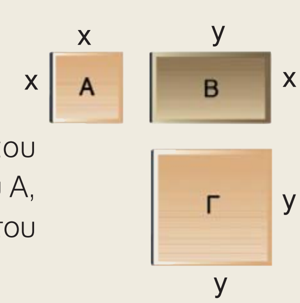
7 Ένας μαθητής ήθελε να παραγοντοποιήσει την παράσταση $α^3 + β^3$ και θυμήθηκε ότι αναλύεται σε γινόμενο δύο παραγόντων, από τους οποίους ο ένας είναι ο $α + β$. Επειδή είχε ξεχάσει τον άλλο παράγοντα, πώς θα μπορούσε να τον βρει;

8 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x^3 + 2)(x^2 - 5) + 4x^2 - 6x + 7$. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης

α) $P(x) : (x^3 + 2)$ β) $P(x) : (x^2 - 5)$

9 Να κάνετε τη διαίρεση $(6x^3 + α) : (x - 1)$ και να βρείτε την τιμή του α, για την οποία η διαίρεση είναι τέλεια.

10 Αν ένας παράγοντας του πολυώνυμου $2x^3 - x^2 - 4x + 3$ είναι ο $(x - 1)^2$, να βρείτε τον άλλο παράγοντα.



11 Για την πλακόστρωση του δαπέδου ενός δωματίου που έχει σχήμα ορθογωνίου, χρησιμοποιήσαμε 45 πλακάκια τύπου Α, 56 πλακάκια τύπου Β και 16 πλακάκια τύπου Γ. Αν το πλάτος του δωματίου είναι $5x + 4y$, ποιο είναι το μήκος του;

1.8 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων

✔ *Μαθαίνω να βρίσκω:*
Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο και Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να αναλύσετε τους αριθμούς 12, 24, 300 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των αριθμών αυτών.

2. Με ανάλογο τρόπο να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ.
των μονωνύμων $12x^3y^2$, $24x^2y^3\omega$, $300x^4y$ και
των πολυωνύμων $3(x-y)(x+y)$, $18(x-y)^2$, $9(x-y)$.

Σε προηγούμενη τάξη μάθαμε να βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. θετικών ακεραίων αριθμών που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
Για παράδειγμα, οι αριθμοί 12, 24 και 300, αν αναλυθούν σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, γράφονται:

$$12 = 2^2 \cdot 3 \qquad 24 = 2^3 \cdot 3 \qquad 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Άρα,
Ε.Κ.Π.$(12, 24, 300) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600$ (Γινόμενο κοινών και μη κοινών παραγόντων με το μεγαλύτερο εκθέτη).
Μ.Κ.Δ.$(12, 24, 300) = 2^2 \cdot 3 = 12$ (Γινόμενο κοινών παραγόντων με το μικρότερο εκθέτη).

Με ανάλογο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Δηλαδή:

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

Στο εξής θα περιοριστούμε σε ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις με θετικούς ακέραιους συντελεστές. Στην περίπτωση αυτή, ως αριθμητικό παράγοντα του Ε.Κ.Π., θα θεωρούμε το Ε.Κ.Π. των αριθμητικών παραγόντων των παραστάσεων και ως αριθμητικό παράγοντα του Μ.Κ.Δ. θα θεωρούμε το Μ.Κ.Δ. των αριθμητικών παραγόντων των παραστάσεων.

068-070 3-11-06 01:12 ™ÂÏ›‰·69

Για παράδειγμα,

– τα μονώνυμα $12x^3y^2$, $24x^2y^3\omega$, $300x^4y$ έχουν

Ε.Κ.Π. $= 600x^4y^3\omega$ *και* *Μ.Κ.Δ.* $= 12x^2y$ ενώ

– τα πολυώνυμα $3(x-y)(x+y)$, $18(x-y)^2$, $9(x-y)$ έχουν

Ε.Κ.Π. $= 18(x-y)^2(x+y)$ *και* *Μ.Κ.Δ.* $= 3(x-y)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ. των μονωνύμων $6x^3y\omega$, $9x^2y\omega^2$, $3xy^4$.

Λύση

Οι συντελεστές 6, 9, 3 έχουν Ε.Κ.Π. = 18 και Μ.Κ.Δ. = 3, άρα τα μονώνυμα έχουν Ε.Κ.Π. $= 18x^3y^4\omega^2$ και Μ.Κ.Δ. $= 3xy$.

2 Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ. των πολυωνύμων:
$A = 12x^3 - 12x^2$, $B = 18x^2 - 36x + 18$ και $\Gamma = 9x^2 - 9x$.

Λύση

- *Αναλύουμε τα πολυώνυμα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.*
- *Υπολογίζουμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των αριθμητικών παραγόντων.*
- *Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των πολυωνύμων.*

$A = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 12(x-1)(x+1)$

$B = 18x^2 - 36x + 18 = 18(x^2 - 2x + 1) = 18(x-1)^2$

$\Gamma = 9x^2 - 9x = 9x(x-1)$

Οι αριθμητικοί παράγοντες 12, 18, 9 έχουν Ε.Κ.Π. = 36 και Μ.Κ.Δ. = 3.

Τα πολυώνυμα Α, Β, Γ έχουν Ε.Κ.Π. $= 36x(x-1)^2(x+1)$ και Μ.Κ.Δ. $= 3(x-1)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος παραστάσεων της στήλης Α, το Ε.Κ.Π. τους από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^4(x+2)^2$, $x(x+2)^3$	1. $6x^2(x+2)^2$
β. $x^3(x+2)$, $x(x+2)^3$	2. $x^3(x+2)^3$
γ. $6x^2(x+2)$, $2x(x+2)^2$	3. $6x^2(x+2)$
	4. $x^4(x+2)^3$

α	β	γ

068-070 3-11-06 01:12 ™ÂÏ›‰·70

2 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, γράφοντας σε κάθε κενό το Ε.Κ.Π. των παραστάσεων Α, Β.

Β \ Α	$4x^3$	$2x(x-1)$	$9(x-1)^2$
$6x^2$			
$x^2(x-1)$			
$8x^5$			

3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος παραστάσεων της στήλης Α, το Μ.Κ.Δ. τους από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $6x^3(x+1)^2$, $3x(x+1)^3$	1. $6x^2(x+1)^2$
β. $2x^2(x+1)^3$, $3x^4(x+1)^2$	2. $3x(x+1)^2$
γ. $3x^2(x+1)$, $6x^3(x+1)^2$	3. $3x^2(x+1)$
	4. $x^2(x+1)^2$

α	β	γ

4 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα γράφοντας σε κάθε κενό το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων Α, Β.

Β \ Α	$3x^2$	$x^4(x-2)^2$	$6(x-2)^3$
$6x(x-2)^2$			
$2x^3(x-2)$			
$3x^3(x-2)^3$			

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $12x^3y^2\omega^2$, $18x^2y\omega^3$, $24x^2y^3\omega^4$

β) $15\alpha xy^3$, $10\alpha x^2\omega^2$, $5y\omega^2$

γ) $2x^2(x+y)^2$, $3xy^3(x+y)^2$, $8x^2y(x-y)(x+y)$

2 Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $6(x^2-y^2)$, $4(x-y)^2$, $12(x-y)^3$

β) $\alpha^2-3\alpha+2$, α^2-4, $\alpha^3-4\alpha$

γ) $\alpha^3-\alpha^2$, $(\alpha^2-\alpha)(\alpha^2-1)$, $\alpha^3-2\alpha^2+\alpha$

071-074 3-11-06 01:18 ™ÂÏ›‰·71

1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

✔ *Γνωρίζω ποια αλγεβρική παράσταση λέγεται ρητή και πότε ορίζεται.*
✔ *Μαθαίνω να απλοποιώ ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Ποια είναι η τιμή της παράστασης $\frac{x^3+4}{x-1}$ για $x = 0$;

Μπορείτε να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x = 1$;

2. Ποιο από τα παρακάτω κλάσματα απλοποιείται;

$$\frac{6 \cdot 2 + 7}{3 \cdot 2}, \quad \frac{6 \cdot 2 \cdot 7}{3 + 2}, \quad \frac{6 \cdot 2 \cdot 7}{3 \cdot 2}$$

3. Ποια από τις παρακάτω παραστάσεις απλοποιείται;

$$\frac{6x + y}{3x}, \quad \frac{6xy}{3 + x}, \quad \frac{6xy}{3x}$$

Μια αλγεβρική παράσταση $\left(\text{π.χ. } \frac{x^3+4}{x-1}, \frac{xyω}{x+y}, \frac{2}{x^2+4}\right)$ που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα, λέγεται **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς **ρητή παράσταση**.
Οι μεταβλητές μιας ρητής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή της, αφού δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.
Για παράδειγμα, η παράσταση $\frac{x^3+4}{x-1}$ ορίζεται, αν $x \neq 1$.

Στη συνέχεια, όταν γράφουμε μια ρητή παράσταση, θα εννοείται ότι οι μεταβλητές της δεν παίρνουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

Όπως μια αριθμητική παράσταση, έτσι και μια ρητή παράσταση, μπορεί να απλοποιηθεί, αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα.

Έτσι, η παράσταση $\frac{6x+y}{3x}$ δεν απλοποιείται, ενώ η παράσταση $\frac{6xy}{3x}$ απλοποιείται, γιατί οι όροι της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα το 3x. Αν διαιρέσουμε και τους δύο όρους με τον κοινό παράγοντα, έχουμε $\frac{6xy}{3x} = \frac{6xy : 3x}{3x : 3x} = \frac{2y}{1} = 2y$

Η προηγούμενη απλοποίηση γίνεται συντομότερα, αν διαγράψουμε τον κοινό παράγοντα, οπότε έχουμε $\frac{6xy}{3x} = \frac{\cancel{3x} \cdot 2y}{\cancel{3x}} = 2y$

071-074 7-11-06 21:36 ™ÂÏ›‰·72

Αν όμως σε μια ρητή παράσταση ο αριθμητής ή ο παρονομαστής δεν είναι γινόμενο, τότε για να την απλοποιήσουμε εργαζόμαστε ως εξής:

- Παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της και
- διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες των όρων της.

Για παράδειγμα, η παράσταση $\dfrac{5x-10}{x^2-4}$ απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{5x-10}{x^2-4} = \frac{5(x-2)}{x^2-2^2} = \frac{5\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{5}{x+2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Για ποιες τιμές των μεταβλητών τους ορίζονται οι παραστάσεις;

α) $\dfrac{x^2+7x+2}{x}$ β) $\dfrac{x^2+6}{x+2}$ γ) $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$

Λύση

α) Η παράσταση $\dfrac{x^2+7x+2}{x}$ ορίζεται, αν η μεταβλητή x παίρνει τιμές που δε μηδενίζουν τον παρονομαστή, δηλαδή για $x \neq 0$.

β) Ομοίως η παράσταση $\dfrac{x^2+6}{x+2}$ ορίζεται, αν $x+2 \neq 0$, δηλαδή για $x \neq -2$.

