ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο
ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΙ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

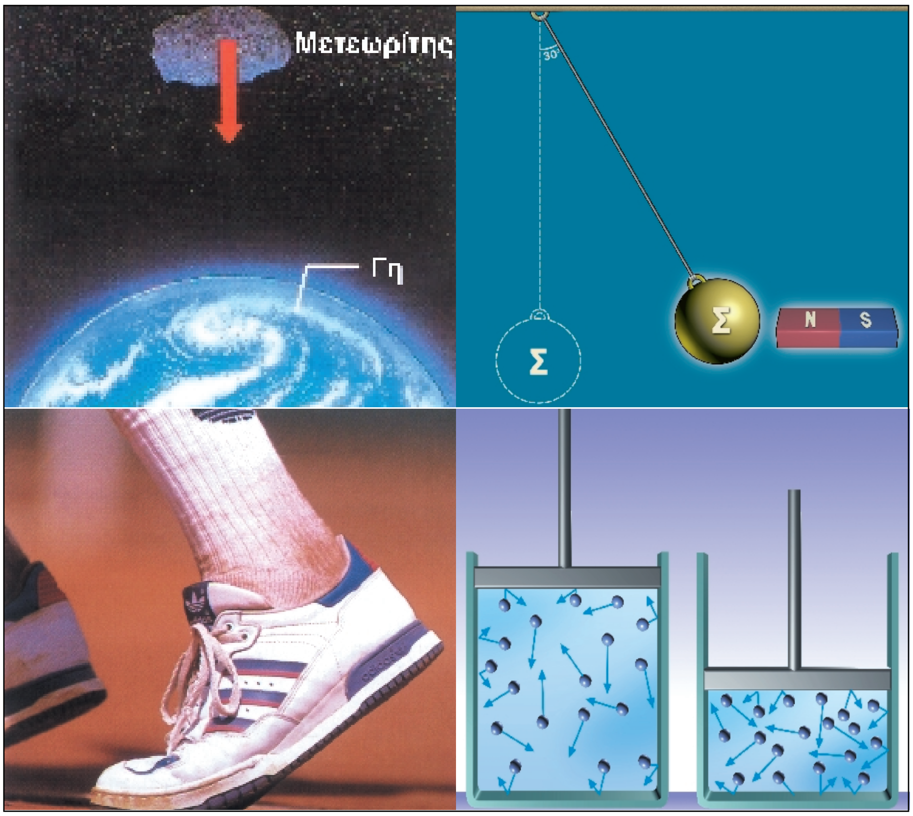
2.1 Η έννοια της δύναμης

Από τις καθημερινές εμπειρίες μας γνωρίζουμε πώς να περπατάμε, πώς να κολυμπάμε ή πώς να χορεύουμε, πώς να παίζουμε ποδόσφαιρο, μπάσκετ ή βόλεϊ, πώς να ισορροπούμε, όταν βρισκόμαστε μέσα σε κινούμενο όχημα, και ο οδηγός πατάει φρένο.

Έπειτα, στο σχολείο μαθαίνουμε ότι:

- η γη έλκει όλα τα σώματα.
- δύο μαγνήτες έλκονται ή απωθούνται.
- μπορούμε να παραμορφώσουμε ένα σώμα.
- μπορούμε να συμπιέσουμε ένα αέριο μέχρι ενός σημείου.

(Δηλαδή αυτά που μαθαίνουμε στο σχολείο εξηγούν τις καθημερινές εμπειρίες μας).



Εικόνα 2.1
Η παρουσία της δύναμης μέσα από τα αποτελέσματά της

Σε όλες αυτές τις παρατηρήσεις κυριαρχεί ένα πρωταρχικό φυσικό μέγεθος. Το μέγεθος αυτό είναι η **δύναμη**.

Αντίθετα με τη μάζα, με το μήκος ή με τον όγκο, **η δύναμη είναι κάτι που δεν προϋπάρχει σε ένα σώμα**. **Η δύναμη είναι μια αλληλεπίδραση μεταξύ δύο σωμάτων,** π.χ. του δρόμου και των ποδιών μας, του νερού και των χεριών μας, της μπάλας και των χεριών ή των ποδιών μας.

Με άλλα λόγια, ένα σώμα μπορεί να ασκήσει μια δύναμη σε ένα άλλο, αλλά δεν μπορεί να κατέχει μια δύναμη ως κάτι ξεχωριστό. Τη δύναμη τη συναντάμε με διάφορες ονομασίες όπως βάρος, έλξη, άπωση, αντίσταση, τριβή κ.ά.

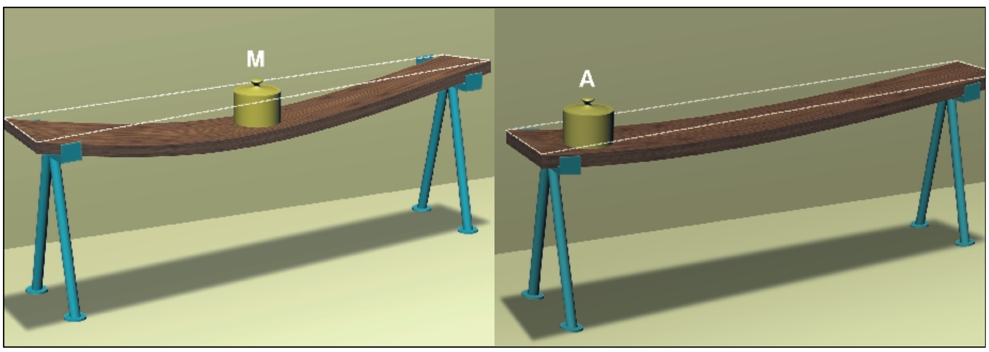
Οι δυνάμεις, γενικά:
- σπρώχνουν ή τραβούν τα σώματα
- μετακινούν ή σταματούν τα σώματα
- περιστρέφουν τα σώματα
- παραμορφώνουν ή αλλάζουν τα σχήματα των σωμάτων.

Τέλος, τη δύναμη δεν τη “βλέπουμε”, βλέπουμε όμως τα αποτελέσματά της και αυτά μελετάμε, για να εξηγήσουμε την κίνηση των ζωντανών οργανισμών αλλά και των υλικών σωμάτων πάνω στη γη, μέσα στη θάλασσα, στον αέρα ή στο διάστημα. Από αυτές τις μελέτες προέκυψαν τα σύγχρονα μηχανήματα και πλήθος διάφορων κατασκευών, τα οποία κάνουν τη ζωή μας άνετη.

2.2 Τα χαρακτηριστικά της δύναμης

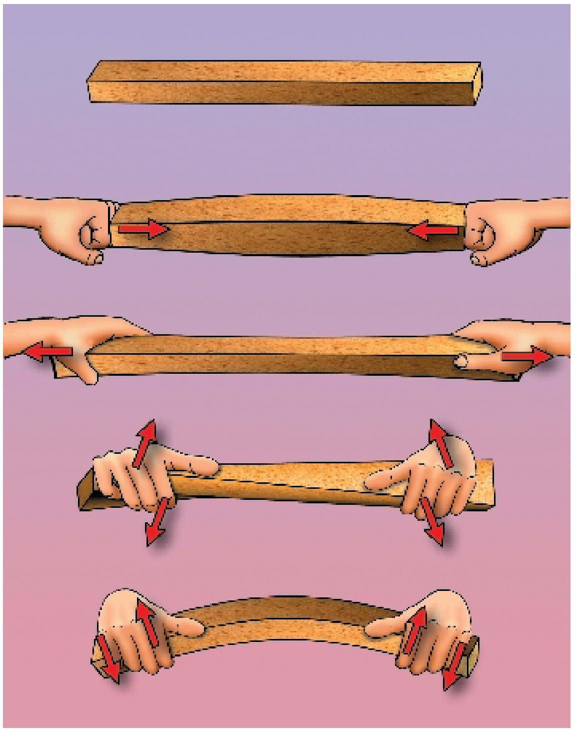
Για να καθορίσουμε τη δύναμη που δέχεται ένα σώμα ή τη δύναμη που ασκεί ένα σώμα σε ένα άλλο, χρειάζεται να γνωρίζουμε τρία στοιχεία:

α. το μέτρο της δύναμης (αριθμητική τιμή και μονάδα μέτρησης)
β. τη διεύθυνση και τη φορά της δύναμης
γ το σημείο εφαρμογής της.



Εικόνα 2.2
Αποτελέσματα μιας δύναμης ανάλογα με το σημείο εφαρμογής της

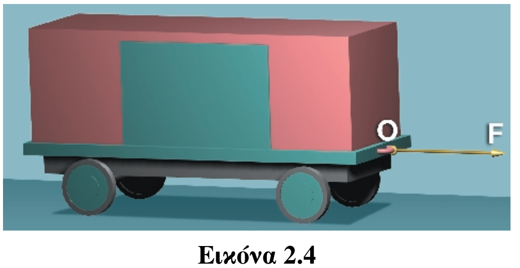
Τα παραπάνω στοιχεία, που αφορούν τη δύναμη, είναι απαραίτητα, αφού άλλα θα είναι τα αποτελέσματα της δύναμης, όταν αυτή ασκηθεί στο σημείο Α ή Μ (εικόνα 2.2), και άλλα, όταν οι δυνάμεις ασκηθούν όπως δείχνει η εικόνα 2.3.



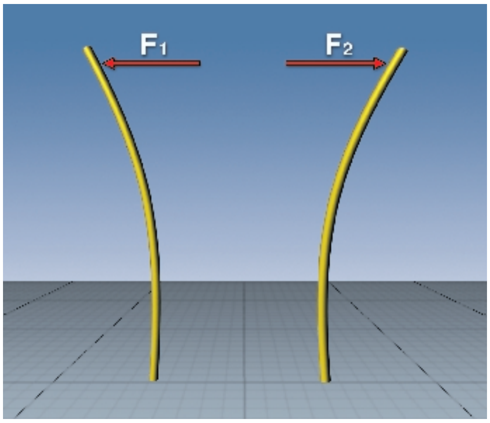
Εικόνα 2.3
Αποτέλεσματα δυνάμεων
ανάλογα με τη διεύθυνση και με τη φορά τους

Είναι, επομένως, φανερό ότι **η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος.**

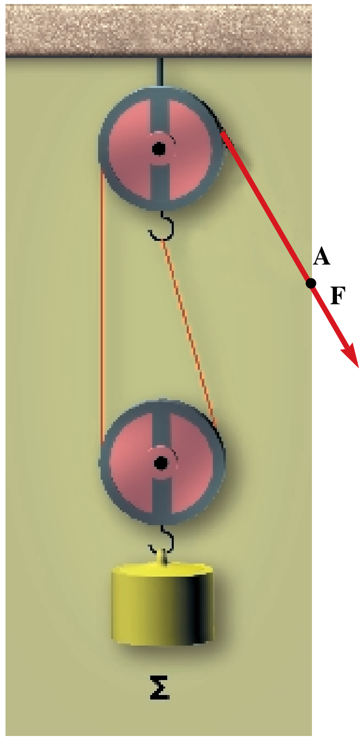
Στην παρακάτω εικόνα 2.4 η δύναμη ασκείται στο σημείο Ο του βαγονιού. Το σημείο Ο δείχνει το σημείο εφαρμογής της δύναμης, ενώ το διάνυσμα δείχνει τη διεύθυνση και τη φορά της δύναμης.



Εικόνα 2.4
Δύναμη η οποία ασκείται σε βαγόνι



Εικόνα 2.5
Αποτελέσματα δύναμης στο σημείο που ασκείται



Εικόνα 2.6
΄Εμμεσα αποτελέσματα δύναμης

Ας παρατηρήσουμε όμως κάποια διαφορά ως προς τα αποτελέσματα της επίδρασης μιας δύναμης στις εικόνες 2.5 και 2.6.

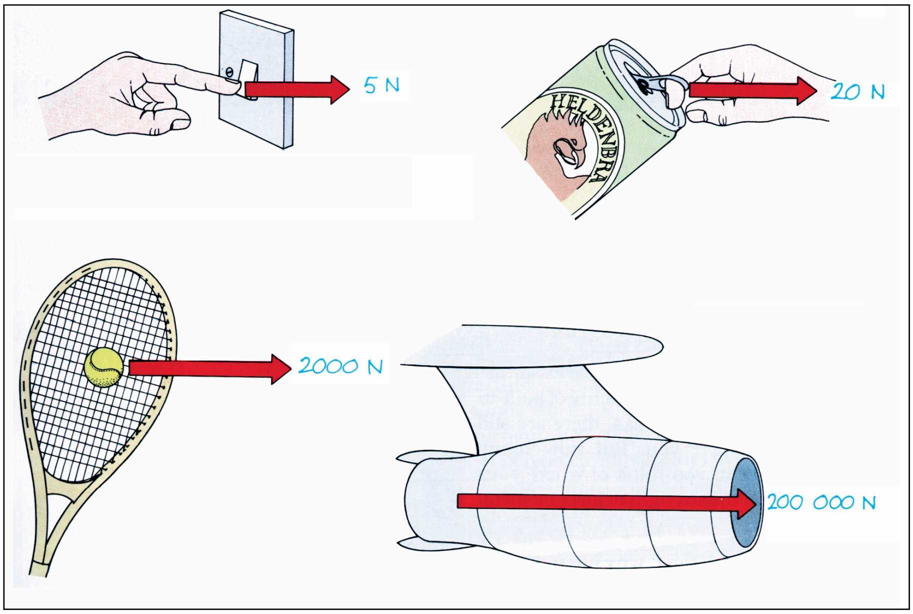
Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες μια δύναμη μπορεί να μεταφερθεί από το σημείο που ασκείται σε ένα άλλο σημείο, στο οποίο θέλουμε να επιδράσουμε (π.χ. η εξάσκηση δύναμης με τη βοήθεια ενός σχοινιού).

Τέτοια περίπτωση εμφανίζεται στην εικόνα 2.6, όπου η επίδραση της δύναμης F μεταφέρεται από το σημείο Α στο σώμα Σ.

Ας προσέξουμε
Μονάδες δύναμης
Η μονάδα μέτρησης της δύναμης είναι το 1Newton ή 1N.
Άλλες μονάδες μέτρησης της δύναμης είναι το 1p, το 1kp και το 1Mp.
Σχέσεις που συνδέουν τις μονάδες δύναμης:

$1\ kp = 9{,}81\ N$
$1\ kp = 1000\ p$
$1\ Mp = 1000\ kp.$

Για να έχουμε μια ιδέα για την τάξη μεγέθους της μονάδας 1N, θα πρέπει να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκεί το σώμα μας στο πάτωμα. Αν, π.χ, κάποιος είναι 56 κιλά, τότε –αν είναι όρθιος και δεν κρατάει κάτι– το σώμα του ασκεί στο πάτωμα δύναμη περίπου 560N, αν είναι 60 κιλά, ασκεί δύναμη 600N, αν είναι 90 κιλά, ασκεί δύναμη 900Ν. Στην εικόνα 2.7 μπορούμε να δούμε το ενδεικτικό μέγεθος των δυνάμεων που αναπτύσσονται σε κάποιες καθημερινές δραστηριότητες, σε αθλήματα και σε τεχνολογικές εφαρμογές.



