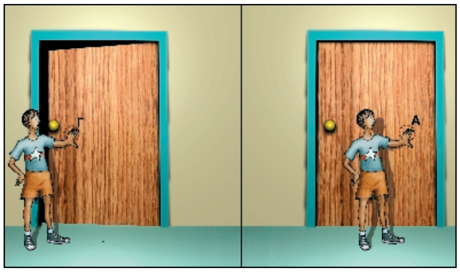
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο
ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΚΑΙ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

3.1 Η έννοια της ροπής και τα αποτελέσματά της

Ας προβληματιστούμε

Δοκιμάστε να ανοίξετε την πόρτα της αίθουσας εφαρμόζοντας την ίδια δύναμη σε δύο διαφορετικά σημεία Α και Γ, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.1.

- Τι παρατηρείτε;
- Τι συμπεραίνετε;

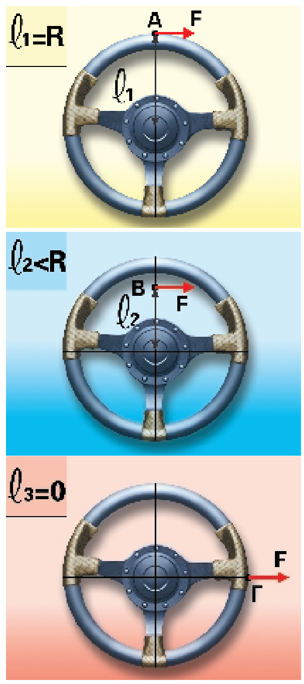


Εικόνα 3.1
Προσπαθούμε να ανοίξουμε την πόρτα.

Όλοι γνωρίζουμε ότι, αν εφαρμόσουμε μια δύναμη στο τιμόνι του αυτοκινήτου, το τιμόνι περιστρέφεται γύρω από μια νοητή γραμμή, η οποία θεωρούμε ότι διέρχεται από το σημείο Ο κέντρο του τιμονιού και ονομάζεται **άξονας περιστροφής**.

Ας εφαρμόσουμε μια δύναμη σε τρία διαφορετικά σημεία του τιμονιού της εικόνας 3.2: στο σημείο Α, στο σημείο Β και, τέλος, στο σημείο Γ.

Θα παρατηρήσουμε τότε ότι το τιμόνι στρέφεται σχετικά εύκολα στην πρώτη περίπτωση, με δυσκολία στη δεύτερη περίπτωση, ενώ μένει ακίνητο στην τρίτη περίπτωση. Μπορούμε επίσης, να παρατηρήσουμε ότι η απόσταση του φορέα της δύναμης από το σημείο περιστροφής (Ο) ή αλλιώς από έναν άξονα περιστροφής είναι ℓ_1=R στην πρώτη περίπτωση, ℓ_2 < R στη δεύτερη περίπτωση και ℓ_3 = 0 στην τρίτη περίπτωση (όπου R η ακτίνα του τιμονιού).

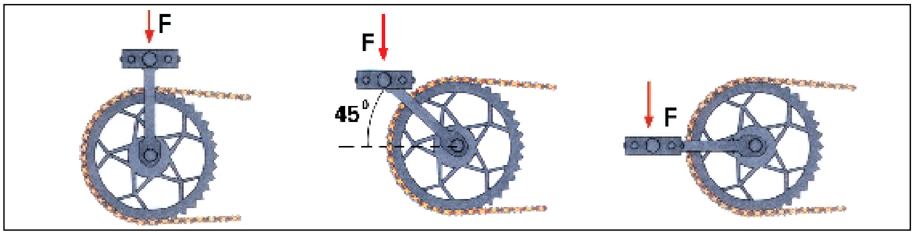


Εικόνα 3.2
Δυνάμεις σε τιμόνι

Για να στραφεί, επομένως, εύκολα το τιμόνι, δεν αρκεί να ασκήσουμε σ' αυτό μια δύναμη, αλλά πρέπει η απόσταση του φορέα της δύναμης από τον άξονα περιστροφής να μην είναι μηδέν. Άρα η περιστροφή δεν εξαρτάται μόνο από τη δύναμη αλλά και από την απόστασή της από τον άξονα περιστροφής, την οποία ονομάζουμε **μοχλοβραχίονα**.