γ) Η παράσταση $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ ορίζεται, αν οι μεταβλητές x, y παίρνουν τιμές, τέτοιες ώστε $x-y \neq 0$, δηλαδή για $x \neq y$.

2 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\dfrac{12x^3y\omega^2}{8xy^3}$ β) $\dfrac{3x^2-3}{6x^2-6x}$ γ) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^3-y^3}$

Λύση

α) Στην παράσταση $\dfrac{12x^3y\omega^2}{8xy^3}$ και οι δύο όροι της είναι γινόμενα, οπότε έχουμε

$$\frac{12x^3y\omega^2}{8xy^3} = \frac{3x^2\omega^2}{2y^2}$$

β) Παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της παράστασης και έχουμε

$$\frac{3x^2-3}{6x^2-6x} = \frac{3(x^2-1)}{6x(x-1)} = \frac{3\cancel{(x-1)}(x+1)}{6x\cancel{(x-1)}} = \frac{x+1}{2x}$$

γ) Ομοίως έχουμε $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^3-y^3} = \dfrac{(x-y)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)} = \dfrac{x-y}{x^2+xy+y^2}$

071-074 8-11-06 15:41 ™ÂÏ›‰·73

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α τις τιμές της μεταβλητής της από τη στήλη Β, για τις οποίες ορίζεται.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\frac{1}{x}$	1. $x \neq 1$
β. $\frac{x-1}{x+1}$	2. $x \neq 0$ και $x \neq 1$
γ. $\frac{x}{x^2-1}$	3. $x \neq -1$
δ. $\frac{2(x-1)}{x-1}$	4. $x \neq 1$ και $x \neq -1$
ε. $\frac{3}{x^2+1}$	5. οποιοσδήποτε αριθμός
	6. $x \neq 0$

α	β	γ	δ	ε

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $\frac{x^{\cancel{2}}+1}{\cancel{x}} = x+1$ ☐

β) $\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}} = x+1$ ☐

γ) $\frac{(x+2)\cancel{(x+1)}}{4\cancel{(x+1)}} = \frac{x+2}{4}$ ☐

δ) $\frac{x+2\cancel{(x+1)}}{4\cancel{(x+1)}} = \frac{x+2}{4}$ ☐

ε) $\frac{x^2-y^2}{x-y} = x+y$ ☐

στ) $\frac{(x-y)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-y}} = x+y$ ☐

3 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α) $\frac{7x}{x(\ldots\ldots\ldots\ldots)} = \frac{7}{x-2}$ β) $\frac{(\alpha+\beta)(\ldots\ldots\ldots\ldots)}{(\alpha-\beta)(\ldots\ldots\ldots\ldots)} = 1$ γ) $\frac{x(x+1)}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = x$

δ) $\frac{x(x+1)}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = x+1$ ε) $\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{2(\alpha+\beta)^2} = \frac{1}{\alpha+\beta}$ στ) $\frac{3(x+2)}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{3}{x+2}$

4 Ένας μαθητής για να βρει τις τιμές της μεταβλητής x, για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $\frac{x}{x(x-4)}$, έγραψε $\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x-4)} = \frac{1}{x-4}$ και απάντησε ότι η παράσταση ορίζεται όταν $x \neq 4$. Είναι σωστή η απάντησή του;

071-074 3-11-06 01:18 ™ÂÏ›‰·74

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $\frac{1}{x-4}$ β) $\frac{y+3}{2y-5}$ γ) $\frac{\omega-2}{(\omega+1)^2}$ δ) $\frac{6x+1}{x(x-3)}$

2 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{4x}{6x}$ β) $\frac{3y^2}{12y}$ γ) $\frac{2x\omega^2}{8x^2\omega}$ δ) $\frac{5\alpha^2\beta\gamma^3}{10\alpha\beta^2\gamma}$

ε) $\frac{x+4}{4+x}$ στ) $\frac{y-1}{1-y}$ ζ) $\frac{\omega-2}{(2-\omega)^2}$ η) $\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}$

3 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{6x}{2x^2+4x}$ β) $\frac{3y-9}{y^2-3y}$ γ) $\frac{x^2+x\omega}{\omega^2+x\omega}$ δ) $\frac{5\alpha^2-20}{(\alpha-2)^2}$

ε) $\frac{x^2-16}{x^2-4x}$ στ) $\frac{y^2-1}{y^2+2y+1}$ ζ) $\frac{6x^2+3x\omega}{4x^2-\omega^2}$ η) $\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^3-\beta^3}$

4 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+4}$ β) $\frac{y^2-5y+4}{y^2-6y+8}$ γ) $\frac{\omega^3-2\omega^2+\omega}{\omega^3-\omega}$

5 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{x(x-1)+4(x-1)}{x^2+2x-3}$ β) $\frac{y(y-3)+y^2-9}{4y^2-9}$

γ) $\frac{(2\omega+1)^2-(\omega+2)^2}{\omega^4-1}$ δ) $\frac{(\alpha+1)(\alpha-2)^2-4(\alpha+1)}{\alpha^3+\alpha^2}$

6 Ένας λαμπαδηδρόμος κατά τα τελευταία μέτρα της διαδρομής του διήνυσε την απόσταση ΑΒ με σταθερή ταχύτητα 5 m/sec. Φτάνοντας στο σημείο Β ένας άλλος λαμπαδηδρόμος ξεκινώντας από το σημείο Β διήνυσε την απόσταση ΒΓ με σταθερή επιτάχυνση 4 m/sec^2. Αν ο χρόνος που κινήθηκε κάθε αθλητής ήταν t sec να αποδείξετε ότι η μέση ταχύτητα με την οποία διανύθηκε η απόσταση ΑΓ ήταν $t+\frac{5}{2}$ m/sec

075-084 3-11-06 01:26 ™ÂÏ›‰·75

1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων

✔ *Μαθαίνω να πολλαπλασιάζω και να διαιρώ ρητές παραστάσεις.*

✔ *Μαθαίνω να προσθέτω και να αφαιρώ ρητές παραστάσεις.*

Α Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση ρητών παραστάσεων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να κάνετε τις πράξεις: $4 \cdot \frac{3}{5}$, $\quad \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$, $\quad \frac{2}{5} : \frac{4}{7}$

2. Με ανάλογο τρόπο να κάνετε και τις παρακάτω πράξεις:

$2x \cdot \frac{3xy}{5\omega}$, $\quad \frac{3x^2}{2\alpha\beta} \cdot \frac{2\alpha^2\beta}{9xy}$, $\quad \frac{9x}{y+1} : \frac{3x^2}{5y+5}$

Πολλαπλασιασμός

Για να πολλαπλασιάσουμε έναν ακέραιο αριθμό με ένα κλάσμα ή για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα, χρησιμοποιούμε τους εξής κανόνες.

$$\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$$

Με τον ίδιο τρόπο πολλαπλασιάζουμε και μια ακέραια με μια ρητή παράσταση ή δύο ρητές παραστάσεις.

Για παράδειγμα, $\quad 3x \cdot \frac{5x^2}{2y} = \frac{3x \cdot 5x^2}{2y} = \frac{15x^3}{2y}$ και

$$\frac{x^2-1}{3x+3} \cdot \frac{2x}{x-1} = \frac{(x^2-1) \cdot 2x}{(3x+3)(x-1)} = \frac{2x\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}{3\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}} = \frac{2x}{3}$$

Όπως βλέπουμε στο προηγούμενο παράδειγμα, μετά τις πράξεις εκτελούμε και τις δυνατές απλοποιήσεις.

Διαίρεση

Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα χρησιμοποιούμε τον παρακάτω κανόνα

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

Με τον ίδιο τρόπο διαιρούμε και δύο ρητές παραστάσεις. Για παράδειγμα,

$$\frac{x}{x+1} : \frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{2x^2} = \frac{x(x^2-1)}{(x+1) \cdot 2x^2} = \frac{\cancel{x}(x-1)\cancel{(x+1)}}{2x^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}} = \frac{x-1}{2x}$$

075-084 3-11-06 01:26 ™ÂÏ›‰·76

Σύνθετα κλάσματα

Το σύνθετο κλάσμα $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$, ως γνωστόν, εκφράζει το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$ που είναι ίσο με $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$ και επομένως ισχύει

$$\boxed{\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \dfrac{\alpha\delta}{\beta\gamma}}$$

Μνημονικός κανόνας

$$\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \dfrac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

Τον ίδιο κανόνα χρησιμοποιούμε και στις ρητές παραστάσεις.

Για παράδειγμα, $\dfrac{\frac{2\alpha^2}{x}}{\frac{4\alpha}{x^2}} = \dfrac{2\alpha^2x^2}{4\alpha x} = \dfrac{\alpha x}{2}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να βρεθούν τα γινόμενα: α) $(5x^2 + 5x) \cdot \dfrac{3x}{2x + 2}$ β) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{3x + 6} \cdot \dfrac{x^2 + 2x}{x - 1}$

Λύση

α) $(5x^2 + 5x) \cdot \dfrac{3x}{2x + 2} = \dfrac{(5x^2 + 5x)3x}{2x + 2} = \dfrac{5x\cancel{(x+1)}3x}{2\cancel{(x+1)}} = \dfrac{15x^2}{2}$

β) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{3x + 6} \cdot \dfrac{x^2+2x}{x - 1} = \dfrac{(x^2-2x+1)(x^2+2x)}{(3x + 6)(x - 1)} = \dfrac{(x-1)^{\cancel{2}}x\cancel{(x+2)}}{3\cancel{(x+2)}\cancel{(x-1)}} = \dfrac{(x-1)x}{3} = \dfrac{x^2 - x}{3}$

2 Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\dfrac{x^2 - \alpha^2}{x} : \dfrac{x^3 - \alpha^3}{x^2}$ β) $\dfrac{\frac{\alpha^2 - x^2}{\alpha^2}}{\frac{2\alpha + 2x}{\alpha}}$

Λύση

α) $\dfrac{x^2 - \alpha^2}{x} : \dfrac{x^3 - \alpha^3}{x^2} = \dfrac{x^2 - \alpha^2}{x} \cdot \dfrac{x^2}{x^3 - \alpha^3} = \dfrac{(x^2 - \alpha^2)x^2}{x(x^3 - \alpha^3)} = \dfrac{\cancel{(x-\alpha)}(x + \alpha)x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\cancel{(x-\alpha)}(x^2 + x\alpha + \alpha^2)} =$

$= \dfrac{(x + \alpha)x}{x^2 + \alpha x + \alpha^2} = \dfrac{x^2 + \alpha x}{x^2 + \alpha x + \alpha^2}$

β) $\dfrac{\frac{\alpha^2 - x^2}{\alpha^2}}{\frac{2\alpha + 2x}{\alpha}} = \dfrac{\alpha(\alpha^2 - x^2)}{\alpha^2 (2\alpha + 2x)} = \dfrac{\cancel{\alpha}(\alpha - x)\cancel{(\alpha + x)}}{2\alpha^{\cancel{2}}\cancel{(\alpha + x)}} = \dfrac{\alpha - x}{2\alpha}$