Εικόνα 2.7
Ενδεικτική τιμή διάφορων δυνάμεων

2.3 Δυνάμεις επαφής και δυνάμεις από απόσταση

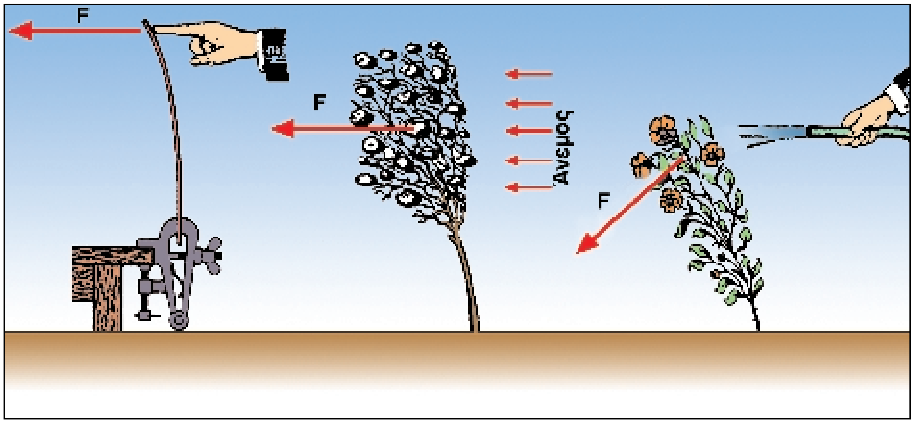
Σε μια αίθουσα διδασκαλίας ο καθηγητής ζητά από τους μαθητές να γράψουν σε ένα χαρτί πέντε προτάσεις, που να περιέχουν τη λέξη “δύναμη”. Μερικές από τις προτάσεις αυτές γράφτηκαν στον πίνακα και είναι οι εξής:

1. Ο τερματοφύλακας έδιωξε τη μπάλα με δύναμη.
2. Το βιβλίο πέφτει στο πάτωμα, επειδή άσκησε η γη μια δύναμη πάνω του.
3. Το αυτοκίνητο σταμάτησε, όταν ο οδηγός πάτησε φρένο και άρχισε να επιδρά η δύναμη της τριβής.
4. Τέντωσε με δύναμη το τόξο και το βέλος έφυγε μακριά.

Στο τέλος οι μαθητές κατέληξαν με τη βοήθεια του καθηγητή στα παρακάτω συμπεράσματα:

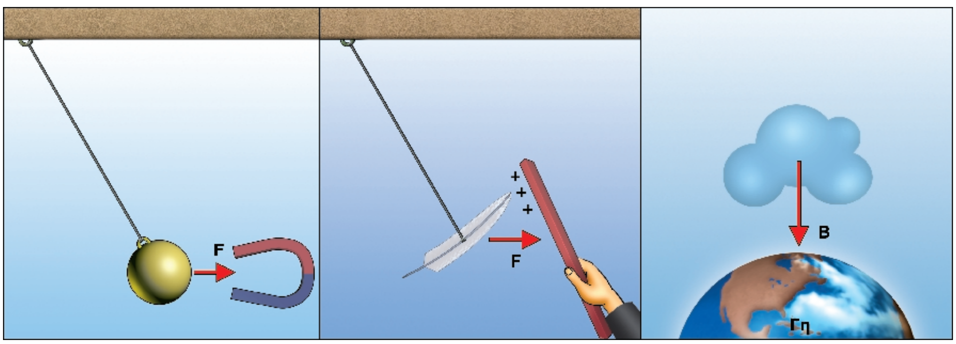
• Στο πρώτο, τρίτο και τέταρτο από τα παραπάνω παραδείγματα **οι δυνάμεις ασκούνται από το ένα σώμα στο άλλο, επειδή τα σώματα έρχονται σε άμεση επαφή.** Οι δυνάμεις αυτές ονομάζονται **δυνάμεις επαφής**.

Παραδείγματα δυνάμεων επαφής έχουμε στην εικόνα 2.8.



Εικόνα 2.8
Δυνάμεις επαφής

• Στο δεύτερο από τα παραπάνω παραδείγματα βλέπουμε ότι το ένα σώμα (η Γη) ασκεί στο άλλο (στο βιβλίο) δύναμη από απόσταση. Οι δυνάμεις αυτές οφείλονται σε κάποια ιδιότητα των σωμάτων και εμφανίζονται, όταν βρεθούν σε κατάλληλο χώρο, ο οποίος ονομάζεται **πεδίο**. Συγκεκριμένα, εξαιτίας της **μάζας** που έχει ένα σώμα δέχεται **βαρυτικές δυνάμεις** στο πεδίο βαρύτητας· εξαιτίας του **φορτίου ή των ηλεκτρομαγνητικών ιδιοτήτων** που μπορεί να έχουν κάποια σώματα δέχονται **ηλεκτροστατικές ή ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις** από τα αντίστοιχα πεδία. Παραδείγματα τέτοιων δυνάμεων έχουμε στην εικόνα 2.9.



Εικόνα 2.9
Δυνάμεις πεδίου

Ας συμπεράνουμε

1ο Οι δυνάμεις ασκούνται στα σώματα είτε εξ επαφής είτε από απόσταση.

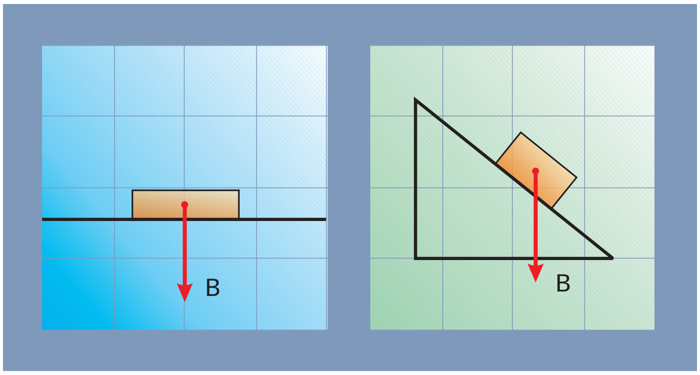
2ο Οι δυνάμεις ασκούνται είτε από έμψυχα είτε από άψυχα σώματα.

3ο Ένα σώμα δέχεται τόσες δυνάμεις όσα είναι τα σώματα με τα οποία έρχεται σε επαφή, και επιπλέον τόσες δυνάμεις όσα είναι τα πεδία μέσα στα οποία βρίσκεται.

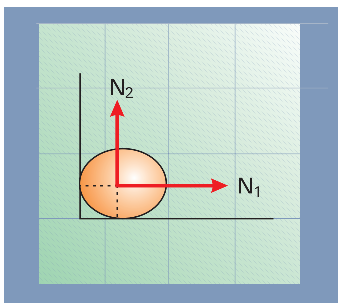
Ας σχεδιάσουμε δυνάμεις

Για να μη σχεδιάζουμε τις δυνάμεις όπως τα βέλη των Ινδιάνων κυνηγών, θα πρέπει να έχουμε υπόψη τα παρακάτω:

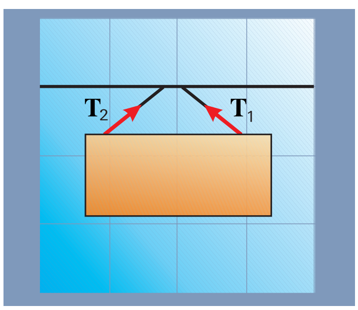
- Πριν αρχίσουμε να σχεδιάζουμε κάθε δύναμη σ' ένα σώμα, πρέπει να βρούμε από πού προέρχεται κάθε δύναμη η οποία ασκείται πάνω σε αυτό.
- Θεωρούμε ότι τα σώματα που θα εξετάσουμε είναι ομογενή και το βάρος τους ασκείται στο γεωμετρικό κέντρο τους (θα μάθουμε ότι το σημείο αυτό λέγεται κέντρο βάρους).
- Σχεδιάζουμε το βάρος του σώματος πάντοτε κατακόρυφα.



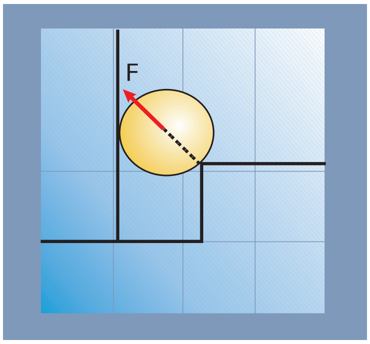
- Οι δυνάμεις που ασκούνται από τοιχώματα είναι κάθετες σε αυτά, όταν δεν υπάρχουν τριβές.



- Οι δυνάμεις που ασκούνται από νήματα (σχοινιά) είναι πάνω στη διεύθυνση των νημάτων με φορά από το σώμα προς το σχοινί.



• Οι δυνάμεις που ασκούνται από οξεία αιχμή είναι κάθετες στην επιφάνεια του σώματος στο σημείο επαφής.



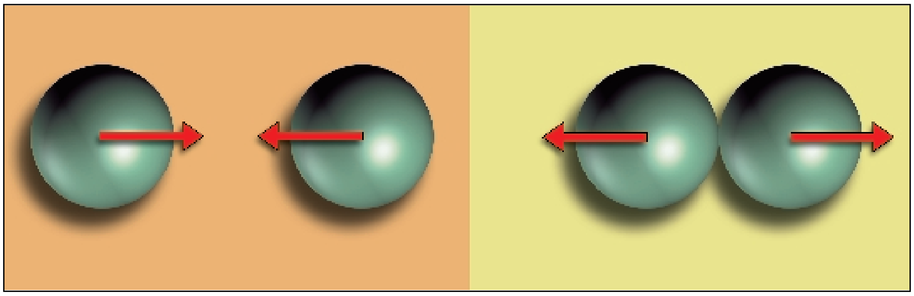
2.4 Η δύναμη και οι καταστάσεις της ύλης

Τα υλικά σώματα που συναντάμε γύρω μας εμφανίζονται σε τρεις κυρίως καταστάσεις: **στερεή - υγρή - αέρια.**

Τα υγρά και τα αέρια σώματα ονομάζονται και **ρευστά**.

Σήμερα είναι γνωστό ότι υπάρχουν και άλλες καταστάσεις της ύλης, όπως π.χ. **το πλάσμα** (βλ. κεφ.7).

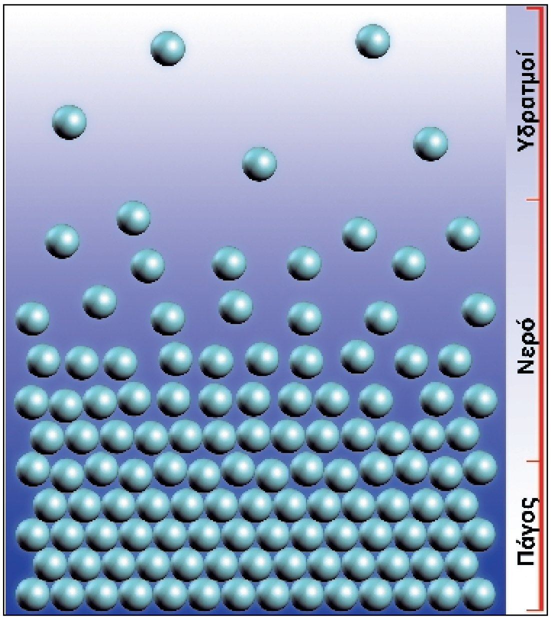
Για να ερμηνεύουν τις καταστάσεις των σωμάτων, οι επιστήμονες επινόησαν το εξής μοντέλο: Θεώρησαν ότι τα άτομα και τα μόρια, από τα οποία αποτελούνται τα υλικά σώματα, μοιάζουν με μικρές σφαιρικές μπάλες. Μεταξύ των μορίων ή των ατόμων ασκούνται δυνάμεις πεδίου. Εξαιτίας αυτών των δυνάμεων τα μόρια και τα άτομα έρχονται κοντά το ένα στο άλλο. Όταν όμως τα μόρια ή τα άτομα πλησιάσουν σε κάποια απόσταση, οι δυνάμεις αυτές γίνονται απωστικές. Με την επίδραση λοιπόν των αρχικών ελκτικών δυνάμεων και στη συνέχεια των απωστικών μελετώνται οι καταστάσεις της ύλης.



Εικόνα 2.10
Ελκτικές και απωστικές δυνάμεις μεταξύ των μορίων

(Είναι προφανές ότι οι παραπάνω εικόνες αποτελούν μεγεθυσμένη αναπαράσταση των δύο ατόμων).

Οι ελκτικές δυνάμεις μεταξύ των μορίων ή των ατόμων ονομάζονται **δυνάμεις συνοχής,** όταν ασκούνται σε **μόρια ή άτομα του ίδιου σώματος,** π.χ. μεταξύ των μορίων του πάγου. Οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ **μορίων ή ατόμων διαφορετικών σωμάτων** ονομάζονται **δυνάμεις συνάφειας,** π.χ. του πίνακα και της κιμωλίας, όταν γράφουμε στον πίνακα. Οι δυνάμεις συνάφειας εξαρτώνται από το ζεύγος των σωμάτων μεταξύ των οποίων ασκούνται.

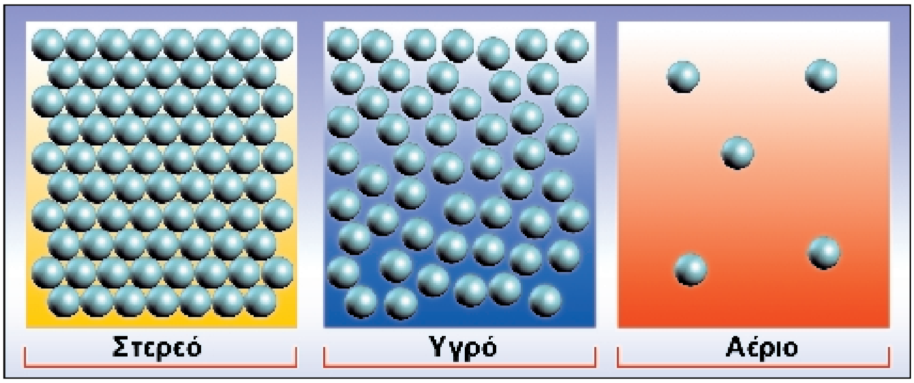


Εικόνα 2.11
Διάταξη των μορίων του H_2O στον πάγο (κάτω τμήμα της εικόνας), στο νερό (μεσαίο τμήμα) και στους υδρατμούς (άνω τμήμα)

Το μέγεθος των δυνάμεων συνοχής για κάθε σώμα μεταβάλλεται, όταν αυτό μεταβαίνει από τη μια κατάσταση στην άλλη.

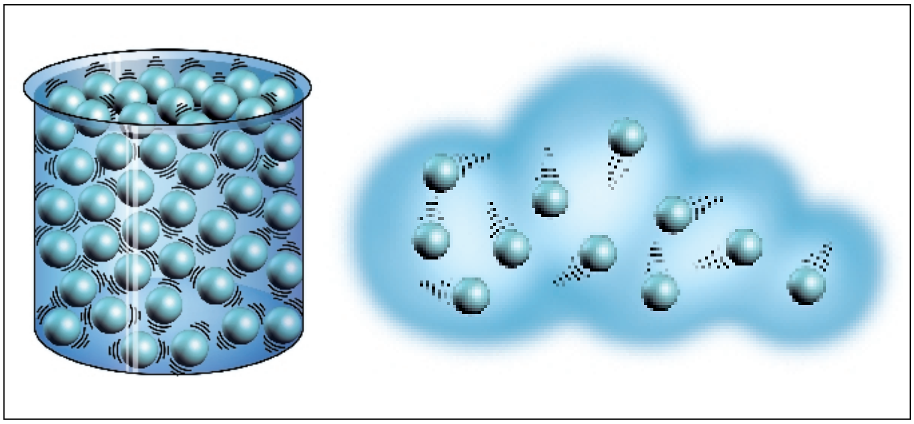
Συγκεκριμένα, σε ένα κομμάτι πάγου οι δυνάμεις συνοχής είναι πολύ μεγάλες και αυτό το διαπιστώνει κανείς, όταν προσπαθεί να σπάσει ένα παγάκι. Οι δυνάμεις συνοχής είναι πολύ μικρότερες, όταν το παγάκι λιώσει, αλλά ουσιαστικά συνεχίζουν να υπάρχουν, αφού τα μόρια του νερού βρίσκονται πάλι το ένα κοντά στο άλλο. Όταν το νερό εξατμιστεί και δημιουργηθούν οι υδρατμοί, αυτοί κατευθύνονται σε όλο το χώρο, επειδή οι δυνάμεις μεταξύ των μορίων τους είναι μηδαμινές.