Ο νοητός άξονας γύρω από τον οποίο περιστρέφεται ένα σώμα είναι κάθετος στο επίπεδο περιστροφής. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα του τιμονιού ο άξονας περιστροφής είναι η νοητή γραμμή που είναι κάθετη στο επίπεδο του τιμονιού και διέρχεται από το σημείο Ο (κέντρο του τιμονιού).

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω στο ποδήλατό μας



Εικόνα 3.3
Δύναμη στο πεντάλ ποδηλάτου

Στρέφεται ο τροχός και στα τρία στιγμιότυπα της εικόνας 3.3;

Για να μελετηθούν και να ερμηνευτούν τα θέματα περιστροφής των διάφορων σωμάτων, υπάρχει ανάγκη εισαγωγής ενός νέου μεγέθους, με το οποίο μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη περιστροφή των σωμάτων.

Ας ερευνήσουμε

1. Κρεμάμε δύο βάρη των 50p στα άκρα Α και Β μιας ράβδου, που μπορεί να περιστρέφεται όπως φαίνεται στο σχήμα.

Τι θα συμβεί, αν αφήσουμε το σύστημα ελεύθερο;

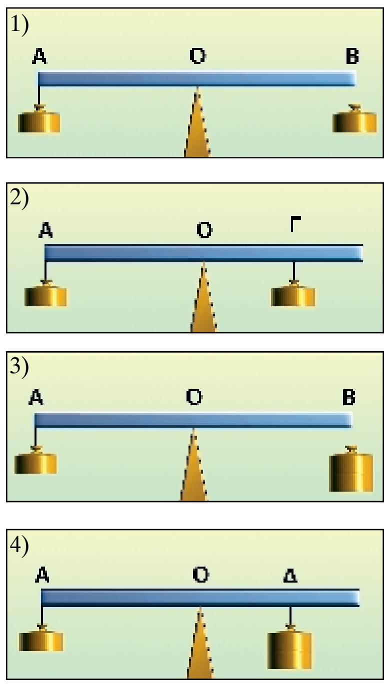
2. Μετακινούμε το ένα βάρος από το άκρο Β στη θέση Γ, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.4 (2).

Τι παρατηρούμε;

3. Κρεμάμε τα δύο βάρη όπως στην πρώτη περίπτωση, στα άκρα Α και Β της ράβδου. Στη συνέχεια προσθέτουμε άλλο ένα βάρος 50p στο άκρο Β της ράβδου.

Τι παρατηρούμε;

4. Μετακινούμε τα δύο βάρη του άκρου Β μέχρι εκείνου του σημείου Δ, ώστε η ράβδος να ισορροπήσει και πάλι.

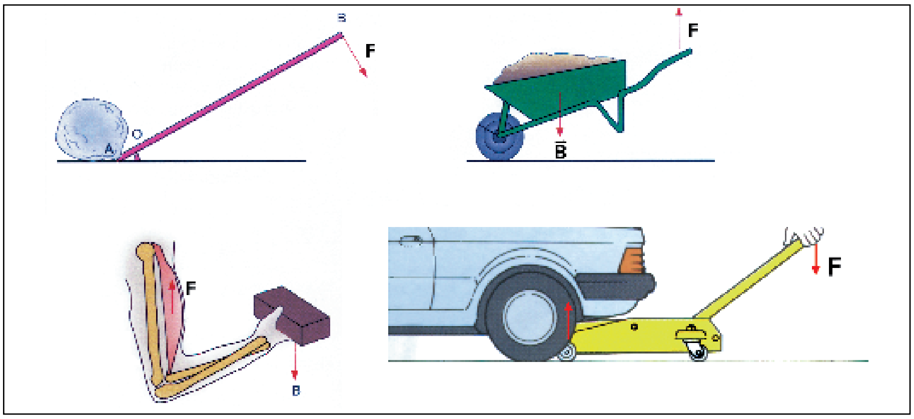


Εικόνα 3.4
Πείραμα για περιστροφή ράβδου

Με ένα χάρακα μετράμε την απόσταση ΑΟ και την απόσταση ΟΔ.
Τι παρατηρούμε;
Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:
1ο. Μια δύναμη που ασκείται αρχικά σε ένα ακίνητο σώμα μπορεί να προκαλέσει την περιστροφή του σώματος κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις.
2ο. Τα αποτελέσματα της επίδρασης μιας δύναμης σε σώμα που μπορεί να περιστρέφεται εξαρτώνται:

- **από το μέτρο της δύναμης**
- **από την απόσταση μεταξύ του φορέα της δύναμης και ενός σημείου, το οποίο συνηθίζουμε να ονομάζουμε σημείο περιστροφής, ή ενός άξονα, ο οποίος ονομάζεται άξονας περιστροφής.**

Ας δούμε μερικά παραδείγματα

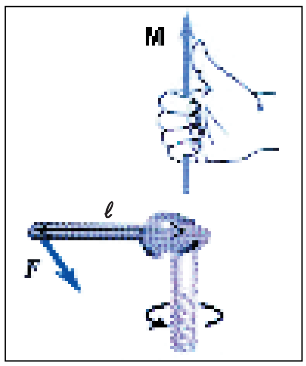


Εικόνα 3.5
Παραδείγματα περιστροφής σωμάτων

Το νέο μέγεθος που μπορεί να ερμηνεύσει τα αποτελέσματα της επίδρασης μιας δύναμης σε ένα σώμα, το οποίο μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σημείο ή άξονα, ονομάζεται **ροπή δύναμης** και έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την απόσταση του φορέα της από το σημείο ή από τον άξονα περιστροφής.
Διεθνώς η ροπή συμβολίζεται με το γράμμα Μ. Έτσι, ο τύπος της ροπής γράφεται:

$$\boxed{M = F.\ell} \qquad (3.1)$$

Η ροπή είναι διανυσματικό μέγεθος με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη F και από την απόσταση ℓ και με φορά τη φορά ενός δεξιόστροφου κοχλία (βίδα), που στρέφεται όπως στρέφεται το σώμα με την επί-



Εικόνα 3.6
Ο εμπειρικός κανόνας του "δεξιού χεριού" για τον καθορισμό της φοράς της ροπής

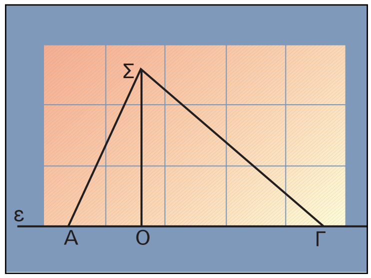
δραση της ροπής.

Η μονάδα της ροπής στο S.I. είναι το 1N. m, και προκύπτει από την παραπάνω σχέση, αν στη θέση της δύναμης F βάλουμε τη μονάδα 1N και στη θέση της απόστασης ℓ βάλουμε τη μονάδα 1m.

Ας προσέξουμε

1ο Την έννοια της απόστασης, όπως τη γνωρίσαμε στα Μαθηματικά.

Ας θεωρήσουμε ένα σημείο Σ και μια ευθεία ε. Η συντομότερη διαδρομή από το σημείο Σ στην ευθεία ε είναι το κάθετο τμήμα ΣΟ, το οποίο ονομάζουμε απόσταση σημείου Σ από την ευθεία.



2ο Η ροπή μπορεί να περιστρέψει ένα σώμα είτε κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού είτε αντίθετα.

Αν το σώμα με την επίδραση μιας δύναμης περιστρέφεται σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, η ροπή της δύναμης χαρακτηρίζεται ως **αρνητική**, ενώ αν περιστρέφεται αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, χαρακτηρίζεται ως **θετική**.

Το πρόσημο μιας ροπής είναι μια “σύμβαση”, η οποία βοηθάει στη μαθηματική μελέτη των ροπών των δυνάμεων και στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων τους στην καθημερινή ζωή.