075-084 3-11-06 01:26 ™ÂÏ›‰·77

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{xy}$ ☐ β) $x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$ ☐

γ) $3x : \frac{2}{x} = \frac{3}{2}$ ☐ δ) $3x : \frac{2}{x} = \frac{3x^2}{2}$ ☐

ε) $\frac{x-1}{y} \cdot \frac{5}{x-1} = \frac{5}{y}$ ☐ στ) $\frac{\alpha}{x} \cdot \frac{x-2}{x} = \frac{\alpha x - 2}{x^2}$ ☐

ζ) $\frac{\alpha}{\alpha^2+1} \cdot \frac{\alpha^2+1}{\alpha} = 0$ ☐ η) $\frac{\alpha}{\beta+2} : \frac{\alpha}{\beta+2} = 1$ ☐

2 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $3x \cdot \frac{\dots\dots}{y} = \frac{6x^2}{y}$ β) $\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{\dots\dots} = \frac{1}{y^2}$ γ) $\frac{4x}{y} : \frac{\dots\dots}{\omega} = \frac{\omega}{y}$

δ) $\frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = 1$ ε) $\frac{x+2}{x-1} : \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = 1$ στ) $\frac{x}{y} : \frac{x+2}{\dots\dots} = \frac{x}{x+2}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{y}$ β) $\frac{9x}{4y} \cdot \frac{1}{3x}$ γ) $12x^2 \cdot \frac{1}{9x}$

δ) $\frac{2\alpha^3}{3\beta^2} \cdot \frac{6\beta}{4\alpha^2}$ ε) $(-5\omega^2) \cdot \frac{3}{10\omega}$ στ) $\left(-\frac{3\alpha\beta}{2\beta}\right) \cdot \left(-\frac{4}{\alpha^2}\right)$

2 Να κάνετε τις διαιρέσεις:

α) $8x : \frac{6}{x}$ β) $\frac{1}{y^2} : \left(-\frac{3}{y}\right)$ γ) $\left(-\frac{\alpha^2}{\beta^3}\right) : 3\alpha^2$ δ) $\left(-\frac{x^3}{2\omega}\right) : \left(-\frac{x^2}{4\omega^2}\right)$

3 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $\frac{2x+6}{x^2} \cdot \frac{4x}{x+3}$ β) $\frac{y-5}{y+2} \cdot \frac{2+y}{5-y}$ γ) $\frac{x-\omega}{x^2\omega^3} \cdot \frac{x^3\omega^2}{x^2-\omega^2}$

δ) $\frac{\alpha^2-4}{\alpha^2+\alpha-6} \cdot \frac{\alpha+3}{\alpha^2+2\alpha}$ ε) $\frac{x^2+x}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2+3x}$ στ) $\frac{4y^2-9}{4y^2-12y+9} \cdot \frac{y^2+3y}{2y^2+3y}$

4 Να κάνετε τις διαιρέσεις:

α) $\frac{x+4}{5} : \frac{x+4}{15}$ β) $\frac{2y-1}{y+1} : \frac{1-2y}{1+y}$ γ) $\left(-\frac{\omega+2}{\omega}\right) : (\omega+2)$

δ) $\frac{\alpha+1}{\beta^2} : \frac{(\alpha+1)^2}{\beta}$ ε) $\frac{x+y}{x^2-xy} : \frac{x^2+xy}{x-y}$ στ) $\frac{x^2-4}{x^3+8} : \frac{x-2}{x^2-2x+4}$

5 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\left(\frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{4x+4}{x+2}\right) : \frac{8x-8}{x+2}$ β) $\frac{x+2}{x-1} : \left(\frac{2x+6}{x-1} \cdot \frac{x+2}{x+3}\right)$ γ) $\left(\frac{x+2}{x-1} : \frac{2x+6}{x-1}\right) \cdot \frac{x+2}{x+3}$

Β Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να κάνετε τις πράξεις: $\frac{7}{9}+\frac{19}{9}-\frac{11}{9}$, $\quad \frac{3}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$.

2. Με ανάλογο τρόπο να κάνετε και τις παρακάτω πράξεις:

$$\frac{3x}{x-2}+\frac{2x-1}{x-2}-\frac{7+x}{x-2}, \qquad \frac{3}{2\alpha}+\frac{1}{6\alpha\beta}-\frac{1}{3\beta}.$$

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ομώνυμα κλάσματα, χρησιμοποιούμε τους εξής

κανόνες $\quad \boxed{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}$ και $\boxed{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha-\gamma}{\beta}}$

Με τον ίδιο τρόπο προσθέτουμε ή αφαιρούμε και ρητές παραστάσεις που έχουν τον ίδιο παρονομαστή. Για παράδειγμα,

$$\frac{3x}{x-2}+\frac{2x-1}{x-2}-\frac{7+x}{x-2}=\frac{3x+(2x-1)-(7+x)}{x-2}=$$

$$=\frac{3x+2x-1-7-x}{x-2}=\frac{4x-8}{x-2}=\frac{4\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=4$$

Αν όμως οι ρητές παραστάσεις δεν έχουν τον ίδιο παρονομαστή, τότε βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών και τις μετατρέπουμε σε ρητές παραστάσεις με τον ίδιο παρονομαστή, όπως και στα αριθμητικά κλάσματα.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα $\frac{2}{3x^2-3x}+\frac{5}{6x}-\frac{2}{3x-3}$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.

$3x^2-3x=3x(x-1)$ και $3x-3=3(x-1)$

- Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

Ε.Κ.Π. $=6x(x-1)$

- Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα.

$$\frac{2}{3x^2-3x}+\frac{5}{6x}-\frac{2}{3x-3}=\frac{\overset{2}{\frown}\,2}{3x(x-1)}+\frac{\overset{x-1}{\frown}\,5}{6x}-\frac{\overset{2x}{\frown}\,2}{3(x-1)}=$$

- Εκτελούμε τις πράξεις και τις δυνατές απλοποιήσεις.

$$=\frac{4+5(x-1)-4x}{6x(x-1)}=\frac{4+5x-5-4x}{6x(x-1)}=\frac{\cancel{x-1}}{6x\cancel{(x-1)}}=\frac{1}{6x}$$

075-084 7-11-06 21:38 ™ÂÏ›‰·79

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να γίνουν οι πράξεις: α) $\dfrac{9x+6}{x^2-1} - \dfrac{15}{2x-2}$ β) $\dfrac{4}{x^2-\alpha^2} - \dfrac{2}{x^2-\alpha x} - \dfrac{1}{x^2+\alpha x}$

Λύση

α) Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές, οπότε έχουμε:

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ και $2x - 2 = 2(x-1)$

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $2(x-1)(x+1)$. Άρα

$$\frac{9x+6}{x^2-1} - \frac{15}{2x-2} = \overset{2}{\frac{9x+6}{(x-1)(x+1)}} - \overset{x+1}{\frac{15}{2(x-1)}} = \frac{2(9x+6)-15(x+1)}{2(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{18x+12-15x-15}{2(x-1)(x+1)} = \frac{3x-3}{2(x-1)(x+1)} = \frac{3\cancel{(x-1)}}{2\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{3}{2(x+1)}$$

β) Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές, οπότε έχουμε:

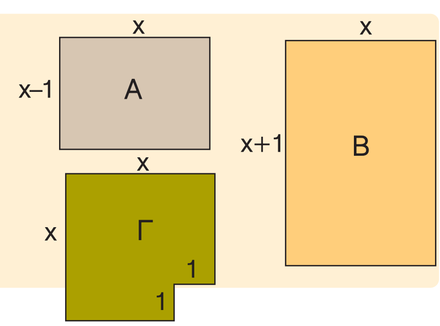
$x^2 - \alpha^2 = (x-\alpha)(x+\alpha)$, $x^2 - \alpha x = x(x-\alpha)$, $x^2 + \alpha x = x(x+\alpha)$

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $x(x-\alpha)(x+\alpha)$. Άρα

$$\frac{4}{x^2-\alpha^2} - \frac{2}{x^2-\alpha x} - \frac{1}{x^2+\alpha x} = \overset{x}{\frac{4}{(x-\alpha)(x+\alpha)}} - \overset{x+\alpha}{\frac{2}{x(x-\alpha)}} - \overset{x-\alpha}{\frac{1}{x(x+\alpha)}} =$$

$$= \frac{4x-2(x+\alpha)-(x-\alpha)}{x(x-\alpha)(x+\alpha)} = \frac{4x-2x-2\alpha-x+\alpha}{x(x-\alpha)(x+\alpha)} = \frac{\cancel{x-\alpha}}{x\cancel{(x-\alpha)}(x+\alpha)} = \frac{1}{x(x+\alpha)}$$

2 Πούλησε κάποιος τα οικόπεδα Α και Β και από το καθένα εισέπραξε 50.000 ευρώ. Αν με τα χρήματα αυτά αγόρασε το διαμέρισμα Γ, να αποδειχθεί ότι κάθε m^2 του διαμερίσματος στοιχίζει όσο ένα m^2 του οικοπέδου Α και ένα m^2 του οικοπέδου Β. (Οι διαστάσεις δίνονται σε m).



Λύση

Από κάθε οικόπεδο εισέπραξε 50000 ευρώ, οπότε για την αγορά του διαμερίσματος έδωσε 100000 ευρώ. Το εμβαδόν του οικοπέδου Α είναι $x(x-1)$ m^2, του οικοπέδου Β είναι $x(x+1)$ m^2 και του διαμερίσματος Γ είναι (x^2-1) m^2. Κάθε m^2 του οικοπέδου Α στοιχίζει $\dfrac{50000}{x(x-1)}$ ευρώ, του οικοπέδου Β στοιχίζει $\dfrac{50000}{x(x+1)}$ ευρώ και του διαμερίσματος Γ στοιχίζει $\dfrac{100000}{x^2-1}$ ευρώ. Άρα έχουμε:

$$\overset{x+1}{\frac{50000}{x(x-1)}} + \overset{x-1}{\frac{50000}{x(x+1)}} = \frac{50000(x+1)+50000(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{100000x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{100000}{x^2-1}$$

Δηλαδή, κάθε m^2 του διαμερίσματος Γ στοιχίζει όσο ένα m^2 του οικοπέδου Α και ένα m^2 του οικοπέδου Β.