Εξαιτίας του διαφορετικού μεγέθους των δυνάμεων συνοχής τα μόρια των στερεών σωμάτων έχουν συγκεκριμένες θέσεις, αν και ταλαντώνονται γύρω από αυτές, ενώ τα μόρια των υγρών και των αερίων σωμάτων (ρευστών) κινούνται εύκολα το ένα σε σχέση με το άλλο.



Εικόνα 2.12
Η διάταξη των μορίων στις τρεις καταστάσεις της ύλης

Για το λόγο αυτό **τα στερεά** θεωρούνται σώματα που έχουν **δομή και συγκεκριμένο σχήμα,** ενώ **τα ρευστά θεωρούνται σώματα με ακανόνιστη δομή**. Τα υγρά έχουν κάποια υποτυπώδη δομή, γι' αυτό έχουν συγκεκριμένο όγκο αλλά όχι σχήμα, αφού παίρνουν το σχήμα του δοχείου που τα περιέχει. Τα αέρια έχουν τέλεια έλλειψη δομής και γι' αυτό ο όγκος τους εξαρτάται από το χώρο που τους διατίθεται.



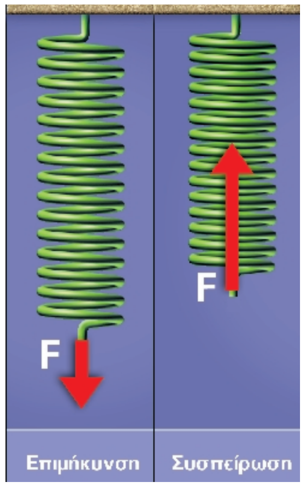
Εικόνα 2.13
Κινήσεις των μορίων στα ρευστά: (α) σε υγρό, (β) σε αέριο

Η συμπεριφορά των υλικών σωμάτων, η δομή, η αντοχή και το σχήμα τους, ανάλογα με την επίδραση διάφορων δυνάμεων, παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον. Στα θέματα αυτά θα γίνει αναφορά στο κεφάλαιο 7 και σε αντίστοιχα κεφάλαια των μαθημάτων ειδικότητας.

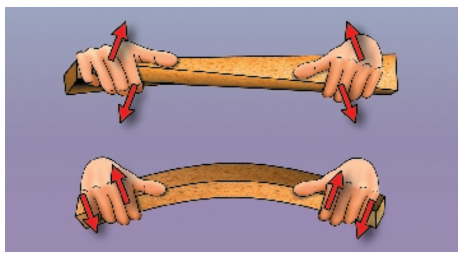
2.5 Η δύναμη ως αιτία παραμόρφωσης - Νόμος Hooke

Γύρω μας υπάρχουν διάφορα σώματα, τα οποία με την επίδραση δυνάμεων μπορούν να επιμηκυνθούν, να συσπειρωθούν ή γενικότερα να παραμορφωθούν. Σε ορισμένα από αυτά τα στερεά σώματα οι παραμορφώσεις εξαφανίζονται, όταν παύσουν οι δυνάμεις που τις προκάλεσαν. Τα σώματα αυτά χαρακτηρίζονται ως **ελαστικά σώματα,** ενώ αντίστοιχα οι παραμορφώσεις που υφίστανται εξαιτίας των δυνάμεων ονομάζονται **ελαστικές παραμορφώσεις**.

Αντίθετα, τα σώματα τα οποία δεν ξαναπαίρνουν το αρχικό σχήμα τους, αφού παραμορφωθούν από την επίδραση μιας δύναμης, ονομάζονται **πλαστικά (μη ελαστικά) σώματα**. Ένα παράδειγμα μη ελαστικού σώματος είναι η πλαστελίνη ή οι ράβδοι από μόλυβδο. Πράγματι, αν ασκηθεί μια δύναμη σε μια μολύβδινη ράβδο, η ράβδος θα παραμορφωθεί και το αποτέλεσμα αυτό θα παραμείνει και μετά την παύση της δύναμης. Ελαστικές παραμορφώσεις είναι η επιμήκυνση ή η συσπείρωση ενός ελατηρίου από χαλύβδινο σύρμα (εικόνα 2.14), η στρέψη ενός σύρματος ή, τέλος, η κάμψη μιας ράβδου από χάλυβα ή από καουτσούκ (εικόνα 2.15).



Εικόνα 2.14
Η επιμήκυνση και η συσπείρωση ενός ελατηρίου



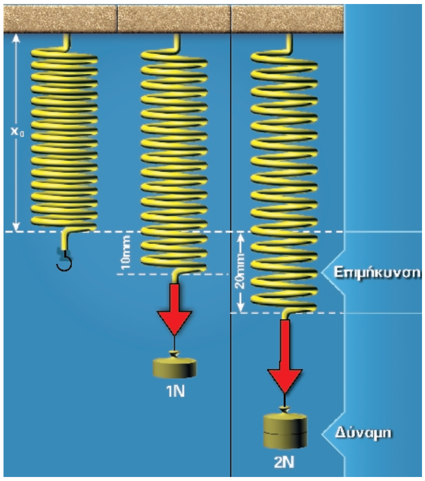
Εικόνα 2.15
Η στρέψη και η κάμψη μιας ράβδου

Οι ελαστικές παραμορφώσεις είναι παροδικές, όταν οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα δεν υπερβαίνουν ένα ορισμένο όριο, το οποίο ονομάζεται **όριο ελαστικότητας**.

Διαπιστώνεται πειραματικά ότι για τα ελαστικά σώματα ισχύει **ο νόμος του Hooke (Χουκ),** σύμφωνα με τον οποίο:

Οι ελαστικές παραμορφώσεις των στερεών σωμάτων είναι ανάλογες με τις αιτίες που τις προκαλούν.

Ο Άγγλος φυσικός **Robert Hooke** (1635-1703) κατέληξε στον παραπάνω νόμο ύστερα από πειραματικές διαδικασίες. Διαπίστωσε, λοιπόν, ότι μεταξύ της δύναμης που ασκείται σε ένα ελατήριο και της επιμήκυνσης ή της συσπείρωσης που παθαίνει το ελατήριο εξαιτίας της δύναμης αυτής ισχύει μια σχέση αναλογίας, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.16. Συζητήστε την!



Εικόνα 2.16
Στις ελαστικές παραμορφώσεις των σωμάτων η επιμήκυνση είναι ανάλογη με τη δύναμη που την προκαλεί.

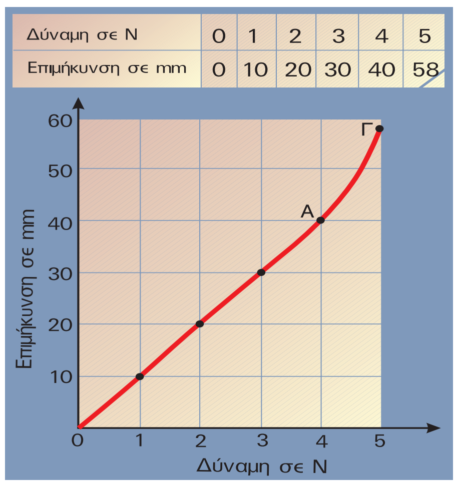
Η σχέση αυτή της αναλογίας μεταξύ δύναμης και παραμόρφωσης μπορεί να αποδοθεί ως εξής:

$$\boxed{F = kx} \qquad (2.1)$$

όπου **F** είναι η δύναμη που ασκήθηκε στο ελατήριο και τη μετράμε με τη μονάδα μέτρησης της δύναμης το 1N, **x** είναι η παραμόρφωση του ελατηρίου, που τη μετράμε σε m, cm, mm, ενώ ο παράγοντας **k** ονομάζεται **σταθερά του ελατηρίου**. Όπως προκύπτει από τη σχέση:

$$k = \frac{F}{x}$$

η μονάδα της στο S.I. είναι N/m.



Δύναμη σε N	0	1	2	3	4	5
Επιμήκυνση σε mm	0	10	20	30	40	58

Εικόνα 2.17
Χαρακτηριστική ελατηρίου

Η σταθερά του ελατηρίου, η οποία είναι γνωστή και ως **σκληρότητα του ελατηρίου**, εξαρτάται από τη φύση του σύρματος από το οποίο είναι κατασκευασμένο το ελατήριο και από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του (αντιστρόφως ανάλογη με το αρχικό ή φυσικό μήκος του ελατηρίου και ανάλογη με το εμβαδόν διατομής A του σύρματος).

Αν σε ένα σύστημα αξόνων xOy τοποθετήσουμε στο x-άξονα τις τιμές της δύναμης F που ασκούμε σε ένα ελατήριο, ενώ τις αντίστοιχες επιμηκύνσεις x που υφίσταται το ελατήριο τις τοποθετήσουμε στο y-άξονα, τότε προκύπτει ένα διάγραμμα, το οποίο ονομάζεται **χαρακτηριστική** (καμπύλη) του ελατηρίου (εικόνα 2.17).

Η κλίση λ του ευθύγραμμου τμήματος ΟΑ σχετίζεται με το μέτρο της σταθεράς του ελατηρίου k, διότι

$$\boxed{\lambda = \frac{x}{F} = \frac{1}{k}}$$

Η φυσική σημασία της κλίσης της χαρακτηριστικής του ελατηρίου είναι ότι εκφράζει το πόσο σκληρό ή μαλακό είναι ένα ελατήριο.

Συγκεκριμένα, **μεγάλη κλίση** λ σημαίνει **μαλακό** ελατήριο και αντίστροφα (γιατί;).

Όταν η δύναμη που ασκείται στο ελατήριο εξακολουθεί να αυξάνεται, διαπιστώνουμε ότι από κάποια τιμή δύναμης F_A και πάνω η επιμήκυνση παύει να είναι ανάλογη με τη δύναμη. Η χαρακτηριστική του ελατηρίου από ευθεία μετατρέπεται σε καμπύλη (τμήμα ΑΓ του διαγράμματος 2.17). Το χαρακτηριστικό αυτό ζεύγος τιμών (F_A, x_A) για κάθε ελατήριο ονομάζεται **όριο ελαστικότητας**. Μετά το όριο ελαστικότητας η επιμήκυνση ονομάζεται **πλαστική** και μπορεί να οδηγήσει σε **θραύση**.

Ας ασκήσουμε σε ένα ελατήριο με εμβαδόν διατομής A μια δύναμη F τέτοια, ώστε το ελατήριο να κοπεί. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι, για να κοπεί το σύρμα ενός άλλου ελατηρίου από το ίδιο υλικό αλλά με διπλάσια διατομή (2A), θα πρέπει να ασκήσουμε διπλάσια δύναμη (2F). Αυτό δείχνει ότι το εμβαδόν διατομής του σύρματος είναι χαρακτηριστική παράμετρος της θραύσης του.

Το σταθερό πηλίκο της δύναμης που ασκείται σε ένα ελαστικό υλικό, π.χ. σε ένα σύρμα, για να κοπεί, προς τη διατομή του λέγεται **όριο θραύσης** του υλικού. Μερικά παραδείγματα υλικών και τα αντίστοιχα όρια θραύσης αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα 2.1.

Πίνακας 2.1 Όριο θραύσης για γνωστά υλικά

Υλικό	**Όριο θραύσης (kp/cm^2)**
Καουτσούκ	200
Μόλυβδος	200
Χαλκός	3000
Χάλυβας	5000
Χάλυβας άριστης ποιότητας	25000

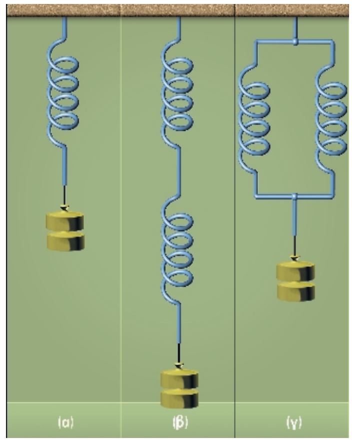
Ας ερευνήσουμε

Ένα ελατήριο* με την επίδραση μιας δύναμης 100p (δύο βάρη των 50p) επιμηκύνεται κατά x cm (εικόνα 2.18α). Βρείτε πόση είναι αυτή η επιμήκυνση; Πόσο θα επιμηκυνθεί το ελατήριο, αν η δύναμη των 100 p ασκηθεί:

α) στο τέλος ενός δεύτερου όμοιου ελατηρίου, που συνδέεται με το πρώτο όπως φαίνεται στην εικόνα 2.18β,

β) στο σύστημα ελατηρίων που φαίνεται στην εικόνα 2.18γ;

Σε ποια συμπεράσματα καταλήγετε;



Εικόνα 2.18
Σύστημα ελατηρίων

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω

1ο Παράδειγμα

Ο πίνακας που ακολουθεί δείχνει τις επιμηκύνσεις που παθαίνει ένα ελατήριο και τις αντίστοιχες δυνάμεις που τις προκάλεσαν:

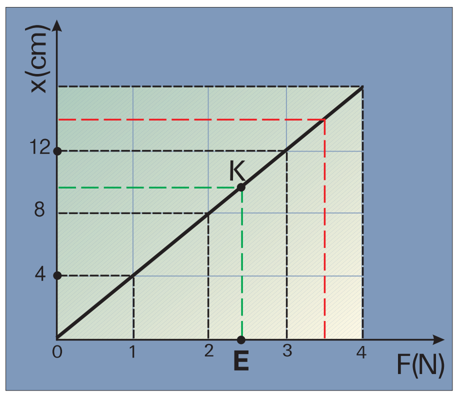
Δύναμη σε N	1	2	3	4
Επιμήκυνση σε cm	4	8	12	16

α. Να παρασταθεί γραφικά η δύναμη που ασκείται στο ελατήριο σε συνάρτηση με την επιμήκυνσή του.

β. Με τη βοήθεια του διαγράμματος που θα κατασκευάσουμε να βρεθεί:

- Η επιμήκυνση που προκαλεί στο ελατήριο δύναμη F=2,5N.
- Η δύναμη που προκάλεσε επιμήκυνση 14cm.

γ. Πόση είναι η σταθερά του ελατηρίου;



Εικόνα 2.19
Διάγραμμα επιμήκυνσης - δύναμης σε ελατήριο

Από τα δεδομένα του πίνακα κατασκευάζουμε το διάγραμμα F -x της εικόνας 2.19.

Με τη βοήθεια ενός βαθμολογημένου χάρακα χωρίζουμε τον οριζόντιο και τον κατακόρυφο άξονα σε ίσα μέρη, όπως φαίνεται στο διάγραμμα.

* Αντί ελατηρίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα κομμάτι λάστιχου.

Επιλέγουμε π.χ. ως κλίμακα 1,5 cm/ 1N για τον οριζόντιο άξονα Ox και 1cm/1cm για τον κατακόρυφο άξονα Oy.