3.2 Το θεώρημα των ροπών για ομοεπίπεδες δυνάμεις

Θεωρούμε έναν **τροχό** που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα.

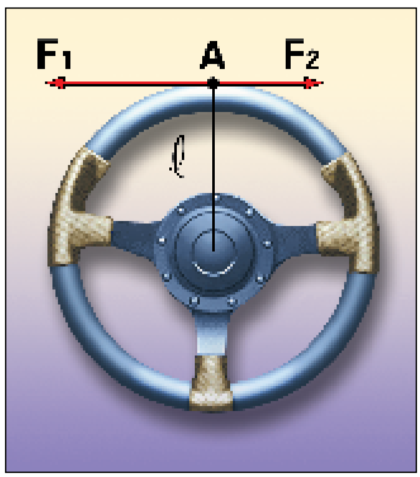
Στο σημείο Α της περιφέρειας του τροχού ασκούμε δύο δυνάμεις F_1 και F_2 όπως φαίνεται στην εικόνα 3.7.

Η δύναμη F_1 είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη F_2.

Το ερώτημα που τίθεται είναι προς τα πού θα περιστραφεί ο τροχός.

Για το λόγο αυτό θεωρούμε τις ροπές των δύο δυνάμεων:

$M_1 = F_1 \cdot \ell$ (θετική, επειδή περιστρέφει το σώμα αντίθετα με την



Εικόνα 3.7
Περιστρεφόμενος τροχός

κίνηση των δεικτών του ρολογιού),

$M_2 = -F_2 \cdot \ell$ (αρνητική, επειδή περιστρέφει το σώμα σύμφωνα με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού),

όπου ℓ η απόσταση των δυνάμεων F_1 και F_2 από τον άξονα περιστροφής.

Η συνισταμένη ροπή θα είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δύο δυνάμεων:

$$M_{ολ} = M_1 + M_2$$

ή $$M_{ολ} = F_1 \cdot \ell - F_2 \cdot \ell$$

ή $$M_{ολ} = (F_1 - F_2) \cdot \ell .$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά $F_1 - F_2$ είναι η συνισταμένη $F_{ολ}$ των δύο συγγραμμικών και αντίρροπων δυνάμεων F_1 και F_2. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε:

$$M_{ολ} = F_{ολ} \cdot \ell$$

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι η συνισταμένη ροπή είναι ίση με τη ροπή που προκαλεί η συνισταμένη $F_{ολ}$ των δυνάμεων.

Αν αντί για δύο θεωρήσουμε περισσότερες ομοεπίπεδες δυνάμεις F_1, F_2, F_3,. ... να ασκούνται σε ένα στερεό σώμα, καθώς και έναν οποιοδήποτε άξονα περιστροφής του σώματος, αποδεικνύεται ότι:

Η συνισταμένη Μολ των ροπών M_1, M_2, M_3,. ... όλων των δυνάμεων F_1, F_2, F_3, ... είναι ίση με τη ροπή που προκαλεί η συνισταμένη όλων των δυνάμεων.

$$\boxed{M_{ολ} = F_{ολ} \cdot \ell} \qquad (3.2)$$

Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως **θεώρημα των ροπών**, το οποίο έχει πολλές εφαρμογές.

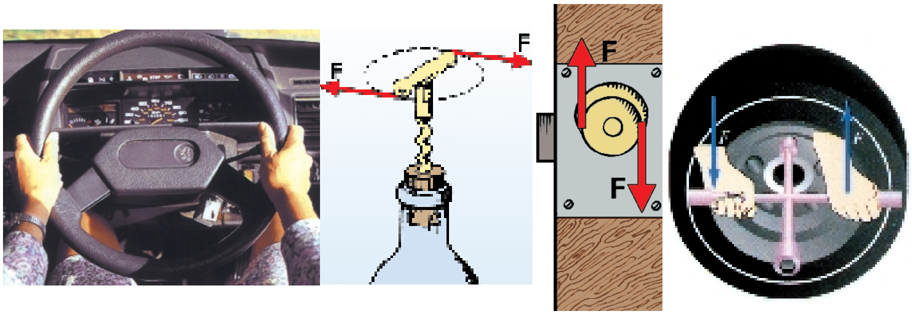
Το θεώρημα των ροπών, επίσης, διατυπώνεται και ως εξής:

Η ροπή $M_{ολ}$ της συνισταμένης πολλών ομοεπίπεδων δυνάμεων F_1, F_2, F_3,. .. ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο των δυνάμεων είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς τον άξονα αυτό.

$$\boxed{M_{ολ} = M_1 + M_2 + M_3 + ...} \qquad (3.3)$$

3.3 Ζεύγος δυνάμεων

Από την καθημερινή ζωή γνωστά και οικεία σε όλους μας είναι το βίδωμα ή το ξεβίδωμα, η αλλαγή λάστιχου στο αυτοκίνητο, η χρήση του εκπωματιστήρα (τιρμπουσόν), για να βγει ο φελλός από ένα μπουκάλι, η κίνηση του τιμονιού σε μια στροφή του δρόμου, εικόνα 3.8.



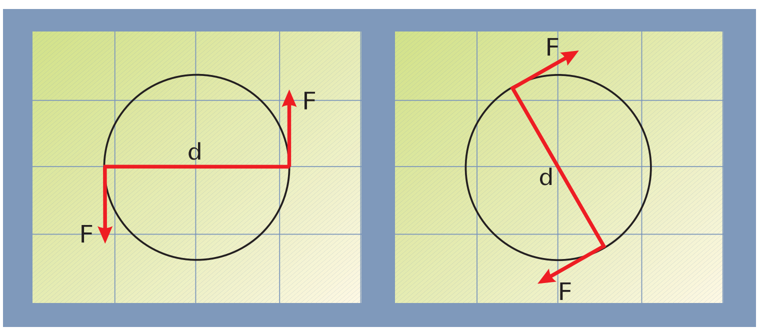
Εικόνα 3.8
Περιστροφή σωμάτων με επίδραση ζεύγους δυνάμεων

Τι κοινό νομίζετε ότι έχουν όλες οι παραπάνω περιπτώσεις;

Για να πετύχουμε την περιστροφή στα παραπάνω παραδείγματα, εφαρμόζουμε δύο δυνάμεις όπως φαίνεται και στην εικόνα, οι οποίες έχουν κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά:

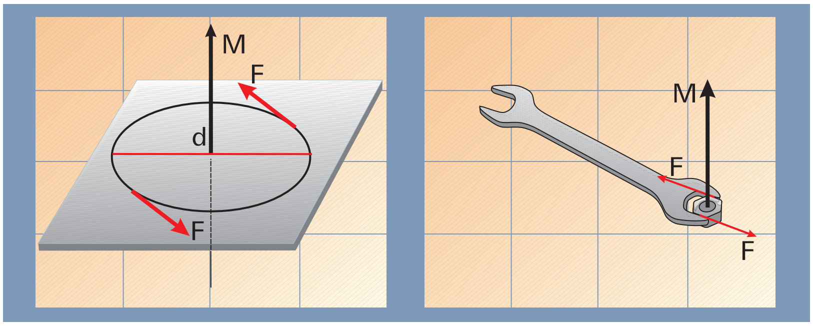
- ***έχουν το ίδιο μέτρο***
- ***είναι παράλληλες***
- ***έχουν αντίθετη φορά.***

Το σύστημα των δύο δυνάμεων με τα παραπάνω χαρακτηριστικά, οι οποίες έχουν ως αποτέλεσμα την περιστροφή ενός σώματος γύρω από έναν άξονα κάθετο στο επίπεδό τους, ονομάζεται **ζεύγος δυνάμεων**, εικόνα 3.9. Η απόσταση d των δύο παράλληλων φορέων των δυνάμεων του ζεύγους λέγεται **βραχίονας του ζεύγους**.



Εικόνα 3.9
Ζεύγος δυνάμεων

Θεωρούμε έναν άξονα κάθετο στο επίπεδο του ζεύγους. Κάθε δύναμη του ζεύγους τείνει να περιστρέψει το σώμα γύρω από τον άξονα.