075-084 3-11-06 01:26 ™ÂÏ›‰·80

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{1}{x+1} = 1$ ☐ β) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{x+y}$ ☐

γ) $\dfrac{\alpha+4}{\alpha} - \dfrac{4}{\alpha} = 1$ ☐ δ) $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} + \dfrac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} = 0$ ☐

ε) $1 + \dfrac{x}{\omega} = \dfrac{1+x}{\omega}$ ☐ στ) $\dfrac{\alpha}{x} - \dfrac{\alpha+2}{x} = \dfrac{2}{x}$ ☐

2 Ένας μαθητής έγραψε τις παρακάτω ισότητες και ο καθηγητής του είπε ότι σε κάποιο σημείο έκανε ένα λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος αυτό;

α) $\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta} + \dfrac{\beta}{\beta-\alpha} = \dfrac{\alpha}{\alpha-\beta} - \dfrac{\beta}{\alpha-\beta} = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} = 1$

β) $\dfrac{3x+2}{x+1} - \dfrac{2x-1}{x+1} = \dfrac{3x+2-2x-1}{x+1} = \dfrac{x+1}{x+1} = 1$

3 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $\dfrac{x}{x+6} - \ldots\ldots = 0$ β) $\dfrac{x}{x+6} + \ldots\ldots = 1$ γ) $\ldots\ldots + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{2x}{x+1}$

δ) $\ldots\ldots - \dfrac{5}{x+2} = \dfrac{1}{x+2}$ ε) $\dfrac{2x-1}{x} + \ldots\ldots = 2$ στ) $\dfrac{3x+8}{x} - \ldots\ldots = 3$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ β) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x}$ γ) $\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{y}$ δ) $\dfrac{1}{\omega^2} - \dfrac{2}{\omega^2+1}$

2 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{2x}{2x-6} - \dfrac{3}{x-3}$ β) $\dfrac{y-6}{y^2+2y} - \dfrac{4}{y+2}$ γ) $\dfrac{3\omega+6}{\omega^2-4} - \dfrac{4}{2\omega-4}$

δ) $\dfrac{1}{2x+12} + \dfrac{x}{36-x^2}$ ε) $\dfrac{9x}{x^2-x\omega} + \dfrac{3\omega}{\omega^2-x\omega}$ στ) $\dfrac{\alpha+7}{\alpha^2+4\alpha+3} - \dfrac{3}{\alpha+1}$

3 Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$ β) $\dfrac{y-2+\dfrac{1}{y}}{y-\dfrac{1}{y}}$ γ) $\dfrac{\omega+1+\dfrac{1}{\omega}}{1-\dfrac{1}{\omega^3}}$ δ) $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}}{\dfrac{\beta}{\alpha}-\dfrac{\alpha}{\beta}}$

075-084 3-11-06 01:26 ™ÂÏ›‰·81

4 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{x-2}{x} + \dfrac{4}{x-2} - \dfrac{8}{x^2-2x}$ β) $\dfrac{3}{x+2y} - \dfrac{2}{x-2y} + \dfrac{2x+16y}{x^2-4y^2}$

γ) $\dfrac{y^2-6}{y^2-5y+6} - \dfrac{2}{y-2} + \dfrac{3}{y-3}$ δ) $\dfrac{x^2}{x-y} + \dfrac{y^2}{x+y} - \dfrac{2xy^2}{x^2-y^2}$

5 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\left(\dfrac{x+3}{2x+1} - \dfrac{x}{2x-1}\right)\left(1 + \dfrac{1}{4x-3}\right)$ β) $\left[\dfrac{x+3}{x^2-1} + \dfrac{x-3}{(x-1)^2}\right] : \dfrac{x^2-3}{(x-1)^2}$

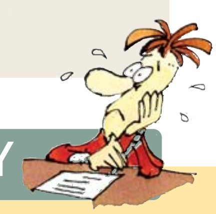
γ) $\left(1 - \dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)\left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)$ δ) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} - 1\right) : \left(\dfrac{\alpha^2}{\beta} + \dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)$

6 α) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{x^3-y^3}{x-y} + xy = (x+y)^2$.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση $\dfrac{56^3-44^3}{12} + 56 \cdot 44$.

7 α) Αν $A = \dfrac{2x}{x^2+1}$ και $B = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, να αποδείξετε ότι $A^2 + B^2 = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί 1, $\dfrac{200}{10001}$, $\dfrac{9999}{10001}$ αποτελούν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1 Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$K = \alpha^3 - (1+\alpha)^{-2} + 4\left(\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{1}{2}\right)^{-1} + \left[\left(\dfrac{\beta}{\alpha} - 2004\right)^{2004}\right]^0$, αν είναι $\alpha = -\dfrac{3}{2}$ και $\beta = 3$.

(Διαγωνισμός «Θαλής» Ε.Μ.Ε. 2002).

2 Για κάθε θετικό ακέραιο ν, να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha - \beta + 3\gamma)^{2\nu+1} + (\beta - \alpha - 3\gamma)^{2\nu+1} = 0$ β) $(x - y - \omega)^{2\nu} - (y + \omega - x)^{2\nu} = 0$

3 Αν ισχύει $\dfrac{x}{y} = -\dfrac{1}{2}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

$A = \dfrac{4x^2 - 6xy + y^2}{x^2 + y^2}$ $B = \dfrac{2x^3 - 2xy^2 + 3y^3}{x^2y + y^3}$

4 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -2x^2 + 2x + 800$.

α) Να αποδείξετε ότι $P(1 - x) = P(x)$.

β) Να βρείτε την αριθμητική τιμή $P(100)$ και $P(-99)$.

5 α) Να αποδείξετε ότι $α^3 + β^3 + γ^3 - 3αβγ = (α + β + γ)(α^2 + β^2 + γ^2 - αβ - βγ - γα)$.
(Ταυτότητα Euler).
β) Αν $α + β + γ = 0$, να αποδείξετε ότι $α^3 + β^3 + γ^3 = 3αβγ$.
γ) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $(x - y)^3 + (y - ω)^3 + (ω - x)^3$.

6 Αν $α + β = -\frac{1}{3}$ και $αβ = -\frac{7}{3}$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $α^2 + β^2 = \frac{43}{9}$ β) $(3α + 1)^2 + (3β + 1)^2 + 9(α + β) = 40$

7 Αν για τους αριθμούς x, y ισχύει μια από τις παρακάτω ισότητες να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι ίσοι ή αντίθετοι.
α) $x^4 - 2y^2 = x^2(y^2 - 2)$ β) $x^3 + y^3 = x^2y + xy^2$

8 α) Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα $x^2 + 4x + 3$, $x^2 + 2x - 3$.
β) Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \frac{1}{x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$

9 Δίνονται οι παραστάσεις $A = x(x + 3)$ και $B = (x + 1)(x + 2)$.
α) Να αποδείξετε ότι $B = A + 2$ και $AB + 1 = (A + 1)^2$.
β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$.

10 α) Το εμβαδόν ενός κύκλου είναι $16πx^4 + 8πx^2 + π$. Να βρείτε την ακτίνα του.
β) Να βρείτε την ακτίνα ενός κύκλου που έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών δύο κύκλων με ακτίνες $4x$ και $4x^2 - 1$.

11 α) Αν ο αριθμός κ είναι ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $κ^2 + κ$ είναι άρτιος.
β) Να αποδείξετε ότι η διαφορά κύβων δύο διαδοχικών ακεραίων, αν διαιρεθεί με το 6, δίνει υπόλοιπο 1.
γ) Να αποδείξετε ότι η διαφορά τετραγώνων δύο περιττών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του 8.

12 α) Να κάνετε τη διαίρεση $(x^6 - 1) : (x - 1)$ και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης να αποδείξετε ότι ο αριθμός $7^6 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 6.
β) Να κάνετε τη διαίρεση $(x^5 + 1) : (x + 1)$ και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2^{15} + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 9.

13 α) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{(x - 1)x} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x}$.

β) Στην προηγούμενη ισότητα να αντικαταστήσετε το x διαδοχικά με τις τιμές 2, 3, 4, ..., 2008 και να αποδείξετε ότι $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{2007 \cdot 2008} = \frac{2007}{2008}$

075-084 7-11-06 21:40 ™ÂÏ›‰·83

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Α. ΜΟΝΩΝΥΜΑ – ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

- **Αλγεβρική Παράσταση** είναι μια έκφραση που περιέχει αριθμούς και μεταβλητές π.χ. $2x^2 - 3xy + 4$
- **Αριθμητική Τιμή** μιας παράστασης είναι ο αριθμός που προκύπτει, αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές της με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις.
- **Μονώνυμο** λέγεται μια ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ των αριθμών και των μεταβλητών της σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού.
  π.χ. $-3x^2y$ *(-3 συντελεστής, x^2y κύριο μέρος του μονώνυμου).*
- **Όμοια** λέγονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος, π.χ. $-3x^2y$, $7x^2y$, $-x^2y$

Πράξεις με μονώνυμα

– η **Πρόσθεση** και η **Αφαίρεση** μονωνύμων έχει σαν αποτέλεσμα μονώνυμο, εφόσον αυτά είναι όμοια.
Άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά, που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.
π.χ. $2x^2y + 3x^2y - x^2y = 4x^2y$
Αναγωγή ομοίων όρων λέγεται η αντικατάσταση των ομοίων μονωνύμων με το άθροισμά τους. π.χ. $6x^2 + 2x - 4x^2 + 3x = 2x^2 + 5x$

– ο **Πολλαπλασιασμός** και η **Διαίρεση** μονωνύμων γίνονται είτε τα μονώνυμα είναι όμοια είτε όχι.
Γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους, με εκθέτη καθεμιάς το άθροισμα των εκθετών τους. π.χ. $(3x^2y)\cdot(-2xy^3) = -6x^3y^4$
Πηλίκο δύο μονωνύμων είναι η αλγεβρική παράσταση που είναι γινόμενο του διαιρετέου με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\text{π.χ.}\quad (-12x^4y):(3x^2y) = -12x^4y\cdot\frac{1}{3x^2y} = \frac{-12x^4y}{3x^2y} = -4x^2$$

- **Πολυώνυμο** λέγεται το άθροισμα μονωνύμων, που δύο τουλάχιστον από αυτά δεν είναι όμοια. π.χ. $3x^2y - 5xy + 2$ (Το μονώνυμα $3x^2y$, $5xy$, 2 λέγονται **όροι** του πολυωνύμου).

Πράξεις με πολυώνυμα

– **Για να προσθέσουμε - αφαιρέσουμε** πολυώνυμα βγάζουμε τις παρενθέσεις και κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

– **Για να πολλαπλασιάσουμε**
α) **μονώνυμο με πολυώνυμο** πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
β) **πολυώνυμο με πολυώνυμο** πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

– Αν έχουμε δύο πολυώνυμα **Δ**(x) και **δ**(x) με δ(x) ≠ 0 και κάνουμε τη διαίρεση **Δ**(x) : **δ**(x), τότε βρίσκουμε ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων **π**(x) και **υ**(x) για τα οποία ισχύει: $Δ(x) = δ(x)π(x) + υ(x)$ *(Ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης)* όπου το υ(x) ή είναι ίσο με μηδέν ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του δ(x). Αν **υ(x) = 0**, τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια** και τα δ(x) και π(x) λέγονται **παράγοντες** ή **διαιρέτες** του Δ(x).