Αν από το σημείο Ε (2,5N, 0cm) του διαγράμματος υψώσουμε κάθετη, αυτή θα συναντήσει τη χαρακτηριστική του ελατηρίου στο σημείο Κ. Από το σημείο Κ φέρουμε παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα μέχρι να συναντήσει τον Oy. Η τιμή 10 cm, που διαβάζουμε στον άξονα Oy, είναι η επιμήκυνση του ελατηρίου με την επίδραση της δύναμης των 2,5N.

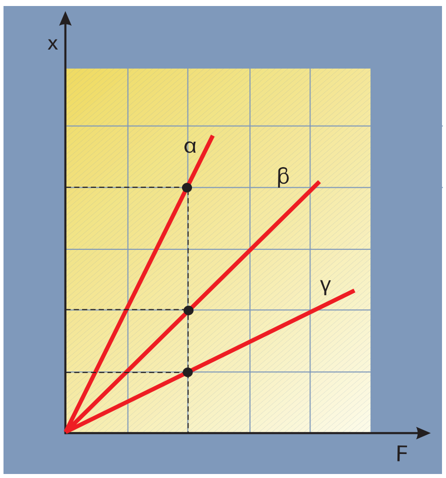
Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι η επιμήκυνση των 14 cm προκύπτει από δύναμη 3,5N.

Για να βρούμε τη σταθερά του ελατηρίου, επιλέγουμε ένα ζευγάρι τιμών από τον πίνακα, π.χ. 4N,16cm, και αντικαθιστούμε στον τύπο 2.1,

$F=k.\ x$ ή $k=0{,}25N/cm$.

2ο Παράδειγμα

Στο διπλανό διάγραμμα οι χαρακτηριστικές α,β,γ έχουν προκύψει από τρία διαφορετικά ελατήρια. Ποιο ελατήριο είναι το πιο σκληρό και ποιο το πιο μαλακό; Πώς θα το διαπιστώσουμε;



Για να χαρακτηρίσουμε ένα ελατήριο πιο μαλακό σε σχέση με ένα άλλο, αρκεί να διαπιστώσουμε πιο από τα δύο ελατήρια επιμηκύνεται περισσότερο με την επίδραση της ίδιας δύναμης. Το ελατήριο με τη μεγαλύτερη επιμήκυνση χαρακτηρίζεται ως μαλακό, ενώ το άλλο ως σκληρό. Εφαρμόζοντας τα παραπάνω διαπιστώνεται ότι η σειρά σκληρότητας των ελατηρίων είναι: γ,β,α. (Γιατί;)

2.6 Μέτρηση δυνάμεων με το δυναμόμετρο

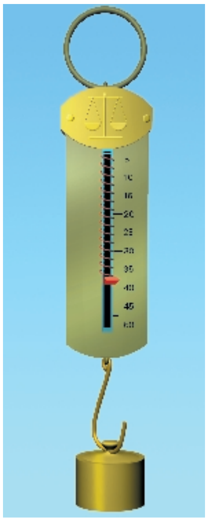
Ο νόμος του Hooke γρήγορα αξιοποιήθηκε στην καθημερινή πρακτική, διότι από τις ελαστικές παραμορφώσεις που προκαλούν οι δυνάμεις σε ένα στερεό ήταν εύκολο να οδηγηθούν οι επιστήμονες σε μετρήσεις των δυνάμεων αυτών με ειδικά όργανα, που ονομάζονται δυναμόμετρα.

Τα δυναμόμετρα αποτελούνται από ελατήρια ή από ελάσματα, συνήθως από χάλυβα, τα οποία υφίστανται ελαστικές παραμορφώσεις από την επίδραση δυνάμεων.

Το συνηθισμένο δυναμόμετρο (κανταράκι) αποτελείται από ένα σπειροειδές ελατήριο, που μπορεί να επιμηκύνεται (εικόνα 2.20). Για σχετικά μεγάλες δυνάμεις χρησιμοποιούνται δυναμόμετρα με ελάσματα.

Η δύναμη που ασκείται προκαλεί επιμήκυνση στο ελατήριο ή κάμψη στο έλασμα.

Τα δυναμόμετρα είναι εφοδιασμένα με μια κλίμακα χαρακτηριστική για το καθένα. Σε όλα τα δυναμόμετρα η παραμόρφωση συνοδεύεται με τη μετακίνηση ενός δείκτη πάνω στην κλίμακα, η οποία είναι βαθμονομημένη ανάλογα με την ευαισθησία ή με την αντοχή του ελατηρίου ή του ελάσματος. Τα δυναμόμετρα είναι εύχρηστα όργανα μέτρησης δυνάμεων, αλλά δεν έχουν μεγάλη ακρίβεια.



Εικόνα 2.20
Το δυναμόμετρο

2.7 Σφάλματα μετρήσεων

Κατά τη μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους, π.χ. της δύναμης, τα αποτελέσματα, ακόμη και διαδοχικών μετρήσεων κάτω από τις ίδιες συνθήκες, διαφέρουν μεταξύ τους πάντοτε, έστω και ελάχιστα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ακρίβεια με την οποία μπορούμε να μετρήσουμε ένα μέγεθος εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Με τον όρο **ακρίβεια** εννοούμε την απόκλιση της τιμής που προέκυψε από τη μέτρηση, από την "πραγματική" τιμή του μεγέθους που μετράμε.

Βέβαια, κανείς δε γνωρίζει την πραγματική τιμή ενός μεγέθους, επειδή η μέτρηση είναι διαδικασία που έχει σχέση με τον παρατηρητή, με το όργανο και με τη μέθοδο μέτρησης που χρησιμοποιείται αλλά και με άλλους εξωτερικούς παράγοντες. Αυτό που επιδιώκεται σε κάθε μέτρηση είναι η εύρεση μιας τιμής, η οποία να είναι όσο το δυνατόν απαλλαγμένη από σφάλματα, ώστε να προσεγγίζει την άγνωστη τιμή του μεγέθους που μετριέται.

Η διαφορά μεταξύ της πραγματικής τιμής και του αποτελέσματος μιας μέτρησης ονομάζεται **σφάλμα της μέτρησης**. Η σημασία της λέξης "σφάλμα" δεν ταυτίζεται με αυτήν του "λάθους", απλώς δηλώνει ότι δεν υπάρχει απόλυτη βεβαιότητα για την ακρίβεια του αποτελέσματος της μέτρησης.

Τα σφάλματα ανάλογα με την προέλευσή τους τα διακρίνουμε σε **τυχαία σφάλματα και σε μόνιμα ή συστηματικά σφάλματα**.

Τα **τυχαία σφάλματα** οφείλονται συνήθως σε τρεις παράγοντες:

- στον παρατηρητή, ο οποίος κατά τη στιγμή της μέτρησης λόγω έλλειψης συγκέντρωσης, ψυχολογικής κατάστασής ή ακατάλληλης θέσης κ.τ.λ. εκτελεί εσφαλμένους χειρισμούς
- στην ευαισθησία του οργάνου μέτρησης,
- σε άλλους εξωτερικούς παράγοντες, π.χ θερμοκρασία, υγρασία κτλ.

Τα **μόνιμα ή συστηματικά σφάλματα** εμφανίζονται πάντα κατά τη διαδικασία μέτρησης. Επηρεάζουν όμως το αποτέλεσμα των μετρήσεων κατά τον ίδιο τρόπο με τον οποίο το επηρεάζει και η απόκλιση του οργάνου.

Για παράδειγμα, αν σε μια ζυγαριά η αρχική ένδειξη δεν είναι μηδέν, τότε όλες οι μετρήσεις θα απέχουν της πραγματικής τιμής. Ένας επίσης εξωτερικός παράγοντας, π.χ. η υγρασία ή η ανεπιθύμητη παρουσία ενός μαγνήτη, μπορεί να προκαλέσει συστηματικό σφάλμα.

Για να περιοριστούν όλες οι πιθανότητες συστηματικού σφάλματος, θα πρέπει να δίνεται προσοχή στην επιλογή του οργάνου, στην ορθή χρήση του και στις συνθήκες που επικρατούν στον περιβάλλοντα χώρο.

Προκειμένου να περιορίσουμε τις πιθανότητες εμφάνισης ενός τυχαίου σφάλματος, καταφεύγουμε στην επανάληψη των μετρήσεων και στη συνέχεια υπολογίζουμε τη μέση τιμή του μεγέθους από τη σχέση:

$$\overline{M} = \frac{M_1+M_2+M_3+......+M_N}{N} \qquad 2.I$$

όπου M_1, M_2, M_3,. .., M_N είναι οι διαδοχικές μετρήσεις του μεγέθους, και N το πλήθος τους.

Από το αποτέλεσμα, λοιπόν, μιας σειράς μετρήσεων υπολογίζεται η μέση τιμή, η οποία προσεγγίζει την πραγματική τιμή του μεγέθους, την οποία φυσικά δε γνωρίζουμε. Για το λόγο αυτό η μέση τιμή $\overline{M}$ ονομάζεται και **πιθανότερη τιμή** του μεγέθους. Για να προσεγγίσουμε περισσότερο την πραγματική τιμή, χρειάζεται το απόλυτο σφάλμα (δΜ) της μέσης τιμής.

Το **απόλυτο σφάλμα δΜ της μέσης τιμής** Ν διαδοχικών μετρήσεων υπολογίζεται με τη βοήθεια κατάλληλης μαθηματικής σχέσης, η οποία προκύπτει, αφού πρώτα βρεθούν οι διαφορές (αποκλίσεις) των M_1, M_2,. .. από τη μέση τιμή:

$$\delta M = \pm\sqrt{\frac{(M_1-\overline{M})^2 + (M_2 - \overline{M})^2 + ... + (M_N -\overline{M})^2}{N\,(N - 1)}} \qquad 2.II$$

Συνεπώς η άγνωστη (πραγματική) τιμή Χ* του μετρούμενου μεγέθους θα βρίσκεται στην περιοχή:

$$\overline{M} \pm \delta M \qquad 2.III$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί το εξής: τόσο η μέση τιμή όσο και το σφάλμα μέτρησης πρέπει:

1ο Να έχουν το ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

2ο Να συνοδεύονται από ίδιες μονάδες μέτρησης.

Ας δούμε ένα παράδειγμα

Οι N=10 διαδοχικές μετρήσεις της μάζας m (g) μιας βίδας είναι οι εξής:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	9,5	9,7	9,1	10,1	10,3	9,4	9,6	9,5	10,0	9,9

Θέλουμε να προσεγγίσουμε την πραγματική τιμή της μάζας της βίδας. Εργαζόμαστε ως εξής:

◆ Βρίσκουμε τη μέση τιμή των μετρήσεων με τη βοήθεια της σχέσης 2.Ι:

$$\overline{M} = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_N}{N}$$ ή

$$\overline{M} = \frac{9{,}5+9{,}7+9{,}1+10{,}1+10{,}3+9{,}4+9{,}6+9{,}5+10{,}0+9{,}9}{10} = \frac{97{,}1}{10} = 9{,}7\ g\ .$$

◆ Βρίσκουμε το απόλυτο σφάλμα (δΜ) από τη σχέση 2.ΙΙ:

Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση 2.ΙΙΙ η ζητούμενη τιμή της μάζας της

$$\delta M = \pm\sqrt{\frac{(M_1-\overline{M})^2 + (M_2-\overline{M})^2 + \dots + (M_N-\overline{M})^2}{N(N-1)}}$$

$$\delta M = \pm\sqrt{\frac{(9{,}5-9{,}7)^2 + (9{,}7-9{,}7)^2 + (9{,}1-9{,}7)^2 + \dots + (9{,}9-9{,}7)^2}{10(10-1)}} = \pm\, 0{,}1\ g \quad .$$

βίδας θα είναι μεταξύ (9,7-0,1)g και (9,7+0,1)g, δηλαδή στην περιοχή [9,6-9,8]g. Επίσημα λέμε ότι η ζητούμενη τιμή βρίσκεται κατά μεγάλη πιθανότητα στην περιοχή: (9,7± 0,1) g.

Συχνά είναι πρακτικό να φτιάχνουμε και να συμπληρώνουμε τον εξής πίνακα:

N	m(g)	$\overline{M}$ - m (g)	($\overline{M}$ - m)^2 (g^2)
1	**9,5**	9,7-9,5 = **0,2**	0,04
2	**9,7**	9,7-9,7 = **0,0**	0,00
3	**9,1**	9,7-9,1 = **0,6**	0,36
4	**10,1**	9,7-10,1 = **-0,4**	0,16
5	**10,3**	9,7-10,3 = **-0,6**	0,36
6	**9,4**	9,7-9,4 = **0,3**	0,09
7	**9,6**	9,7-9,6 = **0,1**	0,01
8	**9,5**	9,7-9,5 = **0,2**	0,04
9	**10,0**	9,7-10,0 = **-0,3**	0,09
10	**9,9**	9,7-9,9 = **-0,2**	0,04

Αθροίσματα	**97,1 g**		**1,19 g**
Μέση τιμή	**9,7 g**		
Σφάλμα			**± 0,1 g**
Ζητούμενη τιμή		**9,7 ± 0,1**	

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.1 Ποια παραμόρφωση χαρακτηρίζεται ως ελαστική και ποια ως πλαστική;

2.2 Ένα ελατήριο με την επίδραση δυνάμεως F επιμηκύνεται κατά διάστημα x. Αν στο ελατήριο ασκηθεί διπλάσια δύναμη, πόση θα γίνει η επιμήκυνσή του;

2.3 Να χαρακτηρίσετε με Σ τις παρακάτω προτάσεις, αν είναι σωστές, και με Λ, αν είναι λανθασμένες, και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

α. Η συσπείρωση ενός ελατηρίου από χάλυβα είναι ελαστική.

β. Η επιμήκυνση μιας μολύβδινης ράβδου είναι πλαστική.

γ. Μια χάλκινη ράβδος είναι πιο ελαστική από μια ράβδο των ίδιων διαστάσεων από καουτσούκ.

2.4 Το σύρμα ενός ελατηρίου από χάλυβα έχει διπλάσια διάμετρο από το σύρμα ενός άλλου ελατηρίου του ίδιου υλικού και με το ίδιο μήκος. Τότε:

α. Το πρώτο είναι πιο σκληρό από το δεύτερο.

β. Έχουν τη ίδια σκληρότητα.

2.5 Πώς θα χαρακτηρίζατε ένα ελατήριο που η χαρακτηριστική του έχει μικρή κλίση;

α. Σκληρό.

β. Μαλακό.

2.6 Να αναφέρετε και να σχολιάσετε δύο παραδείγματα από την καθημερινή εμπειρία σας:

α. Ελαστικών παραμορφώσεων.

β. Πλαστικών παραμορφώσεων.

2.7 Συμπληρώστε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α. Εάν ένα υλικό υπακούει στο νόμο του Hooke, οι........................... του είναι ανάλογες με.. που......................................

β. Ένα σύρμα, το οποίο υπακούει στο νόμο του Hooke, παραμορφώνεται μόνιμα, όταν μια δύναμη που ασκείται σ’ αυτό ξεπεράσει το................. .... και θραύεται, όταν μια δύναμη ξεπεράσει το ....

γ. Η σταθερά k ενός ελατηρίου είναι 0,1 N/mm. Αυτό σημαίνει ότι ....

2.8 Δύο ελατήρια έχουν σταθερές k_1 = 20N/m και k_2 = 2N/cm. Ποιο από τα δύο είναι το πιο σκληρό;

2.9 Ένα ελατήριο έχει μήκος 10 cm. Με την επίδραση μιας δύναμης 10N το μήκος του γίνεται 12,5 cm. Ποια δύναμη θα χρειαστεί, για να αποκτήσει το ελατήριο μήκος 13,5 cm;

2.10 Ένα ελατήριο επιμηκύνεται με την επίδραση μιας δύναμης. Εάν η επιμήκυνση είναι 50mm και η σταθερά του ελατηρίου είναι 100 N/m, πόση είναι η δύναμη που προκάλεσε την επιμήκυνση αυτή; Τι θα συμβεί στο ελατήριο, αν ασκηθεί σ' αυτό δύναμη 10N;

2.11 Σε ένα ελατήριο ασκείται μια δύναμη 8N, οπότε το ελατήριο επιμηκύνεται από το αρχικό μήκος του των 18cm σε τελικό μήκος 20,4cm.