Εικόνα 3.10
Ροπή ζεύγους δυνάμεων

Ορίζουμε ως ροπή ζεύγους το μέγεθος:

$$\boxed{\mathbf{M=F.d}} \tag{3.4}$$

Η ροπή του ζεύγους είναι διανυσματικό μέγεθος, όπως και η ροπή δύναμης, και έχει τα ίδια διανυσματικά χαρακτηριστικά με αυτήν, δηλαδή:

- **Μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου F μιας εκ των δυνάμεων του ζεύγους επί το βαχίονα d του ζεύγους.**
- **Φορέα τον άξονα περιστροφής του σώματος.**
- **Φορά θετική ή αρνητική ανάλογα με τη φορά περιστροφής του σώματος με την επίδραση του ζεύγους.**

Ας προσέξουμε

1ο Οι δύο δυνάμεις του ζεύγους δεν μπορούν να αντικατασταθούν από μία δύναμη (δεν έχει νόημα η εύρεση συνισταμένης).

2ο Η ροπή του ζεύγους μπορεί να αντικατασταθεί από τη ροπή κάποιας δύναμης.

3.4 Ισορροπία στερεού σώματος που μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα

Το θέμα που θα διαπραγματευθούμε στη συνέχεια είναι η ισορροπία ενός στερεού σώματος, στο οποίο ασκούνται δύο δυνάμεις οι οποίες τείνουν να το περιστρέψουν.

Το ερώτημα που τίθεται στην περίπτωση αυτή είναι:

Είναι δυνατόν να ισορροπήσει;

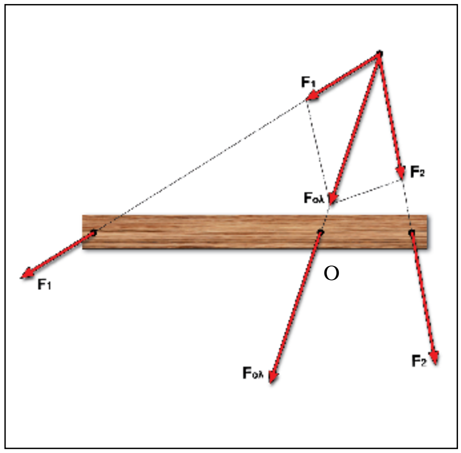
Ας πάρουμε ως παράδειγμα μια σανίδα. Θεωρούμε τη σανίδα αβαρή (δηλαδή στερεό σώμα με αμελητέο βάρος), εικόνα 3.11. Πάνω στη σανίδα ασκούνται δύο δυνάμεις F_1 και F_2, οι οποίες δεν είναι παράλληλες.

Από ποιο σημείο μπορεί να κρεμαστεί η σανίδα, ώστε να ισορροπήσει;

Η πρώτη κίνηση είναι να βρεθεί η συνισταμένη των δύο δυνάμεων. Για το λόγο αυτό προεκτείνουμε τους φορείς των δυνάμεων μέχρι να συναντηθούν.

Στη συνέχεια μεταφέρουμε τις δύο δυνάμεις πάνω στους φορείς τους και με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου βρίσκουμε τη συνισταμένη τους.

Κατόπιν προεκτείνουμε το φορέα της συνισταμένης, ώσπου να τμήσει τη σανίδα στο σημείο Ο.



Εικόνα 3.11
Ισορροπία στερεού
με την επίδραση δύο δυνάμεων

Αν τώρα κρεμάσουμε τη σανίδα από το σημείο Ο, θα παρατηρήσουμε ότι η σανίδα θα ισορροπήσει. Αυτό σημαίνει ότι η σανίδα δέχεται από το καρφί μια δύναμη αντίθετη της συνισταμένης των δύο δυνάμεων.

Τι γίνεται όμως στην περίπτωση κατά την οποία στη σανίδα ασκούνται δύο παράλληλες δυνάμεις;

Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια μέθοδο;

Η απάντηση είναι όχι, διότι όσο και να προεκτείνουμε δύο παράλληλες ευθείες αυτές δεν τέμνονται, με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου, ο οποίος έδωσε λύση στον προηγούμενο προβληματισμό.