075-084 3-11-06 01:26 ™ÂÏ›‰·84

Β. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

- Οι ισότητες που περιέχουν μεταβλητές και οι οποίες αληθεύουν για όλες τις τιμές των μεταβλητών τους ονομάζονται **ταυτότητες.**
  Αξιοσημείωτες ταυτότητες είναι:

Τετράγωνο αθροίσματος	$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
Τετράγωνο διαφοράς	$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
Κύβος αθροίσματος	$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
Κύβος διαφοράς	$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά	$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$
Διαφορά κύβων	$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$
Άθροισμα κύβων	$(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$

Γ. ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

- **Παραγοντοποίηση** είναι ο μετασχηματισμός μιας παράστασης από άθροισμα σε γινόμενο. Η παραγοντοποίηση γίνεται σε παράσταση που υπάρχει:

Κοινός παράγοντας σ' όλους τους όρους	$\alpha x + \beta x = x(\alpha+\beta)$
Κοινός παράγοντας σε ομάδες όρων της παράστασης	$\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y =$ $= \alpha(x+y) + \beta(x+y) = (\alpha+\beta)(x+y)$
Διαφορά τετραγώνων	$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$
Άθροισμα – Διαφορά κύβων	$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
Ανάπτυγμα τετραγώνου	$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2$ $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha-\beta)^2$
Τριώνυμο της μορφής $x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$	$x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = (x+\alpha)(x+\beta)$

Δ. ΡΗΤΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

- Μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα με όρους πολυώνυμα, λέγετα **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς **ρητή παράσταση.**

$$\text{π.χ.}\quad \frac{2x^2-5}{x+4}$$

Οι μεταβλητές μιας ρητής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή. Για να απλοποιήσουμε μια ρητή αλγεβρική παράσταση, παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της και διαγράφουμε τον κοινό παράγοντα. Οι πράξεις με τις ρητές παραστάσεις γίνονται όπως και οι πράξεις των αριθμητικών κλασμάτων.

(085-088) 3-11-06 01:45 ™ÂÏ›‰·85

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

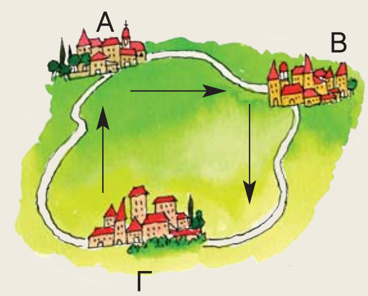
(085-088) 3-11-06 01:45 ™ÂÏ›‰·86

2.1 Η εξίσωση $αx + β = 0$

- *Θυμάμαι πώς λύνονται οι εξισώσεις πρώτου βαθμού.*
- *Αναγνωρίζω αν μια εξίσωση έχει μοναδική λύση ή είναι αδύνατη ή είναι ταυτότητα.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας ταχυδρόμος ξεκινάει από το χωριό Α και αφού επισκεφθεί διαδοχικά τα χωριά Β και Γ, επιστρέφει στο χωριό Α. Η διαδρομή ΒΓ είναι 1 km μεγαλύτερη από την ΑΒ και η ΓΑ είναι 1 km μεγαλύτερη από τη ΒΓ.



Μπορείτε να υπολογίσετε πόσο απέχουν τα χωριά μεταξύ τους, αν γνωρίζετε ότι η συνολική απόσταση που διήνυσε ο ταχυδρόμος ήταν:

α) 15 km;
β) το τριπλάσιο της πρώτης διαδρομής;
γ) το τριπλάσιο της δεύτερης διαδρομής;

Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε να λύνουμε εξισώσεις, όπως $3x = 12$, $-4y + 11 = 0$, κ.τ.λ. Στις εξισώσεις αυτές υπάρχει ένας άγνωστος και ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 1. Σε καθεμιά από τις προηγούμενες περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε **εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο (πρωτοβάθμια εξίσωση)**.

Η εξίσωση $3x = 12$, της οποίας ο συντελεστής του αγνώστου είναι διάφορος του μηδενός επαληθεύεται για **μία μόνο** τιμή του αγνώστου, την $x = 4$. Ο αριθμός 4, που επαληθεύει την εξίσωση $3x = 12$, ονομάζεται **λύση** ή **ρίζα** της εξίσωσης.

Υπάρχουν όμως και εξισώσεις, όπως οι $0x = -3$ ή $0x = 0$, στις οποίες ο συντελεστής του αγνώστου είναι μηδέν.

Η εξίσωση $0x = -3$ δεν επαληθεύεται για καμιά τιμή του x, αφού το γινόμενο $0x$ είναι πάντοτε ίσο με το μηδέν και δεν είναι δυνατόν να είναι ίσο με -3. Μια τέτοια εξίσωση, που δεν έχει λύση, ονομάζεται **αδύνατη**.

Η εξίσωση όμως, $0x = 0$ επαληθεύεται για οποιαδήποτε τιμή του x και ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη**.

Από τα προηγούμενα παραδείγματα συμπεραίνουμε ότι:

- Αν **$α \neq 0$**, τότε η εξίσωση $αx + β = 0$ έχει **μοναδική λύση** την $x = -\dfrac{β}{α}$
- Αν **$α = 0$**, τότε η εξίσωση $αx + β = 0$ γράφεται $0x = -β$ και
  - αν **$β \neq 0$**, δεν έχει λύση (**αδύνατη**), ενώ
  - αν **$β = 0$**, κάθε αριθμός είναι λύση της (**ταυτότητα ή αόριστη**).

(085-088) 3-11-06 01:45 ™ÂÏ›‰·87

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x-1}{2} - \frac{2x+1}{6} = x + 1$

Λύση

- Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
- Απαλείφουμε τους παρονομαστές.
- Κάνουμε τις πράξεις και βγάζουμε τις παρενθέσεις.
- Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.
- Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
- Διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το συντελεστή του αγνώστου.

$$\frac{x-1}{2} - \frac{2x+1}{6} = x + 1$$
$$6 \cdot \frac{x-1}{2} - 6 \cdot \frac{2x+1}{6} = 6 \cdot x + 6 \cdot 1$$
$$3(x-1) - (2x+1) = 6x + 6$$
$$3x - 3 - 2x - 1 = 6x + 6$$
$$3x - 2x - 6x = 6 + 3 + 1$$
$$-5x = 10$$
$$\frac{-5x}{-5} = \frac{10}{-5}$$
$$x = -2$$

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -2$

2 Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $3(x + 2) - 3 = 3x + 5$ β) $2(x - 1) - x = x - 2$

Λύση

α) $3(x + 2) - 3 = 3x + 5$
$$3x + 6 - 3 = 3x + 5$$
$$3x - 3x = 5 - 6 + 3$$
$$0x = 2$$
Η εξίσωση αυτή δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του x, οπότε είναι **αδύνατη.**

β) $2(x - 1) - x = x - 2$
$$2x - 2 - x = x - 2$$
$$2x - x - x = 2 - 2$$
$$0x = 0$$
Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται για κάθε τιμή του x, οπότε είναι **ταυτότητα.**

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να αντιστοιχίσετε σε κάθε εξίσωση της στήλης Α το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $3x = 7$	1. Έχει μοναδική λύση
β. $0x = 0$	2. Είναι αδύνατη
γ. $0x = 5$	3. Είναι ταυτότητα
δ. $5x = 0$	

α	β	γ	δ

(085-088) 3-11-06 01:45 ™ÂÏ›‰·88

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Η εξίσωση $\frac{1}{3}x = 2$ έχει λύση την $x = 6$.

β) Η εξίσωση $4x = 0$ είναι αδύνατη.

γ) Η εξίσωση $0x = 0$ έχει λύση οποιονδήποτε αριθμό.

δ) Η εξίσωση $0x = 6$ έχει λύση την $x = 6$.

ε) Η εξίσωση $5(x + 1) = 5x + 5$ είναι ταυτότητα.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $-3(x + 2) - 2(x - 1) = 8 + x$

β) $4y - 2(y - 3) = 2y + 1$

γ) $5(-ω + 2) - 4 = 6 - 5ω$

δ) $(2x + 1)^2 + 5 = 4(x^2 - 10)$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{6} = x - \frac{1}{3}$

β) $\frac{y+5}{5} - \frac{y}{2} = 1 - \frac{3y}{10}$

γ) $\frac{2(ω-1)}{3} - \frac{ω+1}{2} = \frac{ω-5}{6}$

δ) $0{,}2(3x - 4) - 5(x - 0{,}4) = 0{,}4(1 - 10x)$

3 Το τριπλάσιο ενός αριθμού ελαττούμενο κατά 5 είναι ίσο με το μισό του αριθμού αυξημένο κατά 10. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

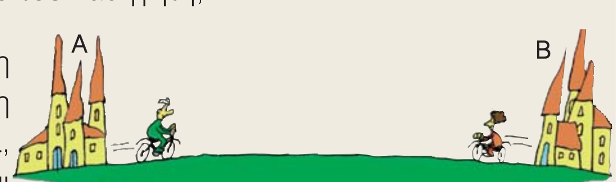
4 Ρώτησαν κάποιον πόσα ευρώ έχει στο πορτοφόλι του κι εκείνος απάντησε: «*Αν είχα όσα έχω και τα μισά ακόμα και δέκα παραπάνω, θα είχα εκατό*». Μπορεί, άραγε, με τα χρήματα αυτά να αγοράσει ένα παντελόνι που κοστίζει 65 €;

5 Ο καθηγητής των Μαθηματικών είπε στους μαθητές του:

- Σκεφτείτε έναν αριθμό και διπλασιάστε τον.
- Στο αποτέλεσμα να προσθέσετε τον αριθμό 10.
- Το άθροισμα που βρήκατε να το διαιρέσετε με το 2 και από το πηλίκο να αφαιρέσετε τον αριθμό που σκεφτήκατε αρχικά.
- Κάθε μαθητής πρέπει να έχει βρει αποτέλεσμα τον αριθμό 5, ανεξάρτητα από ποιον αριθμό σκέφτηκε αρχικά.