α. Να βρείτε τη σταθερά του ελατηρίου.
β. Να σχεδιάσετε τη χαρακτηριστική του ελατηρίου.
γ. Να βρείτε από το διάγραμμα την επιμήκυνση του ελατηρίου, όταν σε αυτό ασκείται δύναμη 10N.
δ. Πόση δύναμη απαιτείται, για να επιμηκυνθεί το ελατήριο μέχρι τα 25 cm.

2.12 Στον παρακάτω πίνακα γράφτηκαν τα αποτελέσματα ενός πειράματος.

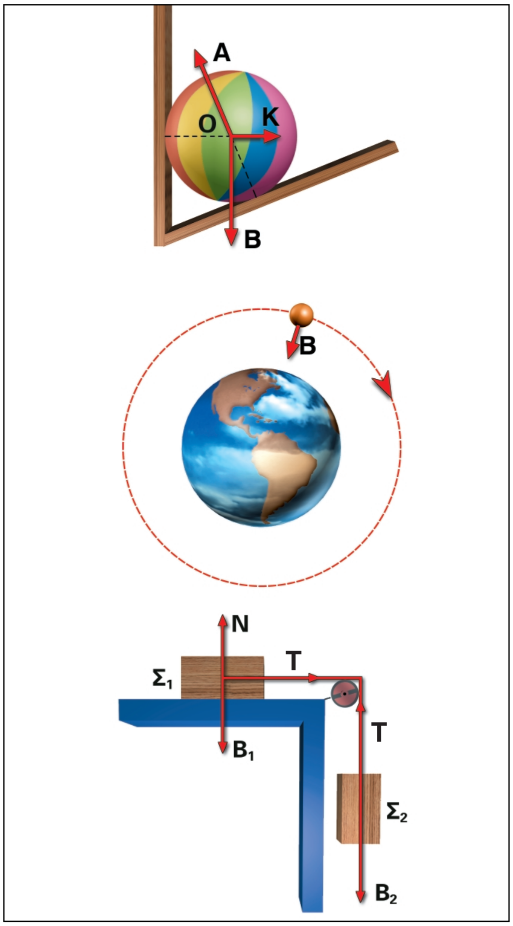
Δύναμη (N)	0	1	2	3	4	5	6
Μήκος του ελατηρίου (cm)	40	49	58	67	76	88	110
Επιμήκυνση του ελατηρίου (cm)							

α. Να συμπληρωθεί ο πίνακας.
β. Να γίνει το διάγραμμα επιμήκυνσης-δύναμης.
γ. Ποιο φαίνεται να είναι το όριο ελαστικότητας του ελατηρίου;
δ. Τι θα συμβεί στο ελατήριο, αν ασκηθεί σε αυτό δύναμη μεγαλύτερη του ορίου ελαστικότητάς του;

2.8 Σύνθεση δυνάμεων

Από πολλές περιπτώσεις της καθημερινής ζωής διαπιστώνουμε ότι τα διάφορα σώματα δέχονται μία ή περισσότερες δυνάμεις, είτε διότι έρχονται σε επαφή με άλλα σώματα είτε διότι βρίσκονται μέσα σε πεδία και επομένως δέχονται δυνάμεις από απόσταση.

Ας παρατηρήσουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:



Μια μπάλα έχει σφηνώσει ανάμεσα σε δύο λεία δοκάρια. Στην μπάλα ασκούνται:
- α. το βάρος Β από τη Γη,
- β. η δύναμη Κ από το ένα δοκάρι, και
- γ. η δύναμη Α από το άλλο δοκάρι.

Στο δορυφόρο, που κινείται γύρω από τη Γη, ασκείται μόνο το βάρος Β. Δεν ασκείται καμία άλλη δύναμη, επειδή αυτός δεν έρχεται σε επαφή με κανένα άλλο σώμα.

Στο σώμα $Σ_1$ ασκούνται το βάρος του B_1, η δύναμη Ν από το οριζόντιο επίπεδο και η τάση Τ από το σκοινί.

Στο σώμα $Σ_2$ ασκούνται το βάρος B_2 και η δύναμη Τ από το σκοινί.

Σε πολλές περιπτώσεις μελέτης της κίνησης ή της ισορροπίας ενός σώματος απαιτείται η αντικατάσταση των δυνάμεων που δέχεται το σώμα από **μία δύναμη,** που μπορεί να προκαλέσει τα ίδια αποτελέσματα με εκείνα που θα προκαλούσαν όλες οι άλλες δυνάμεις μαζί. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **σύνθεση δυνάμεων** και έχει πολλές πρακτικές εφαρμογές.

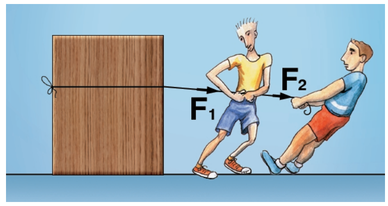
Ας προσέξουμε

- Τις τάσεις που ασκεί ένα σκοινί σε δύο σώματα, τα οποία είναι δεμένα στις άκρες του, θα τις θεωρούμε ίσες.

Ας προβληματιστούμε

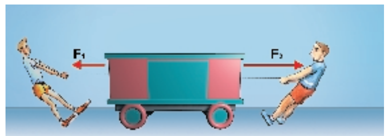
Τι θα συμβεί σε ένα σώμα, π.χ.

- στο κιβώτιο που σέρνουν τα δύο παιδιά, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.21;



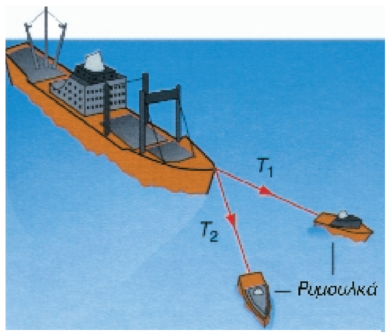
Εικόνα 2.21
Μετακίνηση κιβωτίου

- στο παιχνίδι που το διεκδικούν δύο φίλοι, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.22;



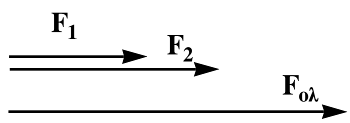
Εικόνα 2.22
Ποιο παιδί θα κερδίσει;

- στο πλοίο που πάει για ρυμούλκηση με τη βοήθεια των δύο ρυμουλκών, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.23;

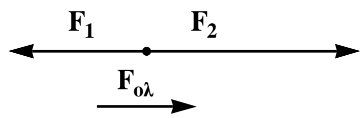


Εικόνα 2.23
Ρυμούλκηση πλοίου

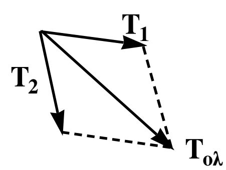
Το κιβώτιο με την επίδραση των δύο δυνάμεων F_1 και F_2, που ασκούν τα δύο παιδιά, κινείται προς την κατεύθυνση των δύο δυνάμεων. Το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε, αν αντί των παιδιών ένας άνδρας ασκούσε μια δύναμη F ίση με το άθροισμα των δύο δυνάμεων $F_1 + F_2$.



Το παιχνίδι που διεκδικούν τα δύο παιδιά με την επίδραση των δυνάμεων F_1 και F_2 θα το κερδίσει εκείνο το παιδί που ασκεί τη μεγαλύτερη δύναμη F_2.



Όσο για το πλοίο που ρυμουλκείται θα κινηθεί προς μια κατεύθυνση, η οποία θα βρίσκεται ανάμεσα στις κατευθύνσεις των δυνάμεων T_1 και T_2, που ασκούν τα δύο ρυμουλκά.



Το αποτέλεσμα της σύνθεσης δύο ή περισσότερων δυνάμεων ονομάζεται **συνισταμένη των δυνάμεων**. Οι δυνάμεις που αντικαθίστανται από τη συνισταμένη ονομάζονται **συνιστώσες**.

Αν προσεγγίσουμε το θέμα με απλά Μαθηματικά, θα λέγαμε ότι η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος και ισχύουν όσα αναφέραμε για τα διανυσματικά μεγέθη στην εισαγωγή.

Στο πρώτο παράδειγμα οι δυνάμεις F_1 και F_2 είναι συγγραμμικές και ομόρροπες και προστίθενται αριθμητικά. Επομένως, η συνισταμένη τους Fολ θα έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με τις δυνάμεις F_1 και F_2, και το μέτρο της θα προκύπτει από τη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{F_{ολ} = F_1 + F_2}} \qquad (2.2)$$

Στην περίπτωση που οι δυνάμεις είναι περισσότερες από δύο αλλά όλες συγγραμμικές και ομόρροπες ισχύει:

$$\boxed{\mathbf{F_{ολ} = F_1 + F_2 + F_3 + ...}} \qquad (2.3)$$

Στο δεύτερο παράδειγμα, όπου οι δυνάμεις F_1 και F_2 είναι συγγραμμικές και αντίρροπες και η δύναμη F_2 είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη F_1, η συνισταμένη τους έχει την ίδια διεύθυνση με τις συνιστώσες και φορά τη φορά της μεγαλύτερης δύναμης F_2. Το μέτρο της συνισταμένης προκύπτει από τη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{F_{ολ} = F_2 - F_1}} \qquad (2.4)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, όταν δύο αντίρροπες δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα, η συνισταμένη τους είναι μηδέν.

Στην περίπτωση που οι δυνάμεις είναι περισσότερες από δύο αθροΐζονται οι ομόρροπες και οι αντίρροπες χωριστά, και τέλος βρίσκεται η διαφορά τους, η οποία είναι και η τελική συνισταμένη της σύνθεσης των δυνάμεων:

$$\boxed{\mathbf{F_{ολ} = (F_1 + F_2 + F_3 + ...) - (F_1' + F_2' + F_3' + . ..)}} \qquad (2.5)$$

Τα πράγματα όμως δεν είναι τόσο απλά για την εύρεση της συνισταμένης δυνάμεων που δεν είναι συγγραμμικές, όπως στο παραπάνω παράδειγμα της ρυμούλκησης του πλοίου. Για το λόγο αυτό ας προσπαθήσουμε να κάνουμε το παρακάτω πείραμα:

Ας ερευνήσουμε

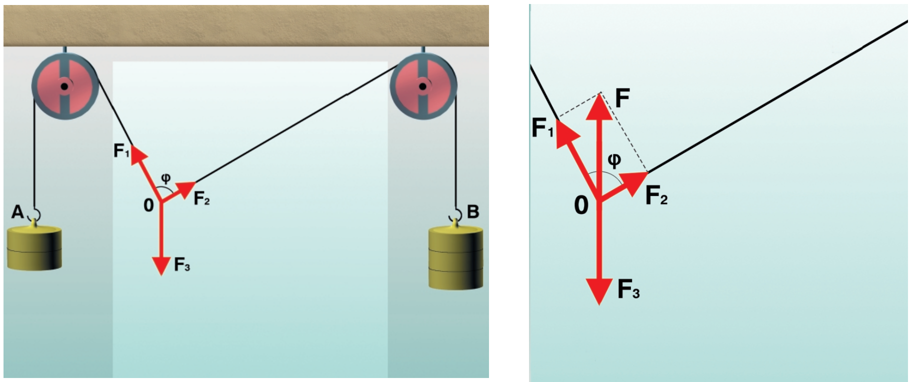
Φτιάχνουμε τη διάταξη του σχήματος 2.24.

Στην άκρη Α του νήματος τοποθετούμε δύο βάρη των 50p το καθένα. Στην άλλη άκρη Β του νήματος κρεμάμε τρία βάρη των 50p. Τι παρατηρούμε;

Στη συνέχεια προσθέτουμε τόσα βάρη των 50p στο σημείο Ο του νήματος, ώστε να μην κινείται τίποτα. Τι παρατηρούμε; Πώς το ερμηνεύουμε;

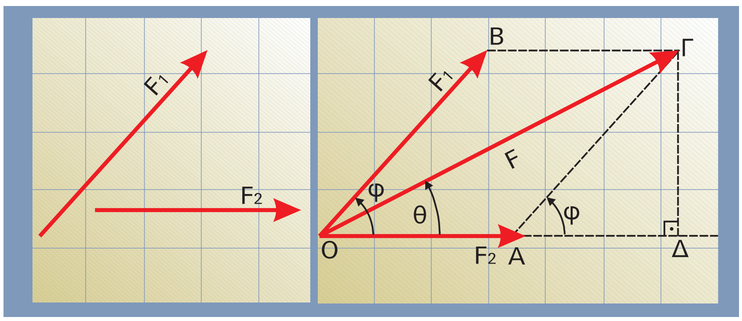
Μετράμε τη γωνία φ, που σχηματίζουν τα δύο νήματα.

Μεταβάλλουμε τη γωνία των δύο νημάτων και βρίσκουμε με πόσα βάρη μπορούμε να πετύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Σε ποια συμπεράσματα καταλήγουμε;



Εικόνα 2.24
Πείραμα με νήμα και με βάρη.

Στην περίπτωση που οι διευθύνσεις των δυνάμεων σχηματίζουν γωνία φ, τότε η συνισταμένη έχει τη διεύθυνση και τη φορά της διαγωνίου του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τις δύο συνιστώσες.



Εικόνα 2.25
Δυνάμεις που σχηματίζουν γωνία

Το μέτρο της συνισταμένης δίνεται από τη σχέση

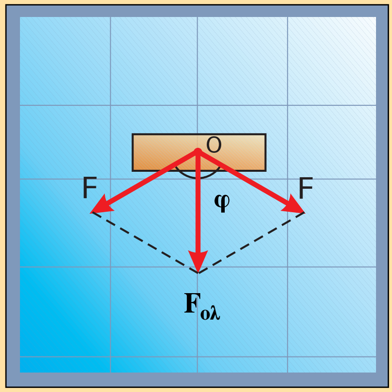
$$\boxed{F_{ολ} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2\, συνφ}} \qquad (2.6)$$

και η κατεύθυνσή της από την εφαπτομένης της γωνίας θ, που σχηματίζει η συνισταμένη δύναμη με τη μία συνιστώσα, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.25.

$$\boxed{\mathbf{εφθ} = \frac{\mathbf{F_1\, ημφ}}{\mathbf{F_2 + F_1\, συνφ}}} \qquad (2.7)$$

(Η απόδειξη της σχέσης 2.7 είναι προαιρετική).

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω



Παράδειγμα

Σε ένα σώμα ασκούνται δύο ίσες κατά μέτρο δυνάμεις, που σχηματίζουν γωνία $φ=120^0$. Πόση είναι η συνισταμένη των δύο δυνάμεων;

Για να βρούμε το μέτρο της συνισταμένης των δύο δυνάμεων, θα εφαρμόσουμε τη σχέση 2.6:

$F_{ολ}^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1\,F_2\,συνφ$ ή

$F_{ολ}^2 = F^2 + F^2 + 2\,F\,Fσυν120^o$ ή

$F_{ολ}^2 = F^2 + F^2 + 2\,F^2συν120^o$ ή

$F_{ολ}^2 = 2F^2 + 2\,F^2συν120^o$ ή

$F_{ολ}^2 = 2F^2\,(1 + συν120^o)$ ή

$F_{ολ}^2 = 2F^2\,(1- \frac{1}{2})$ και τελικά $\mathbf{F_{ολ} = F}$.