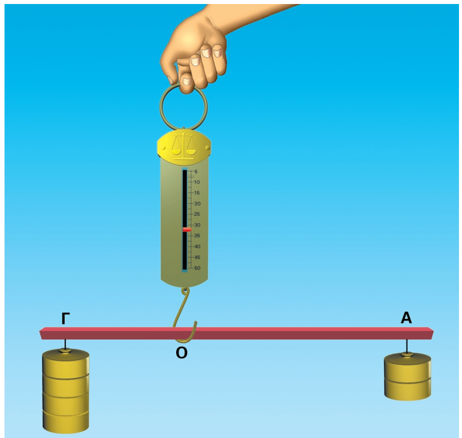
Για να απαντήσουμε στον προβληματισμό αυτό, θα πρέπει να βρούμε πάλι τη συνισταμένη των δύο δυνάμεων, δηλαδή να υπολογίσουμε:

- το μέτρο της
- το φορέα της
- τη φορά της και
- το σημείο εφαρμογής της.

Ας ερευνήσουμε

Κρεμάμε στις άκρες της αλουμινένιας ράβδου μήκους ℓ του σχολικού εργαστηρίου δύο βάρη (50p το καθένα) στην μια άκρη και τέσσερα βάρη στην άλλη άκρη. Πόση δύναμη ασκείται συνολικά στη ράβδο;

Στη συνέχεια παίρνουμε ένα δυναμόμετρο και προσπαθούμε να το μετακινήσουμε σε διάφορες θέσεις, ώστε να ισορροπήσει σε ένα σημείο, έστω Ο, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.12.



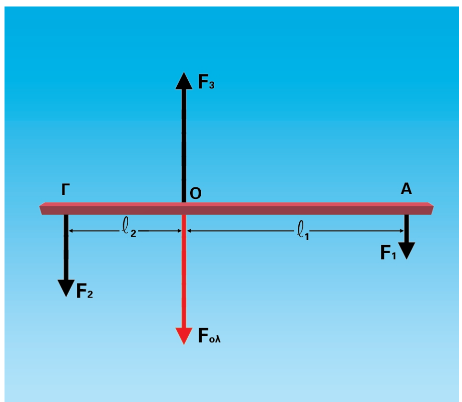
Εικόνα 3.12
Πείραμα για τον προσδιορισμό της συνισταμένης δύο παράλληλων δυνάμεων

Ποια είναι τότε η ένδειξη του δυναμομέτρου;

Κατόπιν παίρνουμε ένα χάρακα και με τη βοήθεια ενός φίλου μετράμε τις αποστάσεις του σημείου Ο από τις άκρες της ράβδου.

Τι παρατηρούμε;

Από το πείραμα που κάναμε διαπιστώνουμε ότι η δύναμη F_3, που ισορροπεί το σύστημα, έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της συνισταμένης των δύο ομοεπίπεδων, παραλλήλων και ομόρροπων δυνάμεων, δηλαδή



$F_3 = F_{ολ} = F_1 + F_2$, ίδια διεύθυνση με αυτές και φορά αντίθετη με αυτήν της συνισταμένης τους.

Για να βρεθεί, τέλος, το σημείο εφαρμογής (Ο) της δύναμης $F_{ολ}$, θα πρέπει να εφαρμοστεί το θεώρημα των ροπών στο σημείο Ο, σύμφωνα με το οποίο στη συγκεκριμένη περίπτωση προκύπτει:

ροπή της δύναμης F_1 + ροπή της δύναμης F_2 = ροπή της δύναμης $F_{ολ}$,

$$\text{δηλαδή } -F_1 \cdot \ell_1 + F_2 \cdot \ell_2 = F_{ολ} \cdot 0$$

$$\text{ή } F_1 \cdot \ell_1 = F_2 \cdot \ell_2 \text{ ή } \frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{F_1}{F_2},$$