Μπορείτε να εξηγήσετε τον ισχυρισμό του καθηγητή;

6 Ένας ποδηλάτης ξεκινά από την πόλη Α και κινείται προς την πόλη Β με μέση ταχύτητα 16 km/h. Μια ώρα αργότερα, μια φίλη του ξεκινά από την πόλη Β και με μέση ταχύτητα 12 km/h κινείται προς την πόλη Α για να τον συναντήσει. Αν η απόσταση των δύο πόλεων είναι 44 km, σε πόσες ώρες από την εκκίνηση του ποδηλάτη θα συναντηθούν;



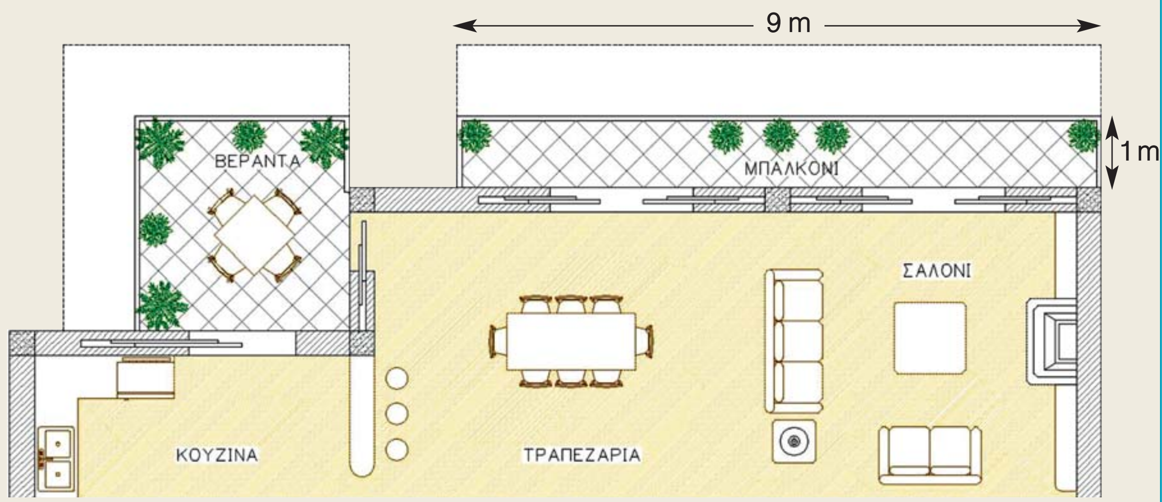
2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

- ✔ *Λύνω εξισώσεις δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων.*
- ✔ *Βρίσκω το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και υπολογίζω τις λύσεις της με τη βοήθεια τύπου.*
- ✔ *Μετατρέπω ένα τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας μηχανικός σχεδίασε μια οικοδομή και στην πρόσοψή της προέβλεψε την κατασκευή μιας τετραγωνικής βεράντας και ενός ορθογωνίου μπαλκονιού με διαστάσεις 9 m και 1 m. Στο σχέδιο που παρουσίασε στον ιδιοκτήτη της οικοδομής η βεράντα και το μπαλκόνι είχαν το ίδιο εμβαδόν.

α) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα ήταν η πλευρά της βεράντας.



Ο ιδιοκτήτης όμως, θεώρησε στενό το μπαλκόνι και ζήτησε από το μηχανικό να αυξήσει το πλάτος του μπαλκονιού και κάθε πλευρά της βεράντας κατά τα ίδια μέτρα, ώστε να έχουν και πάλι το ίδιο εμβαδόν.

β) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα έπρεπε να αυξηθεί το πλάτος του μπαλκονιού και κάθε πλευρά της βεράντας.

Με το αίτημα όμως του ιδιοκτήτη, το συνολικό εμβαδόν της βεράντας και του μπαλκονιού ξεπερνούσε το όριο που καθορίζεται από τον πολεοδομικό κανονισμό. Τελικά, αποφασίστηκε να μεγαλώσει η βεράντα και το μπαλκόνι, όπως το ζήτησε ο ιδιοκτήτης, με την προϋπόθεση όμως να μην έχουν πια το ίδιο εμβαδόν, αλλά να καλύπτουν συνολικά 34 m^2.

γ) Να υπολογίσετε πόσα μέτρα αυξήθηκε τελικά το πλάτος του μπαλκονιού και κάθε πλευρά της βεράντας.

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυσή τους οδηγεί σε εξίσωση μ' έναν άγνωστο και στην οποία ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 2.

$x^2 = 9$,

$x^2 - 3x = 0$,

$x^2 + 15x - 16 = 0$

Σε καθεμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε **εξίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο (δευτεροβάθμια εξίσωση)**.

Από τα προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ότι η γενική μορφή μιας εξίσωσης 2ου βαθμού με άγνωστο x είναι

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \text{με} \quad \alpha \neq 0$$

Οι αριθμοί α, β, γ λέγονται **συντελεστές** της εξίσωσης. Ο συντελεστής γ λέγεται και **σταθερός όρος**. Οι συντελεστές σε καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις είναι:

$x^2 - 9 = 0$:	$\alpha = 1$	$\beta = 0$	$\gamma = -9$
$x^2 - 3x = 0$:	$\alpha = 1$	$\beta = -3$	$\gamma = 0$
$x^2 + 15x - 16 = 0$:	$\alpha = 1$	$\beta = 15$	$\gamma = -16$

A Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Θυμόμαστε ότι: **Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$**

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \beta x = 0$ με $\alpha \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 = 3x$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α' μέλος.
- Αναλύουμε το α' μέλος σε γινόμενο παραγόντων.
- Για να είναι το γινόμενο $x(x-3)$ ίσο με το μηδέν πρέπει $x = 0$ ή $x - 3 = 0$.

$x^2 = 3x$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$x = 0$ ή $x - 3 = 0$

$x = 0$ ή $x = 3$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 0$ και $x = 3$

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 - 9 = 0$, εργαζόμαστε ως εξής:

1ος τρόπος:

- Το α' μέλος της εξίσωσης είναι διαφορά τετραγώνων και το β' μέλος είναι μηδέν.
- Αναλύουμε το α' μέλος σε γινόμενο παραγόντων.
- Για να είναι το γινόμενο $(x-3)(x+3)$ ίσο με το μηδέν πρέπει $x - 3 = 0$ ή $x + 3 = 0$

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 - 3^2 = 0$

$(x-3)(x+3) = 0$

$x - 3 = 0$ ή $x + 3 = 0$

$x = 3$ ή $x = -3$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 3$ και $x = -3$

2ος τρόπος:

- Όταν α είναι θετικός, η εξίσωση $x^2 = α$ έχει δύο λύσεις, τις $x = \sqrt{α}$ και $x = -\sqrt{α}$

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \sqrt{9} \text{ ή } x = -\sqrt{9}$$
$$x = 3 \text{ ή } x = -3$$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 16 = 0$, αν εργαστούμε όπως προηγουμένως, παρατηρούμε ότι αυτή γράφεται $x^2 = -16$. Η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση (αδύνατη), γιατί το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός ή μηδέν και δεν είναι δυνατόν να είναι ίσο με –16.

Αν α είναι αρνητικός αριθμός, τότε η εξίσωση $x^2 = α$ δεν έχει λύση (αδύνατη)

Η εξίσωση $x^2 = 0$ έχει λύση την $x = 0$. Η λύση αυτή λέγεται **διπλή**, γιατί η εξίσωση $x^2 = 0$ γράφεται $x \cdot x = 0$, οπότε $x = 0$ ή $x = 0$ (δηλαδή έχει δύο φορές την ίδια λύση).

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση $9x^2 - 6x + 1 = 0$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι ανάπτυγμα τετραγώνου σύμφωνα με την ταυτότητα $α^2 - 2αβ + β^2 = (α - β)^2$
- Για να είναι $(3x - 1)^2 = 0$ πρέπει $3x - 1 = 0$

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$
$$(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = 0$$
$$(3x - 1)^2 = 0$$
$$3x - 1 = 0 \text{ ή } x = \frac{1}{3}$$

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την $x = \frac{1}{3}$

Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$ σχηματίζουμε στο α′ μέλος ανάπτυγμα τετραγώνου εργαζόμενοι ως εξής:

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με 4α, όπου α ο συντελεστής του x^2.
- Μεταφέρουμε στο β′ μέλος το σταθερό όρο και στο α′ μέλος δημιουργούμε παράσταση της μορφής $α^2 + 2αβ$ ή $α^2 - 2αβ$.
- Για να συμπληρωθεί το ανάπτυγμα τετραγώνου προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $β^2$.
- Χρησιμοποιούμε μία από τις ταυτότητες
$$α^2 + 2αβ + β^2 = (α + β)^2$$
$$α^2 - 2αβ + β^2 = (α - β)^2$$

$$x^2 + 15x - 16 = 0$$
$$4x^2 + 60x - 64 = 0$$
$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 = 64$$
$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 + 15^2 = 64 + 15^2$$
$$(2x + 15)^2 = 289$$
$$2x + 15 = \sqrt{289} \text{ ή } 2x + 15 = -\sqrt{289}$$
$$2x + 15 = 17 \text{ ή } 2x + 15 = -17$$
$$2x = 2 \text{ ή } 2x = -32$$
$$x = 1 \text{ ή } x = -16$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = 1$ και $x = -16$

Η μέθοδος με την οποία λύσαμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$ είναι γνωστή ως **μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου**.

(089-098) 3-11-06 01:51 ™ÂÏ›‰·92

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $2x^2 = 7x$ β) $3x^2 - 75 = 0$ γ) $2x^2 + 8 = 0$

Λύση

α)
$$\begin{aligned} 2x^2 &= 7x \\ 2x^2 - 7x &= 0 \\ x(2x-7) &= 0 \\ x = 0 \text{ ή } 2x - 7 &= 0 \\ x = 0 \text{ ή } x &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

β)
$$\begin{aligned} 3x^2 - 75 &= 0 \\ 3x^2 &= 75 \\ x^2 &= 25 \\ x = \sqrt{25} \text{ ή } x &= -\sqrt{25} \\ x = 5 \text{ ή } x &= -5 \end{aligned}$$

γ)
$$\begin{aligned} 2x^2 + 8 &= 0 \\ 2x^2 &= -8 \\ x^2 &= -4 \end{aligned}$$

Δεν έχει λύση
(αδύνατη εξίσωση)

2 Να λυθεί η εξίσωση $x^2(2x-1) - 6x(2x-1) + 9(2x-1) = 0$

Λύση

- Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $2x - 1$.
- Ο δεύτερος παράγοντας του γινομένου είναι ανάπτυγμα τετραγώνου.

$$\begin{aligned} x^2(2x-1) - 6x(2x-1) + 9(2x-1) &= 0 \\ (2x-1)(x^2 - 6x + 9) &= 0 \\ (2x-1)(x-3)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$2x - 1 = 0$ ή $x - 3 = 0$

$x = \frac{1}{2}$ ή $x = 3$ (διπλή λύση)

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - 4x + 3 = 0$. ☐
β) Ο αριθμός 3 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - 4x + 3 = 0$. ☐
γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $(x-2)(x+1) = 0$ είναι $x = 2$ και $x = -1$. ☐
δ) Η εξίσωση $x^2 = 16$ έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x = 4$. ☐
ε) Η εξίσωση $x^2 = -9$ δεν έχει λύση. ☐
στ) Η εξίσωση $(x-2)^2 = 0$ έχει διπλή λύση τον αριθμό $x = 2$. ☐

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Η εξίσωση $5x - 6 = x^2$ είναι 2ου βαθμού. ☐
β) Η εξίσωση $x^2 + 3x + 8 = x(x+2)$ είναι 2ου βαθμού. ☐
γ) Η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 + 5x + 3 = 0$ είναι
   i) 1ου βαθμού, όταν $\lambda = 2$ ☐
   ii) 2ου βαθμού, όταν $\lambda \neq 2$. ☐