Η διεύθυνση και η φορά της συνισταμένης προκύπτει από τη σχέση 2.7:

$$εφθ = \frac{F_1\,ημφ}{F_2 + F_1\,συνφ} \quad ή \qquad εφθ = \frac{F\,ημφ}{F + F\,συνφ} \quad ή$$

$$εφθ = \frac{F\,ημ120^o}{F + F\,συν120^o} \quad ή$$

ή (επειδή $ημ120^o=ημ60^o$ και $συν120^o= - συν60^o$)

$$εφθ = \frac{F\,ημ60^o}{F - F\,συν60^o} \quad \text{και τελικά}$$

$$εφθ = \frac{Fημ60^0}{F(1 - συν60^0)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\,, \qquad άρα\ \widehat{θ} = \mathbf{60^0}\,.$$

Ο τρόπος αυτός επίλυσης της άσκησης αφορά την εύρεση της συνισταμένης δύο δυνάμεων που σχηματίζουν γωνία. Για τη συγκεκριμένη όμως άσκηση υπάρχει και άλλος απλούστερος τρόπος, ο οποίος απαιτεί απλές γνώσεις Γεωμετρίας. Ας συζητηθεί!

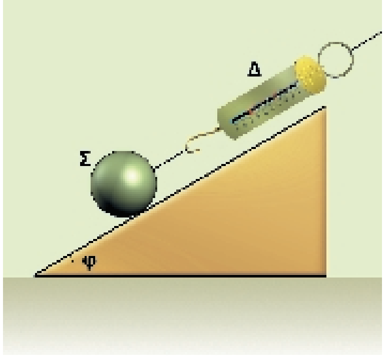
Ας ερευνήσουμε

Εφαρμόζουμε τα παραπάνω για γωνίες: 30^{o}, 45^{o} και 90^{o}.
Σε ποια συμπεράσματα καταλήγουμε;

2.9 Ανάλυση δύναμης σε συνιστώσες

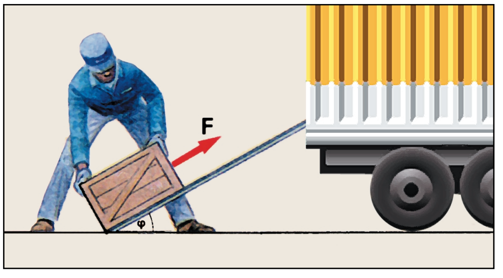
Ας προβληματιστούμε:

• Ζυγίζουμε μια σφαίρα με ένα δυναμόμετρο. Στη συνέχεια βάζουμε τη σφαίρα να ισορροπήσει πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.26. Είναι οι ενδείξεις των δύο περιπτώσεων ίσες; Αν όχι, πώς το εξηγούμε;



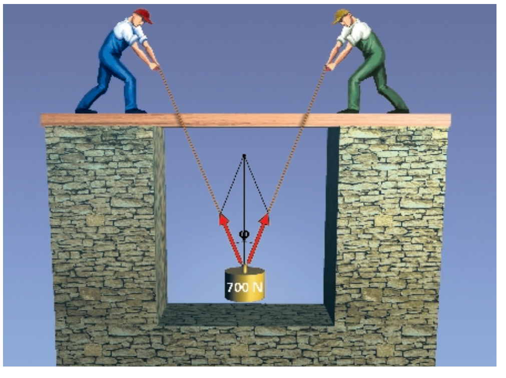
Εικόνα 2.26
Ισορροπία σφαίρας σε κεκλιμένο επίπεδο

• Ένα κιβώτιο βάρους 1000N φορτώνεται από το δρόμο σε ένα φορτηγό με τη βοήθεια μιας λείας σανίδας, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.27. Ένας εργάτης σπρώχνει το κιβώτιο. Η δύναμη του εργάτη είναι μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη από τα 1000N;



Εικόνα 2.27
Κιβώτιο φορτώνεται σε φορτηγό.

• Ένα σώμα πρέπει να ανυψωθεί με σχοινί, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.28, και η δύναμη που απαιτείται γι’ αυτό είναι 700N. Επειδή όμως ένας άνθρωπος δεν είναι ικανός να το σηκώσει, η ανύψωση γίνεται από δύο ανθρώπους με δύο σχοινιά, που σχηματίζουν γωνία φ μεταξύ τους. Πόση δύναμη πρέπει να ασκηθεί από τον καθένα;



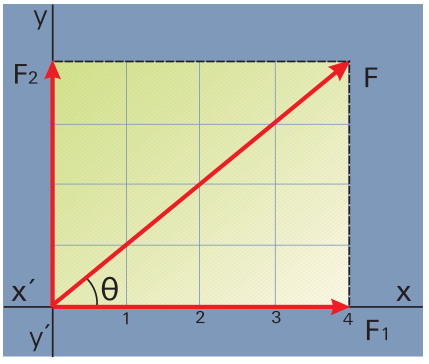
Εικόνα 2.28
Ανύψωση σώματος

Και στις τρεις περιπτώσεις η Φυσική δίνει απαντήσεις με τη βοήθεια της **ανάλυσης δύναμης σε δύο συνιστώσες.**

Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι η ανάλυση δύναμης σε δύο κάθετες συνιστώσες. Για το λόγο αυτό:

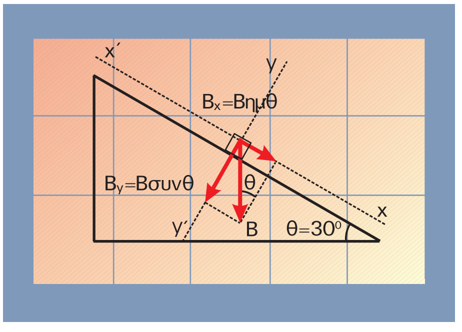
1ο Επιλέγονται δύο άξονες κάθετοι μεταξύ τους και με προσανατολισμό ανάλογα με τις απαιτήσεις του προβλήματος. Συνήθως τον άξονα πάνω στον οποίο ισορροπεί ή κινείται το σώμα τον ονομάζουμε xx′, και τον άξονα που είναι κάθετος στον xx′ τον ονομάζουμε yy′.

2ο Βρίσκουμε τις προβολές της δύναμης F πάνω στους άξονες xx′ και yy′. Οι υπολογισμοί των μέτρων των δύο δυνάμεων F_1 και F_2 είναι εύκολοι σ' αυτή την περίπτωση: F_1=Fσυνθ , F_2 = Fημθ.



Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω

Ένα σώμα βρίσκεται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.29. Το βάρος του σώματος είναι 100N. Αναλύουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες, ώστε η μία να είναι κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο και η άλλη να έχει τη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου. Επιλέγουμε τον άξονα xx′ παράλληλο με το κεκλιμένο επίπεδο και τον yy′ κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο. Σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαγώνιο το βάρος B του σώματος και πλευρές τις B_x και B_y, που είναι οι προβολές του B στους άξονες xx′ και yy′.



Εικόνα 2.29
Ισορροπία σώματος σε κεκλιμένο επίπεδο

Οι πλευρές B_x και B_y είναι οι συνιστώσες του βάρους B, και τα μέτρα τους βρίσκονται από τις σχέσεις:

$B_x = B$ ημθ ή $B_x = B$ ημ30^0 ή $B_x = 100 \cdot \frac{1}{2}$ ή B_x=50N

$B_y = B$ συνθ ή $B_y =$ Bσυν30^0 ή $B_y = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ ή B_y = 86,6N.

Το βάρος, λοιπόν, του σώματος αναλύθηκε σε δύο συνιστώσες, από τις οποίες η μία, B_x=50N, είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και η άλλη, B_y=86,6N, κάθετη σ' αυτό.

Ας επεκτείνουμε

Όταν οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα είναι περισσότερες από δύο, π.χ. F_1, F_2 και F_3, και θέλουμε να βρούμε τη συνισταμένη τους, αναλύουμε την κάθε δύναμη πάνω στους άξονες και συνθέτουμε τις συνιστώσες τους. Το αλγεβρικό άθροισμα των συνιστωσών $F_{1χ}$, $F_{2χ}$, $F_{3χ}$ πάνω στον άξονα xx′ και των συνιστωσών F_{1y}, F_{2y} και F_{3y} πάνω στον άξονα των yy′ είναι αντίστοιχα:

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma F_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \\ \Sigma F_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \end{aligned}} \qquad (2.10)$$

Αν συνθέσουμε τα διανύσματα $\Sigma\vec{F}_x$ και $\Sigma\,\vec{F}_y$, θα βρούμε τη συνισταμένη $F_{ολ}$ (ή ΣF) των δυνάμεων F_1, F_2 και F_3:

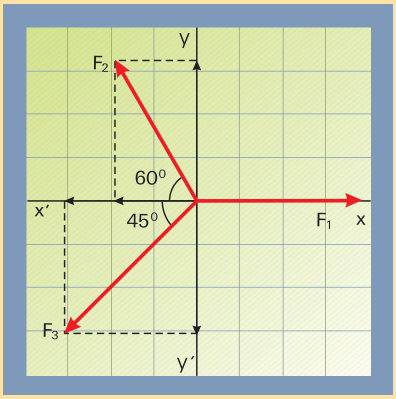
$$\boxed{F_{ολ}^2 = \Sigma F_x^2 + \Sigma F_y^2} \qquad (2.11)$$

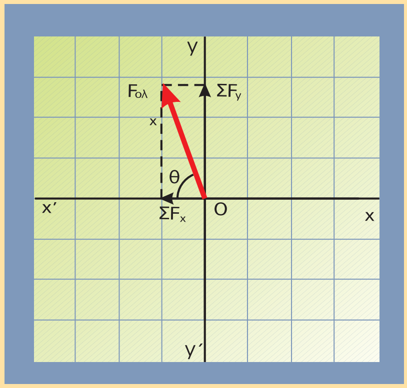
Η οξεία γωνία θ, που σχηματίζει η συνισταμένη με τον άξονα των xx′, δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{εφθ = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}} \qquad (2.12)$$

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω

Στον πάσσαλο ενός χωραφιού είναι δεμένα τρία σχοινιά, που τα τραβούν τρία άλογα με δυνάμεις F_1 =100N, F_2 =100N, F_3=75N, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.30. Να βρεθεί η συνισταμένη των τριών δυνάμεων.





Εικόνα 2.30
Συνισταμένη τριών δυνάμεων.

Αναλύουμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες πάνω στους άξονες xx′ και yy′.

Η δύναμη F_1: $F_{1x} = F_1 = 100N$
$F_{1y} = 0$

Η δύναμη F_2: $F_{2x} = - F_2$ συν60^o $= -100\ 0{,}5 = -50N$
$F_{2y} = F_2$ ημ60^o $= 100\ 0{,}866 = 86{,}6N$

Η δύναμη F_3: $F_{3x} = F_3$ συν45^o $= -75\ 0{,}707 = -53{,}02N$
$F_{3y} = F_3$ ημ45^o $= -75\ 0{,}707 = -53{,}02N$.

΄Ετσι, η $\mathbf{\Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 100N - 50N - 53{,}02N = - 3{,}02N}$
και η $\mathbf{\Sigma F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 86{,}6\ N - 53{,}02\ N = 33{,}58\ N.}$

Η συνισταμένη θα έχει μέτρο:
$F_{ολ}^2 = (\Sigma F_\chi)^2 + (\Sigma\ F_y)^2 = (-3{,}02N)^2 + (33{,}58N)^2$ ή $F^2_{ολ} = 1136{,}74\ N^2$

και τελικά $\mathbf{F_{ολ} = 33{,}72N.}$

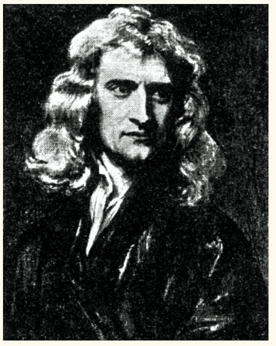
Η γωνία θ, που σχηματίζει η συνισταμένη με τον ημιάξονα των ox′, είναι:

$$εφθ = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} \quad ή \quad εφθ = \frac{33{,}58}{3{,}02} = 11{,}12$$

Από πίνακες των Μαθηματικών προκύπτει ότι η γωνία της οποίας η εφαπτομένη ισούται με 11,12 είναι η γωνία $\widehat{\theta} = 85^o$.

2.10 Δράση - Αντίδραση - 3ος νόμος του Νεύτωνα

Οι περισσότερες μελέτες που αφορούν τις διαδικασίες διερεύνησης των φυσικών φαινομένων στον τομέα της Μηχανικής, και κυρίως η ισορροπία και η κίνηση των σωμάτων, βασίζονται σε τρία αξιώματα/νόμους, που διατύπωσε ο Νεύτωνας στο βιβλίο του με τίτλο “Οι μαθηματικές αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας (Philosophical Naturalis Principia Mathematica).



ΝΕΥΤΩΝ (1643-1727)
Άγγλος μαθηματικός, φυσικός και φιλόσοφος, καθηγητής του Πανεπιστημίου Cambridge. Εισήγαγε στη Φυσική τον «απειροστικό λογισμό» και θεμελίωσε την κλασική και ουράνια Μηχανική.

Ο 3ος νόμος του Νεύτωνα, ή αλλιώς το τρίτο αξίωμα του Νεύτωνα, βοηθά στο να κατανοήσει κανείς την έννοια “δύναμη”, γι’ αυτό και τον εξετάζουμε πριν από τους άλλους δύο νόμους. Ο 3ος νόμος βοηθά στο να διαπιστώσουμε ότι μεταξύ δύο σωμάτων που αλληλεπιδρούν το ένα σώμα ασκεί τόση δύναμη στο άλλο σώμα όση δύναμη δέχεται από αυτό. Οι δύο αυτές δυνάμεις έχουν ίσο μέτρο αλλά αντίθετη κατεύθυνση. Εκείνο το οποίο δεν πρέπει να μας διαφεύγει είναι ότι: **οι δύο αυτές δυνάμεις ασκούνται σε διαφορετικά σώματα**.

Με άλλα λόγια, οι δυνάμεις στη φύση παρουσιάζονται κατά ζεύγη, τα οποία συνηθίζεται να αποκαλούνται ως ζεύγη **δράσης-αντίδρασης**.

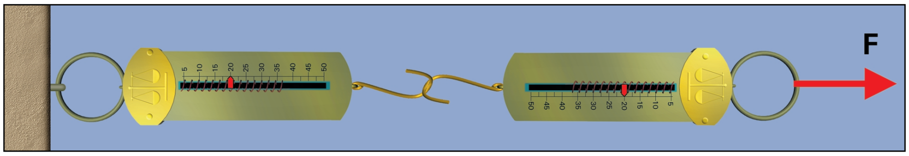
Στην εικόνα 2.31 φαίνονται τα αποτελέσματα της δράσης και της αντίδρασης μεταξύ του στύλου και του αυτοκινήτου, όταν ο οδηγός έχασε τον έλεγχο και οδήγησε το αυτοκίνητο πάνω στο στύλο.

Εικόνα 2.31
Ακραία αποτελέσματα του ζεύγους δράση - αντίδραση

Άλλα παραδείγματα του ζεύγους δράση και αντίδραση (που όλοι τα έχουμε βιώσει) είναι το κοκκίνισμα του χεριού ή η αίσθηση του πόνου, όταν χτυπάμε το χέρι μας, π.χ., στο θρανίο (αποτέλεσμα της αντίδρασης του θρανίου) και ο θόρυβος που προέρχεται από το θρανίο (αποτέλεσμα της δράσης μας σε αυτό).