3 Ένας μαθητής λύνοντας την εξίσωση $x^2 = 6x$ απλοποίησε με το x και βρήκε ότι έχει μοναδική λύση τη $x = 6$. Παρατηρώντας όμως την εξίσωση διαπίστωσε ότι επαληθεύεται και για $x = 0$. Πού έγινε το λάθος και χάθηκε η λύση $x = 0$;

(089-098) 3-11-06 01:51 ™ÂÏ›‰·93

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x - 4)(x + 1) = 0$ β) $y(y + 5) = 0$ γ) $(3 - \omega)(2\omega + 1) = 0$

δ) $7x(x - 7) = 0$ ε) $3y\left(\frac{y}{3} - 2\right) = 0$ στ) $\left(\frac{1}{2} - \omega\right)(2\omega - 1) = 0$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 = 7x$ β) $-y^2 = 9y$ γ) $2\omega^2 - 72 = 0$

δ) $-2t^2 - 18 = 0$ ε) $-0{,}2\varphi^2 + 3{,}2 = 0$ στ) $\frac{z^2}{6} - 0{,}5z = 0$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(2x - 1)^2 - 1 = 0$ β) $3(x + 2)^2 = 12$ γ) $(x + 1)^2 = 2x$

δ) $\frac{(x - 9)^2}{3} = 27$ ε) $(3x - 1)^2 - 4x^2 = 0$ στ) $(x + \sqrt{3})^2 - 3 = 0$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(3x + 1)^2 = 5(3x + 1)$ β) $0{,}5(1 - y)^2 = 18$ γ) $(2\omega^2 + 1)(\omega^2 - 16) = 0$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x(x - 4) = -4$ β) $y^2 + y - 12 = 0$ γ) $\omega^2 - 2\omega - 15 = 0$

δ) $2t^2 - 7t + 6 = 0$ ε) $3\varphi^2 + 1 = 4\varphi$ στ) $5z^2 - 3z - 8 = 0$

6 Να λύσετε τις εξισώσεις:

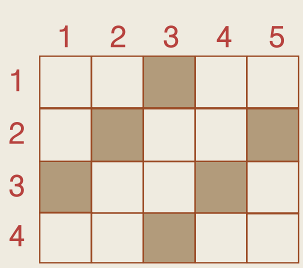
α) $25x^2 + 10x + 1 = 0$ β) $y^2(y - 2) + 4y(y - 2) + 4y - 8 = 0$

γ) $\omega^2 + 2006\omega - 2007 = 0$

7 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ β) $x^2 - (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$

8



Οριζόντια:

1. Μη μηδενική ρίζα της εξίσωσης $x^2 = 12x$
   – Ρίζα της εξίσωσης $x^2 + 225 = 30x$
2. Γινόμενο ριζών της εξίσωσης $x(x + 4) + 8(x + 4) = 0$
3. Άθροισμα ριζών της εξίσωσης $x^2 - 10x + 9 = 0$
4. Η απόλυτη τιμή του γινομένου των ριζών της εξίσωσης $x^2 = 25$
   – Η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $x^2 = 32x$

Κάθετα:

1. Ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 20x + 100 = 0$
2. Το ακέραιο πηλίκο των ριζών της εξίσωσης $x(x - 15) = x - 15$
3. Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $(x - 5)^2 - (x - 5) = 0$
4. Μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 144 = 0$
5. Ρίζα της εξίσωσης $x^2(x - 12) + 2007(x - 12) = 0$

(089-098) 3-11-06 01:51 ™ÂÏ›‰·94

Β Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου

Στην προηγούμενη ενότητα εφαρμόσαμε τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 15x - 16 = 0$. Τη μέθοδο αυτή μπορούμε να την εφαρμόσουμε και για να λύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή, $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$. Έχουμε διαδοχικά:

- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με 4α.
- Μεταφέρουμε το σταθερό όρο στο β′ μέλος.
- Στο α′ μέλος έχουμε δύο όρους του αναπτύγματος $(2αx + β)^2$. Για να συμπληρώσουμε το τετράγωνο του $2αx + β$ προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $β^2$.

$$αx^2 + βx + γ = 0$$
$$4α \cdot αx^2 + 4α \cdot βx + 4α \cdot γ = 0$$
$$4α^2x^2 + 4αβx = -4αγ$$
$$(2αx)^2 + 2 \cdot 2αx \cdot β = -4αγ$$
$$(2αx)^2 + 2 \cdot 2αx \cdot β + β^2 = β^2 - 4αγ$$
$$(2αx + β)^2 = β^2 - 4αγ$$

Αν συμβολίσουμε την παράσταση $β^2 - 4αγ$ με το γράμμα Δ, τότε η εξίσωση γράφεται $(2αx + β)^2 = Δ$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $Δ > 0$, τότε έχουμε:

$$2αx + β = \pm\sqrt{Δ}$$
$$2αx = -β \pm \sqrt{Δ}$$
$$x = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$$

Άρα η εξίσωση έχει **δύο άνισες λύσεις**, τις $x = \frac{-β + \sqrt{Δ}}{2α}$ και $x = \frac{-β - \sqrt{Δ}}{2α}$

- Αν $Δ = 0$, τότε έχουμε:

$$(2αx + β)^2 = 0$$
$$2αx + β = 0$$
$$2αx = -β$$
$$x = -\frac{β}{2α}$$

Άρα η εξίσωση έχει **μία διπλή λύση**, την $x = -\frac{β}{2α}$

- Αν $Δ < 0$, τότε η εξίσωση **δεν έχει λύση** (**αδύνατη**).

Η παράσταση $β^2 - 4αγ$, όπως είδαμε, παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$, γιατί μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των λύσεών της. Γι' αυτό λέγεται **διακρίνουσα** και συμβολίζεται με το γράμμα Δ, δηλαδή

$$\boxed{Δ = β^2 - 4αγ}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$.

- Αν $Δ > 0$, έχει **δύο άνισες λύσεις** τις $x = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$
- Αν $Δ = 0$, έχει **μία διπλή λύση** την $x = -\frac{β}{2α}$
- Αν $Δ < 0$, **δεν έχει λύση** (αδύνατη).

(089-098) 7-11-06 16:17 ™ÂÏ›‰·95

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2x^2 + 5x + 3 = 0$ β) $6x^2 - 5x + 2 = 0$ γ) $-16x^2 + 8x - 1 = 0$

Λύση

α) Στην εξίσωση $2x^2 + 5x + 3 = 0$ είναι $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $\gamma = 3$, οπότε η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-5 \pm 1}{4}$,

δηλαδή είναι $x = \dfrac{-5+1}{4} = -1$ ή $x = \dfrac{-5-1}{4} = -\dfrac{3}{2}$

β) Στην εξίσωση $6x^2 - 5x + 2 = 0$ είναι $\alpha = 6$, $\beta = -5$, $\gamma = 2$, οπότε η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 25 - 48 = -23 < 0$.

Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη).

γ) Στην εξίσωση $-16x^2 + 8x - 1 = 0$ είναι $\alpha = -16$, $\beta = 8$, $\gamma = -1$, οπότε η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 8^2 - 4 \cdot (-16) \cdot (-1) = 64 - 64 = 0$.

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{8}{2 \cdot (-16)} = \dfrac{1}{4}$

2 Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $9x^2 - (5x-1)^2 = 2x$ β) $\dfrac{x(x+3)}{3} - \dfrac{x-6}{6} = \dfrac{1}{2}$

Λύση

α) $9x^2 - (5x-1)^2 = 2x$

$9x^2 - (25x^2 - 10x + 1) = 2x$

$9x^2 - 25x^2 + 10x - 1 - 2x = 0$

$-16x^2 + 8x - 1 = 0$

$x = \dfrac{1}{4}$ (διπλή λύση)

(Παράδειγμα 1γ)

β) $\dfrac{x(x+3)}{3} - \dfrac{x-6}{6} = \dfrac{1}{2}$

$6 \cdot \dfrac{x(x+3)}{3} - 6 \cdot \dfrac{x-6}{6} = 6 \cdot \dfrac{1}{2}$

$2x(x+3) - (x-6) = 3$

$2x^2 + 6x - x + 6 - 3 = 0$

$2x^2 + 5x + 3 = 0$

$x = -1$ ή $x = -\dfrac{3}{2}$ *(Παράδειγμα 1α)*

3 α) Να λυθεί η εξίσωση $2x^2 - 8x + 6 = 0$.

β) Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο $2x^2 - 8x + 6$.

Λύση

α) Στην εξίσωση $2x^2 - 8x + 6 = 0$ είναι $\alpha = 2$, $\beta = -8$, $\gamma = 6$, οπότε η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 64 - 48 = 16 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ ή $x = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 2} = \dfrac{8 \pm 4}{4}$,

δηλαδή είναι $x = 3$ ή $x = 1$.

β) $2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x + 3) = 2(x^2 - 3x - x + 3) = 2\left[x(x-3) - (x-3)\right] = 2(x-3)(x-1)$

(089-098) 3-11-06 01:51 ™ÂÏ›‰·96

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Στο προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώσαμε ότι:

- Οι λύσεις της εξίσωσης $2x^2 - 8x + 6 = 0$ είναι οι αριθμοί 3 και 1.
- Το τριώνυμο $2x^2 - 8x + 6$ αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων ως εξής:
  $2x^2 - 8x + 6 = 2(x - 3)(x - 1)$

Γενικά

Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση $2x^2 + 5x + 3 = 0$ έχει λύσεις τις -1 και $-\frac{3}{2}$ *(παράδειγμα 1α)*.

Άρα το τριώνυμο $2x^2 + 5x + 3$ γράφεται

$$2x^2 + 5x + 3 = 2[x - (-1)]\left[x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right] = 2(x + 1)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Ομοίως η εξίσωση $-16x^2 + 8x - 1 = 0$ έχει μία διπλή λύση, την $x = \frac{1}{4}$ *(παράδειγμα 1γ)*.

Άρα το τριώνυμο $-16x^2 + 8x - 1$ γράφεται

$$-16x^2 + 8x - 1 = -16\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = -16\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Αν Δ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, τότε να αντιστοιχίσετε σε κάθε περίπτωση της στήλης (Α) το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη (Β).

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\Delta > 0$	1. Η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση.
β. $\Delta = 0$	2. Η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις.
γ. $\Delta \geq 0$	3. Η εξίσωση έχει μία διπλή λύση.
δ. $\Delta < 0$	4. Η εξίσωση δεν έχει λύση.

α	β	γ	δ

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα θετική, τότε δεν έχει λύση. ☐

β) Αν μία εξίσωση 2ου βαθμού έχει διακρίνουσα θετική ή μηδέν, τότε έχει μία τουλάχιστον λύση. ☐

γ) Η εξίσωση $2x^2 + 4x - 6 = 0$ έχει ως λύσεις τους αριθμούς 1 και -3, οπότε το τριώνυμο $2x^2 + 4x - 6$ γράφεται $2x^2 + 4x - 6 = (x - 1)(x + 3)$. ☐

(089-098) 3-11-06 01:51 ™ÂÏ›‰·97

3 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις είναι προτιμότερο να λυθούν με τη βοήθεια του τύπου

α) $2x^2 = 7x$ β) $3x^2 - 2x + 8 = 0$ γ) $-2x^2 + 50 = 0$ δ) $5x^2 + x - 4 = 0$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να φέρετε τις εξισώσεις της πρώτης στήλης στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ και να συμπληρώσετε τις υπόλοιπες στήλες του πίνακα.

Εξίσωση	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$	α	β	γ
$x(x-1) = -2$				
$3x^2 + 4 = 2(x+2)$				
$(x-1)^2 = 2(x^2 - x)$				

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - x - 2 = 0$ β) $4y^2 + 3y - 1 = 0$ γ) $-2\omega^2 + \omega + 6 = 0$

δ) $2z^2 - 3z + 1 = 0$ ε) $-25t^2 + 10t - 1 = 0$ στ) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

ζ) $3x^2 + 18x + 27 = 0$ η) $x^2 - 4x = 5$ θ) $x^2 - 3x + 7 = 0$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $x^2 - 7x = 0$ β) $x^2 - 16 = 0$

i) με τη βοήθεια του τύπου ii) με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3x^2 - 2(x-1) = 2x + 1$ β) $(y+2)^2 + (y-1)^2 = 5(2y+3)$

γ) $(2\omega - 3)^2 - (\omega - 2)^2 = 2\omega^2 - 11$ δ) $\varphi(8 - \varphi) - (3\varphi + 1)(\varphi + 2) = 1$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^2 - 1}{3} - \dfrac{x+3}{5} = x - 2$ β) $\dfrac{y^2}{3} - \dfrac{6y+1}{4} = \dfrac{y-2}{6} - 2$

γ) $0{,}5t^2 - 0{,}4(t+2) = 0{,}7(t-2)$ δ) $\dfrac{\omega}{2}(\sqrt{3}\omega - 7) = -\sqrt{3}$

6 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2 + 4x - 12$ β) $3y^2 - 8y + 5$ γ) $-2\omega^2 + 5\omega - 3$

δ) $x^2 - 16x + 64$ ε) $9y^2 + 12y + 4$ στ) $-\omega^2 + 10\omega - 25$

7 Αν α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον λύση

α) $\alpha x^2 - x + 1 - \alpha = 0$ β) $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0$

8 Δίνεται η εξίσωση $(\alpha + \gamma)x^2 - 2\beta x + (\alpha - \gamma) = 0$, όπου α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ. Αν η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

(089-098) 7-11-06 16:18 ™ÂÏ›‰·98

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σε μια βαβυλωνική πλάκα (περίπου 1650 π.Χ.) βρίσκουμε χαραγμένο και λυμένο το παρακάτω πρόβλημα(*):
« *Αν από την επιφάνεια ενός τετραγώνου αφαιρέσω την πλευρά του, θα βρω 870. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου*».
Τους λαούς της Μεσοποταμίας δεν τους απασχολούσε η γεωμετρική έννοια της ποσότητας, αλλά η ίδια ποσότητα, όπως αυτή εκφράζεται με τους συγκεκριμένους αριθμούς (Γι' αυτό πρόσθεταν μήκος με επιφάνεια).
Αν χρησιμοποιήσουμε σημερινό συμβολισμό και υποθέσουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι x, τότε η λύση του προβλήματος οδηγεί στη λύση της εξίσωσης $x^2 - x = 870$.
Ο Βαβυλώνιος γραφέας της πλάκας μας προτείνει να λύσουμε το πρόβλημα αυτό ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- Πάρε το μισό του 1 που είναι το $\frac{1}{2}$.
- Πολλαπλασίασε το $\frac{1}{2}$ με το $\frac{1}{2}$, αποτέλεσμα $\frac{1}{4}$.
- Πρόσθεσε το $\frac{1}{4}$ στο 870 και θα βρεις $870\frac{1}{4}$.
- Το $870\frac{1}{4}$, είναι το τετράγωνο του $29\frac{1}{2}$.
- Πρόσθεσε στο $29\frac{1}{2}$ το $\frac{1}{2}$ (που βρήκες αρχικά) και θα βρεις 30.
- Αυτή είναι η πλευρά του τετραγώνου.

> • Το 1 είναι ο συντελεστής του x. (Οι Βαβυλώνιοι δε χρησιμοποιούσαν αρνητικούς αριθμούς).

> • Οι Βαβυλώνιοι για να βρίσκουν την τετραγωνική ρίζα αριθμών είχαν κατασκευάσει πίνακες με τα τετράγωνα των αριθμών.

> • Έκαναν πρόσθεση, όταν στην εξίσωση υπήρχε αφαίρεση (π.χ. $x^2 - x$) και αφαίρεση, όταν στην εξίσωση υπήρχει πρόσθεση (π.χ. $x^2 + x$)

- Να λύσετε την εξίσωση με τη μέθοδο που μάθατε στην ενότητα αυτή και να τη συγκρίνετε με την πρακτική μέθοδο με την οποία έλυναν οι Βαβυλώνιοι τις εξισώσεις 2ου βαθμού. Τι παρατηρείτε;

- Ακολουθώντας τα βήματα των Βαβυλωνίων να λύσετε και το παρακάτω πρόβλημα που είναι χαραγμένο στην ίδια πλάκα. «Αν στην επιφάνεια ενός τετραγώνου προσθέσω την πλευρά του, θα βρω $\frac{3}{4}$. Ποια είναι η πλευρά του τετραγώνου;»

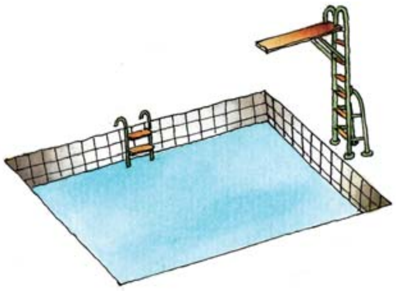
(*)(Από το βιβλίο του Θ. Εξαρχάκου: *Ιστορία των Μαθηματικών, Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων*, τόμος Α′, Αθήνα 1997.

2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

Με τη βοήθεια των εξισώσεων 2ου βαθμού μπορούμε να λύσουμε πολλά προβλήματα της καθημερινής μας ζωής, της Οικονομίας, της Φυσικής κ.τ.λ.

Πρόβλημα 1ο

Το εμβαδόν μια κολυμβητικής πισίνας είναι 400 m^2. Να βρείτε τις διαστάσεις της, αν αυτές έχουν άθροισμα 41 m.



Λύση

Αν η μία διάσταση της πισίνας είναι x, τότε η άλλη θα είναι 41 – x, αφού το άθροισμά τους είναι 41 m. Επειδή το εμβαδόν της πισίνας είναι 400 m^2, έχουμε την εξίσωση
$x(41-x) = 400$ ή $41x - x^2 = 400$ ή $x^2 - 41x + 400 = 0$.
Στην εξίσωση αυτή είναι $\alpha = 1$, $\beta = -41$, $\gamma = 400$, οπότε η διακρίνουσα είναι
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-41)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 400 = 1681 - 1600 = 81 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{41 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \dfrac{41 \pm 9}{2}$,

δηλαδή είναι $x = 25$ ή $x = 16$.
Αν $x = 25$, τότε $41 - x = 41 - 25 = 16$, ενώ αν $x = 16$, τότε $41 - x = 41 - 16 = 25$.
Επομένως, και στις δύο περιπτώσεις οι διαστάσεις της πισίνας είναι 25 m και 16 m.

Πρόβλημα 2ο

Ένας οικονομολόγος υπολόγισε ότι μια βιοτεχνία ρούχων για να κατασκευάσει x πουκάμισα ξοδεύει $\frac{1}{10}x^2 + 20x + 500$ ευρώ. Αν η βιοτεχνία πουλάει κάθε πουκάμισο 60 €, πόσα πουκάμισα πρέπει να πουλήσει, ώστε να κερδίσει 3500 €;

Λύση

Αν η βιοτεχνία πουλήσει x πουκάμισα, θα εισπράξει 60x €, οπότε θα κερδίσει $60x - \left(\frac{1}{10}x^2 + 20x + 500\right)$ €.

Επειδή θέλουμε το κέρδος να είναι 3500 € έχουμε την εξίσωση

$$60x - \left(\frac{1}{10}x^2 + 20x + 500\right) = 3500 \text{ ή}$$

$$60x - \frac{1}{10}x^2 - 20x - 500 = 3500$$

$$600x - x^2 - 200x - 5000 = 35000$$

$$x^2 - 400x + 40000 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-400)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40000 = 160000 - 160000 = 0.$

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, την $x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{400}{2 \cdot 1} = 200.$

Επομένως, για να κερδίσει η βιοτεχνία 3500 €, πρέπει να πουλήσει 200 πουκάμισα.

Πρόβλημα 3ο

Από ένα ακίνητο αερόστατο που βρίσκεται σε ύψος h αφήνεται να πέσει ένας σάκος με άμμο για να ελαφρύνει. Ταυτόχρονα, το αερόστατο αρχίζει να κινείται κατακόρυφα προς τα άνω με σταθερή επιτάχυνση 0,5 m/sec². Τη στιγμή που ο σάκος φτάνει στο έδαφος, το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 84 m. Να βρεθεί πόσο διήρκησε η πτώση του σάκου.

Σημείωση:

Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι:

- *Αν ένα σώμα αφήνεται να πέσει από ύψος h m, τότε θα φτάσει στο έδαφος σε χρόνο t sec, όπου* $h = \frac{1}{2}gt^2$ *και* $g = 10$ *m/sec² περίπου.*
- *Αν ένα σώμα αρχίζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση α, τότε σε χρόνο t θα διανύσει διάστημα* $s = \frac{1}{2}at^2$.

Λύση

Αν η πτώση του σάκου διήρκησε t sec, τότε στο χρόνο αυτό ο σάκος διήνυσε απόσταση

$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}10t^2 = 5t^2$, αφού $g = 10$ m/sec².

Στον ίδιο χρόνο το αερόστατο ανέβηκε κατά ύψος

$h' = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot t^2 = \frac{1}{4}t^2$, αφού $\alpha = 0{,}5$ m/sec².

Επειδή $h + h' = 84$, έχουμε την εξίσωση

$5t^2 + \frac{1}{4}t^2 = 84$ ή $20t^2 + t^2 = 336$ ή $21t^2 = 336$

ή $t^2 = 16$, οπότε $t = 4$ ή $t = -4$.

Επειδή το t παριστάνει χρόνο, πρέπει $t > 0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι η διάρκεια της πτώσης του σώματος ήταν $t = 4$ sec.