Ας ερευνήσουμε

Πάρτε δύο δυναμόμετρα.
Τοποθετήστε τα δυναμόμετρα όπως φαίνεται στην εικόνα 2.32.



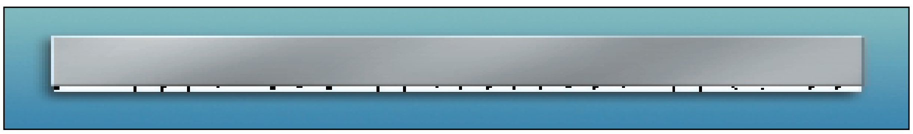
Εικόνα 2.32
Το ζεύγος δράση - αντίδραση.

Ασκήστε μια δύναμη στο άκρο του δεύτερου δυναμόμετρου.
Ποια είναι η ένδειξη του πρώτου δυναμόμετρου;
Σχεδιάστε τις δυνάμεις στα δύο δυναμόμετρα.
Σε ποιο συμπέρασμα καταλήγετε;

Για να κατανοήσει αρχικά κάποιος τον 3ο νόμο του Νεύτωνα και στη συνέχεια να τον εφαρμόσει, θα πρέπει πρώτα από όλα να ξαναθυμηθεί τον τρόπο σχεδιασμού των δυνάμεων.

Ας προβληματιστούμε

Λυγίστε έναν ελαστικό χάρακα ασκώντας δυνάμεις στα δύο άκρα του (εικόνα 2.33). Στη συνέχεια σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκήσατε στο χάρακα. Τέλος, σχεδιάστε τις δυνάμεις που δέχτηκαν τα δάκτυλά σας από αυτόν. Σε ποιο συμπέρασμα καταλήγετε;

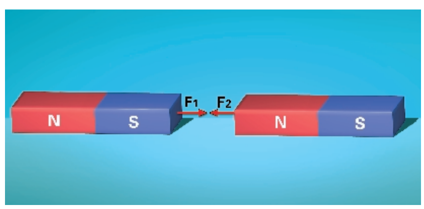


Εικόνα 2.33

Τι παρατηρείτε, αν χρησιμοποιήσατε τους δύο αντίχειρες και τους δύο δείκτες των χεριών σας; Πόσες δυνάμεις ασκήσατε στο χάρακα και πόσες δεχθήκατε από αυτόν;

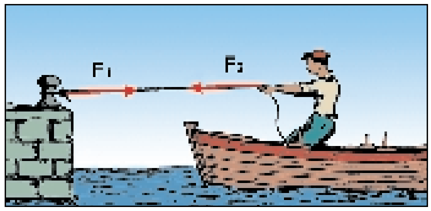
Ας εξετάσουμε μερικά **παραδείγματα**, για να κατανοήσουμε καλύτερα το αξίωμα δράσης-αντίδρασης.

Ο βόρειος πόλος ενός μαγνήτη ασκεί μια δύναμη (δράση) F_1 πάνω στον νότιο πόλο του δεύτερου μαγνήτη. Ο νότιος πόλος του δεύτερου μαγνήτη ασκεί επίσης μια δύναμη (αντίδραση) F_2 πάνω στο βόρειο πόλο του πρώτου μαγνήτη. Οι δύο μαγνήτες με την επίδραση των δυνάμεων έλκονται και κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις, εικόνα 2.34.



Εικόνα 2.34
Δράση-αντίδραση σε μαγνήτες

Ο βαρκάρης εξασκεί, μέσω του σχοινιού, μια δύναμη (δράση) F_1 πάνω στη δέστρα της προκυμαίας, εικόνα 2.35. Η δέστρα είναι καλά στερεωμένη και φυσικά μένει ακίνητη. Η βάρκα αρχίζει να κινείται με την επίδραση της δύναμης(αντίδραση) F_2 που δέχτηκε ο βαρκάρης από τη δέστρα.



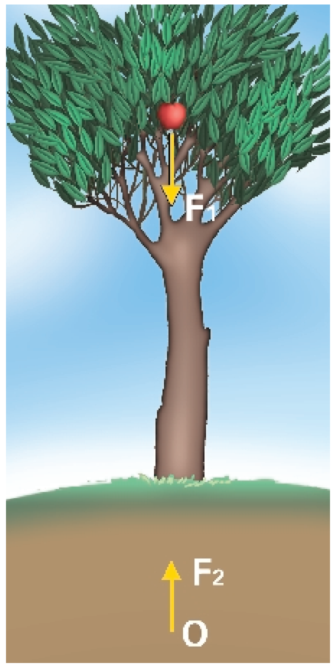
Εικόνα 2.35
Το ζεύγος δράση - αντίδραση σε σύστημα βάρκας - δέστρας

Το μήλο πέφτει κάτω από τη μηλιά!

Η Γη ασκεί μια δύναμη (δράση) F_1 πάνω στο μήλο, εικόνα 2.36. Η δύναμη αυτή έχει διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς το κέντρο Ο της Γης. Ομοίως το μήλο ασκεί μια δύναμη (αντίδραση) F_2 πάνω στη Γη. Από τα δύο σώματα κινείται μόνο το μήλο. Γιατί δεν κινείται η Γη;

Σύμφωνα με το νόμο δράσης - αντίδρασης για κάθε τέτοιο ζεύγος δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ θα ισχύει:

$$\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2} \qquad (2.13)$$



Εικόνα 2.36
Δράση - αντίδραση σε Γη και μήλο

Οι δυνάμεις δράσης-αντίδρασης έχουν:
- Διαφορετικά σημεία εφαρμογής, αφού ασκούνται σε διαφορετικά σώματα
- Ίσα μέτρα
- Ίδια διεύθυνση
- Αντίθετη φορά.

Ας προσέξουμε

Μετά την επισήμανση ότι η δράση και η αντίδραση ασκούνται σε διαφορετικά σώματα **δεν έχει νόημα η φράση:**
"η συνισταμένη των δυνάμεων δράσης - αντίδρασης είναι ίση με μηδέν".

2.11 Ισορροπία σώματος με την επίδραση ομοεπίπεδων δυνάμεων

Για να μελετήσουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες ένα στερεό σώμα ισορροπεί, θα αρχίσουμε με την απλή περίπτωση ενός σώματος που βρίσκεται ακίνητο επάνω στο γραφείο και μιας μπάλας που είναι ακίνητη πάνω στο πάτωμα.

Στην περίπτωση του ακίνητου σώματος εξετάζουμε πόσες και ποιες δυνάμεις δέχεται το σώμα.

Στο σώμα της εικόνας 2.37 ασκούνται δύο δυνάμεις:

- το βάρος Β, που οφείλεται στην έλξη της γης στο σώμα,
- η δύναμη F, την οποία ασκεί το γραφείο, που είναι σε επαφή με το σώμα.

Επειδή το σώμα ισορροπεί, θα πρέπει η συνισταμένη των δύο δυνάμεων να είναι μηδέν. Επομένως,

$F_{ολ}$ = B-F =0, οπότε B = F.

Οι δυνάμεις Β και F, οι οποίες έχουν ίσα μέτρα, ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά, ονομάζονται στη Φυσική αντίθετες δυνάμεις.

Συμπέρασμα: Όταν σε ένα σώμα ασκούνται δύο αντίθετες δυνάμεις, το σώμα ισορροπεί.

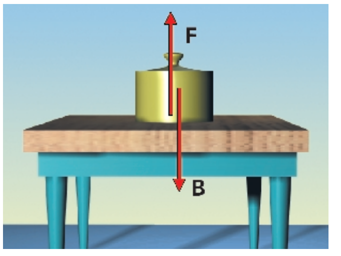
Σχεδιάστε τις δυνάμεις που δέχεται η μπάλα στην εικόνα 2.38 και καταλήξτε σε κάποιο συμπέρασμα.

Ας μελετήσουμε τώρα μια πιο σύνθετη περίπτωση, όπου ένα σώμα δέχεται τρεις ομοεπίπεδες δυνάμεις και ισορροπεί.

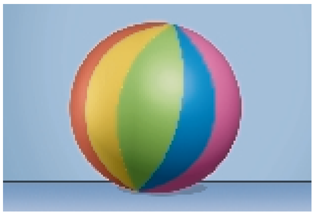
Στο βαρέλι της εικόνας 2.39 ασκούνται από τρεις τεχνίτες οι δυνάμεις F_1, F_2 και F_3, ενώ το βαρέλι μένει ακίνητο, δηλαδή ισορροπεί. Ας δούμε πόσες δυνάμεις δέχεται το βαρέλι.

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, στο βαρέλι ασκούνται οι δύο –γνωστές πλέον– κατακόρυφες δυνάμεις:

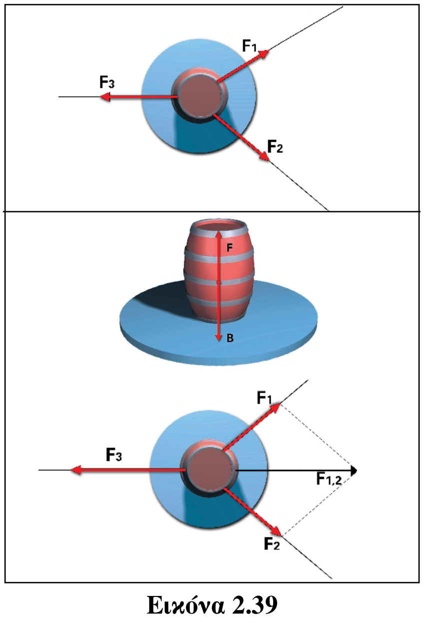
- το βάρος Β από τη Γη,
- η δύναμη F από το δάπεδο.



Εικόνα 2.37
Σώμα σε τραπέζι



Εικόνα 2.38
Μπάλα σε πάτωμα



Εικόνα 2.39
Ισορροπία σώματος
με την επίδραση πολλών δυνάμεων

Για τις δύο δυνάμεις αυτές, που έχουν την ίδια διεύθυνση, ισχύει: B= F, αφού το βαρέλι ισορροπεί ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση.

Στο βαρέλι ασκούνται επίσης οι τρεις οριζόντιες δυνάμεις F_1, F_2 και F_3 από τα σχοινιά. Οι δυνάμεις F_1 και F_2 μπορούν να αντικατασταθούν από τη συνισταμένη τους δύναμη $F_{1,2}$, οπότε στο βαρέλι ασκούνται τώρα οι δυνάμεις $F_{1,2}$ και η F_3. Για να ισορροπεί όμως το βαρέλι, κάτω από την επίδραση των δυνάμεων αυτών, θα πρέπει οι δυνάμεις $F_{1,2}$ και F_3 να είναι αντίθετες.

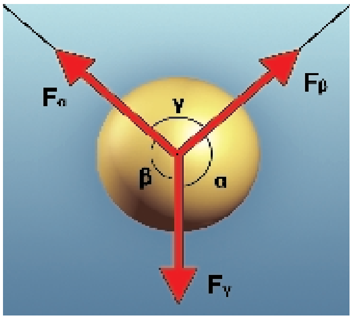
Συμπεράσματα:

1ο Για να ισορροπεί ένα σώμα με την επίδραση τριών ομοεπίπεδων δυνάμεων, θα πρέπει η συνισταμένη των δύο δυνάμεων να είναι αντίθετη με την τρίτη δύναμη.

2ο Η τελική συνισταμένη των τριών δυνάμεων είναι ίση με μηδέν.

Ας προσέξουμε

Αποδεικνύεται ότι, όταν ένα σώμα ισορροπεί με την επίδραση τριών ομοεπίπεδων δυνάμεων (εικόνα 2.40), τότε ισχύει η σχέση 2.12 (γνωστή ως **νόμος ημιτόνων**), την οποία μπορείτε να χρησιμοποιείτε σε ανάλογες περιπτώσεις λύσης ασκήσεων.



Εικόνα 2.40
Ισορροπία τριών ομοεπίπεδων δυνάμεων

$$\boxed{\frac{F_\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{F_\beta}{\eta\mu\beta} = \frac{F_\gamma}{\eta\mu\gamma}} \qquad (2.12)$$

Ας γενικεύσουμε

Σε άλλες περιπτώσεις ισορροπίας σωμάτων με την επίδραση πολλών ομοεπίπεδων δυνάμεων μπορούμε να πούμε ότι:

Αν σε ένα σώμα ασκούνται περισσότερες από τρεις ομοεπίπεδες δυνάμεις και το σώμα ισορροπεί, τότε η συνισταμένη όλων αυτών των δυνάμεων είναι ίση με μηδέν.

Η συνθήκη αυτή γράφεται:

$$\boxed{\begin{array}{ll} F_{o\lambda} = 0 & \text{ή} \\ \Sigma F = 0 & \text{ή} \\ \Sigma F_x = 0 \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 & \end{array}} \qquad 2.13$$

Πώς λύνουμε ασκήσεις ισορροπίας σωμάτων

Για να επιλυθεί ένα πρόβλημα ισορροπίας:

1. Σχεδιάζονται όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα του οποίου μελετάμε την ισορροπία.
2. Επιλέγουμε ένα σύστημα ορθογώνιων αξόνων, πάνω στους οποίους θα αναλύσουμε τις δυνάμεις, αν χρειαστεί.
3. Γράφουμε τις σχέσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή της συνθήκης ισορροπίας $\Sigma F_\chi = 0$ και $\Sigma F_y = 0$.
4. Γράφουμε τις σχέσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή του 3ου νόμου του Νεύτωνα.
5. Γράφουμε τις σχέσεις που απορρέουν από τα δεδομένα του προβλήματος που μελετάμε.
6. Αντικαθιστούμε τα σύμβολα των εξισώσεων που προέκυψαν με αριθμούς και λύνουμε τις εξισώσεις ως προς τον άγνωστο ή τους αγνώστους που απαιτούνται από το πρόβλημα.

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω

1ο Παράδειγμα

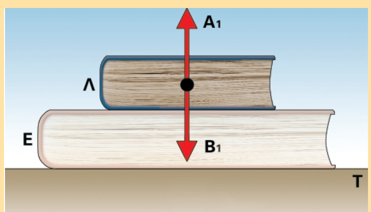
Σε γραφείο υπάρχουν δύο βιβλία, ένα λεξικό Λ και μια εγκυκλοπαίδεια Ε, όπως φαίνεται στην εικόνα.

Στο λεξικό Λ ασκούνται:

α. Το βάρος του B_1.

β. Η δύναμη A_1 από την εγκυκλοπαίδεια Ε.

Ισχύει $A_1 - B_1 = 0$ ή $A_1 = B_1$.



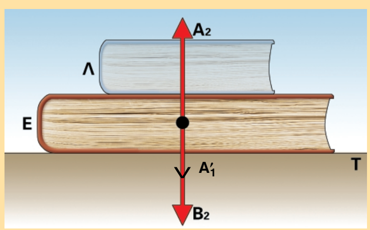
Στην εγκυκλοπαίδεια Ε ασκούνται:

α. Το βάρος της B_2.

β. Η δύναμη A_2, που ασκείται από το γραφείο με το οποίο έρχεται σε επαφή.

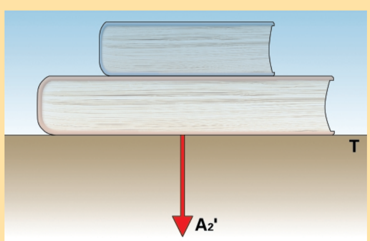
γ. Η δύναμη A_1', που ασκείται από το λεξικό ως αντίδραση της A_1(δράση).

Ισχύει $A_2 - A_1' - B_2 = 0$ ή $A_2 = A_1' + B_2$ και, επειδή $A_1 = A_1'$ (ως ζεύγος δράσης - αντίδρασης) και $A_1 = B_1$ (λόγω της ισορροπίας του λεξικού), θα έχουμε τελικά ότι $A_2 = B_1 + B_2$.



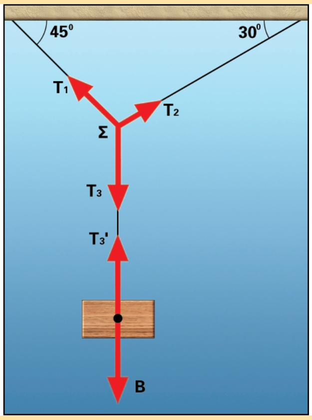
Στο γραφείο ασκείται η δύναμη A_2' από την εγκυκλοπαίδεια ως αντίδραση της A_2.

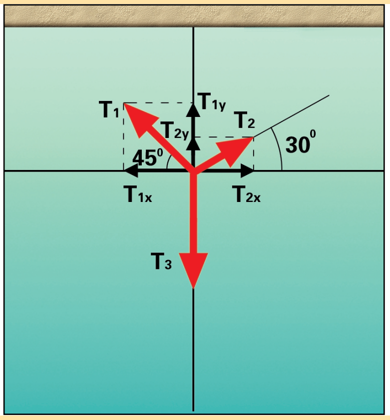
Ισχύει $A_2 = A_2'$ ή $A_2' = B_1 + B_2$.



2ο Παράδειγμα

Ένα σώμα κρέμεται από το ταβάνι με δύο σχοινιά, που σχηματίζουν αντίστοιχα γωνίες 45° και 30°, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το βάρος του σώματος είναι 100N. Να βρεθούν οι τάσεις T_1, T_2 και T_3.





Στο σημείο Σ, στο οποίο συναντώνται τα τρία νήματα, ασκούνται:

α. Η δύναμη T_3 από το νήμα ως αντίδραση της T_3', που ασκείται στο σώμα.

Η δύναμη T_3 είναι ίση με το βάρος του σώματος διότι το σώμα ισορροπεί, δηλαδή $\Sigma F=0$. Άρα T_3'-B=0 ή T_3'=B. Όμως T_3= T_3' (ως ζεύγος δράσης- αντίδρασης), και επομένως $\mathbf{T_3=B}$.

β. Η τάση του ενός νήματος T_1.

γ. Η τάση του άλλου νήματος T_2.

Αναλύουμε τις T_1 και T_2 σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xoy, του οποίου η αρχή O ταυτίζεται με το σημείο Σ:

$T_{1x} = T_1$συν45° και $T_{1y}=T_1$ ημ45°

$T_{2x}=T_2$συν30° και $T_{2y} = T_2$ημ30°.

Αφού το σώμα ισορροπεί, ισχύουν:

$\Sigma F_x = 0$ ή $T_{1x}=T_{2x}$ ή T_1, 0,707 = T_2 0,866 (1)

$\Sigma F_y = 0$ ή $T_{1y} + T_{2y} = B$ ή T_1, 0,707 + T_2 0,5= 100 (2).

Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων (1) και (2) με όποια μέθοδο θέλουμε.

Εδώ ας αφαιρέσουμε τις εξισώσεις (1) και (2) κατά μέλη, οπότε προκύπτει:

T_2 0,5 +T_2 0,866 =100 ή

T_2 1,366 =100 ή

$\mathbf{T_2}$ **= 73,206 N** και, αν αντικαταστήσουμε την τιμή αυτή στην (1), προκύπτει ότι $\mathbf{T_1}$ **= 89,669N.**

Συνεπώς, οι τάσεις στα σχοινιά είναι T_1 = 89,669 N, T_2 = 73,206 N και T_3=100N.

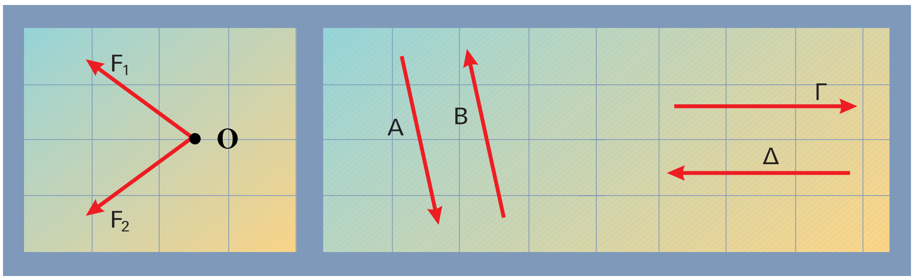
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.13 Γιατί κατά τη γνώμη σας η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος; Να αναφέρετε δύο παραδείγματα που να υποστηρίζουν αυτή την άποψη.

2.14 Ποια κατά τη γνώμη σας είναι τα χαρακτηριστικά μιας δύναμης;

2.15 Τι ονομάζουμε:
α. σύνθεση δυνάμεων
β. συνισταμένη δυνάμεων
γ. συνιστώσες δυνάμεις;
Δώστε παραδείγματα για τις περιπτώσεις β και γ.

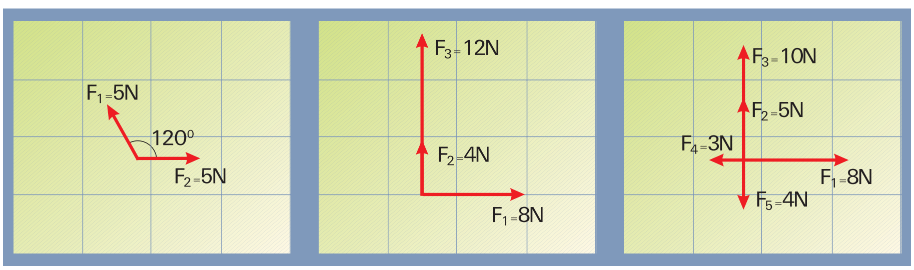
2.16 Στο σχήμα που ακολουθεί υπάρχουν δύο δυνάμεις που ασκούνται στο σημείο Ο. Ποιο από τα διανύσματα Α,Β,Γ,Δ είναι η συνισταμένη των δύο δυνάμεων;



2.17 Ποια διαδικασία ακολουθείται, για να προσδιοριστεί η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα; Αριθμήστε και περιγράψτε βήμα βήμα τα διάφορα στάδια.

2.18 Να βρεθεί η συνισταμένη δύο δυνάμεων, οι οποίες έχουν κοινό σημείο εφαρμογής, μέτρα 3N και 4N αντίστοιχα και σχηματίζουν γωνία:
α. 0^0 β. 60^0 γ. 90^0 δ. 180^0

2.19 Να βρεθεί η συνισταμένη (μέτρο και διεύθυνση) των παρακάτω δυνάμεων:



2.20 Να συμπληρωθούν τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

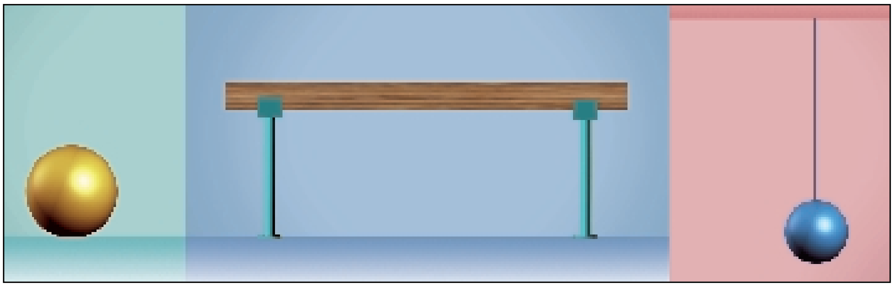
α. Οι δυνάμεις είναι διανυσματικά μεγέθη, διότι έχουν. .... και .... και προστίθενται..................................

β. Συνισταμένη δύο ή περισσότερων δυνάμεων είναι η δύναμη που προκαλεί..............................

γ. Ένα σώμα ισορροπεί με την επίδραση τριών δυνάμεων, όταν..........

δ. Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα οι δυνάμεις εμφανίζονται .... και έχουν .... μέτρα, ... διεύθυνση, ... φορά, ...σημείο εφαρμογής.

2.21 Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στα παρακάτω σώματα:



2.22 Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν με τη σύνθεση δύο δυνάμεων με μέτρα $F_1 = 3N$ και $F_2 = 4N$ να βρεθεί συνισταμένη, που να έχει μέτρο:

α. 1N

β. 5N

γ. 12N

δ. 7 N

ε. 0,5N

Επίσης, να σχεδιάσετε τις δυνάμεις σε κάθε περίπτωση.

2.23 Τι ονομάζουμε ανάλυση δύναμης σε δύο συνιστώσες και σε ποιες περιπτώσεις χρειάζεται η ανάλυση μιας δύναμης;

2.24 Να αναλυθεί μια δύναμη 12N σε δύο ορθογώνιες συνιστώσες, έτσι ώστε η μία από αυτές να σχηματίζει γωνία 30^o με τη δύναμη.

2.25 Ποια είναι η συνθήκη ισορροπίας ενός σώματος, όταν δέχεται:

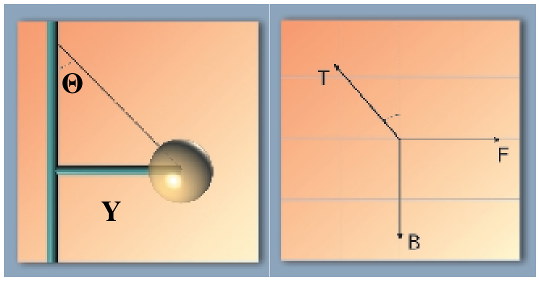
α. δύο δυνάμεις

β. τρεις δυνάμεις

γ. πολλές δυνάμεις;

2.26 Τρεις δυνάμεις που ασκούνται πάνω σε ένα σώμα αμελητέων διαστάσεων βρίσκονται σε ισορροπία. Ασκούμε άλλες δύο δυνάμεις πάνω στο σώμα, και το σώμα ισορροπεί και πάλι.

Τι μπορείτε να πείτε για τις δύο επιπρόσθετες αυτές δυνάμεις;



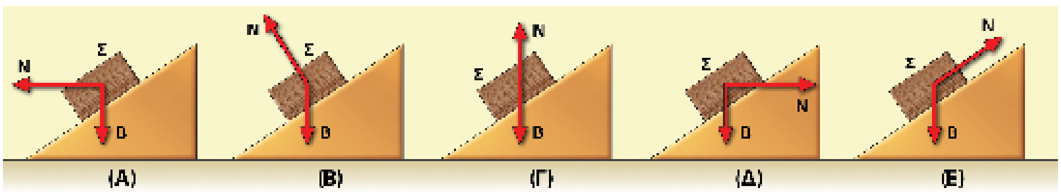
2.27 Η μεταλλική σφαίρα ισορροπεί και υποστηρίζεται με ένα μεταλλικό βραχίονα Υ όπως φαίνεται στο σχήμα. Το διάγραμμα δείχνει τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα. Ποια (ή ποιες) από τις ακόλουθες σχέσεις ισχύουν;

α) $T^2 = B^2+F^2$ β) $B = Tημθ$ γ) $F= Tσυνθ$ δ) $B = Fεφθ$ ε) $B+F+T = 0$

2.28 Δύο δυνάμεις F_1 και F_2 σχηματίζουν γωνία 60^0. Το μέτρο της συνισταμένης τους είναι:

α. Ίσο με το άθροισμα των μέτρων των δύο δυνάμεων: $F = F_1 + F_2$.
β. Μεγαλύτερο από το άθροισμα των μέτρων των δύο δυνάμεων: $F > F_1 + F_2$.
γ. Μικρότερο από το άθροισμα των μέτρων των δύο δυνάμεων: $F < F_1 + F_2$.
Ποια από τις παραπάνω προτάσεις είναι σωστή;

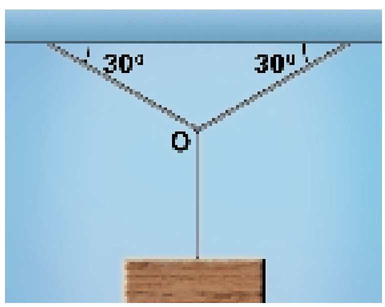
2.29 Ένα σώμα ισορροπεί πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα δείχνει σωστά τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα;



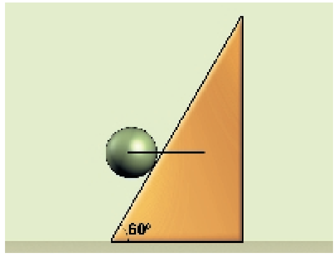
2.30 Το βάρος ενός ανθρώπου είναι 660N. Πόση δύναμη ασκεί ο άνθρωπος πάνω στη γη, όταν στέκεται σε οριζόντιο έδαφος;

2.31 Τρεις δυνάμεις έχουν μέτρα 10N, 20N και 30N και σχηματίζουν ανά δύο γωνία 120^o.
Να βρεθεί η συνισταμένη δύναμη.

2.32 Ένα σώμα βάρους B=10N συγκρατείται με τη βοήθεια τριών νημάτων όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα νήματα σχηματίζουν γωνίες 30^0 με την οροφή. Να σχεδιαστούν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σημείο Ο και στο σώμα και να υπολογιστούν τα μέτρα τους.



2.33 Η σφαίρα στο διπλανό σχήμα έχει βάρος B=18N. Η σφαίρα ισορροπεί με τη βοήθεια ενός νήματος. Πόση είναι η τάση του οριζόντιου νήματος και πόση δύναμη ασκεί το επίπεδο στη σφαίρα; Τριβές δεν υπάρχουν.

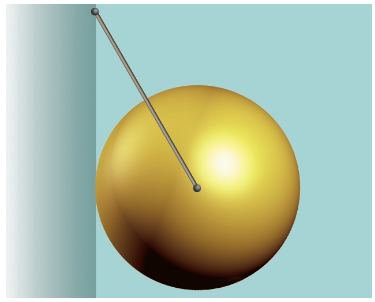


2.34 Μια μπάλα βάρους B=120N και διαμέτρου δ=6 cm είναι δεμένη με νήμα μήκους 6 cm όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Η μπάλα ισορροπεί:

α. Να σχεδιαστούν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στην μπάλα.

β. Να υπολογιστεί η αντίδραση του τοίχου στο σημείο επαφής με την μπάλα.

γ. Να υπολογιστεί η τάση του νήματος. Τριβές δεν υπάρχουν.

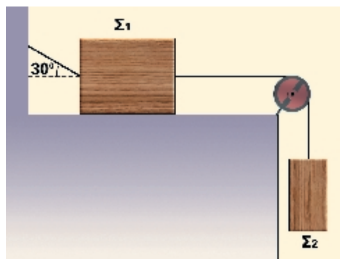


2.35. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 με βάρη αντίστοιχα B_1=36N και B_2=12N ισορροπούν σε λείο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α. Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα.

β. Να γράψετε τις εξισώσεις ισορροπίας των σωμάτων.

γ. Να υπολογίσετε όλες τις άγνωστες δυνάμεις.



2.36 Ο αλεξιπτωτιστής του παρακάτω σχήματος ισορροπεί κάποια στιγμή όπως φαίνεται στο σχήμα με την επίδραση τριών δυνάμεων: του βάρους του B=700N, της τάσης του νήματος T_1, που δέχεται από το αλεξίπτωτο, και της τάσης T_2, που δέχεται από ένα άλλο σχοινί.

Να υπολογίσετε τις τάσεις T_1 και T_2.