και, αν προσθέσουμε στους παρανομαστές τους αριθμητές (θυμηθείτε λίγο τις ιδιότητες των αναλογιών από τα Μαθηματικά...), προκύπτει ότι:

$$\frac{\ell_2}{\ell_1+\ell_2}=\frac{F_1}{F_1+F_2},\qquad \text{όπου } \ell_1+\ell_2=\ell. \text{ Άρα}$$

$$\ell_2=\ell\frac{F_1}{F_1+F_2} \qquad \text{και} \qquad \ell_1=\ell\frac{F_2}{F_1+F_2}$$

Από τις τελευταίες σχέσεις βρίσκουμε την απόσταση της δύναμης $F_{ολ}$ από τις άκρες της ράβδου, δηλαδή προσδιορίζουμε το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των δύο δυνάμεων.

Το σημείο αυτό είναι εκείνο από το οποίο μπορούμε να κρεμάσουμε τη ράβδο, ώστε να ισορροπήσει.

Αν, τέλος, στη σανίδα της εικόνας 3.13 ασκούνται δύο δυνάμεις ομοεπίπεδες αλλά αντίρροπες, με το ίδιο σκεπτικό προκύπτει ότι το μέτρο της συνισταμένης δίνεται από τη σχέση $F_{ολ} = F_2 - F_1$, όταν η δύναμη F_2 είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη F_1.

Η διεύθυνση της $F_{ολ}$ είναι ίδια με τη διεύθυνση των δύο δυνάμεων, και η φορά της είναι ίδια με τη φορά της μεγαλύτερης δύναμης.

Για να βρούμε όμως το σημείο εφαρμογής της Ο, εφαρμόζουμε και πάλι το θεώρημα των ροπών ως προς το σημείο Ο (σημείο εφαρμογής της συνισταμένης):

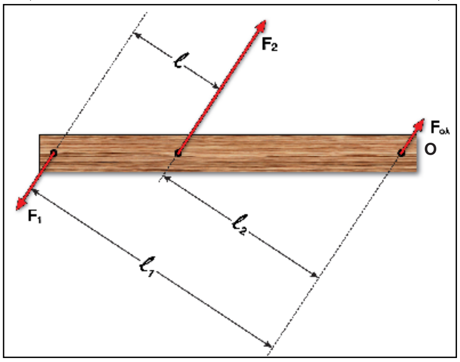
$$F_1\cdot \ell_1 - F_2\cdot \ell_2 = F_{ολ}\cdot 0,$$

οπότε $$\frac{\ell_1}{\ell_2}=\frac{F_2}{F_1} \quad \text{και } \ell_1-\ell_2=\ell.$$

Όπως και πιο πάνω:

$$\frac{\ell_1-\ell_2}{\ell_2}=\frac{F_2-F_1}{F_1} \qquad \text{ή}$$

$$\ell_2=\ell\frac{F_1}{F_2-F_1} \quad \text{και} \quad \ell_1=\ell\frac{F_2}{F_2-F_1}.$$



Εικόνα 3.13
Συνισταμένη δύο παράλληλων και αντίρροπων δυνάμεων

Η συνισταμένη δύναμη βρίσκεται προς την πλευρά της μεγαλύτερης δύναμης, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.13.

Γραφική μέθοδος *για να εντοπίζουμε το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης παράλληλων δυνάμεων (ομόρροπων ή αντίρροπων):*

- *Προεκτείνουμε τη μικρότερη δύναμη, ώστε να γίνει ίση με τη μεγαλύτερη.*
- *Με αντίθετη φορά από αυτήν της μεγαλύτερης δύναμης φέρνουμε ένα τμήμα ίσο με τη μικρότερη δύναμη.*

- *Η ευθεία που ενώνει τα άκρα των τμημάτων που κατασκευάσαμε τέμνει τη ράβδο σε ένα σημείο Ο, που είναι και το ζητούμενο.*

Ας δοκιμάσουμε......

Ας προσέξουμε

Για να ισορροπήσει ένα σώμα με την επίδραση πολλών δυνάμεων που τείνουν να το περιστρέψουν, πρέπει το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που τείνουν να στρέψουν το σώμα αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού να είναι ίσο με το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που τείνουν να στρέψουν το σώμα σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

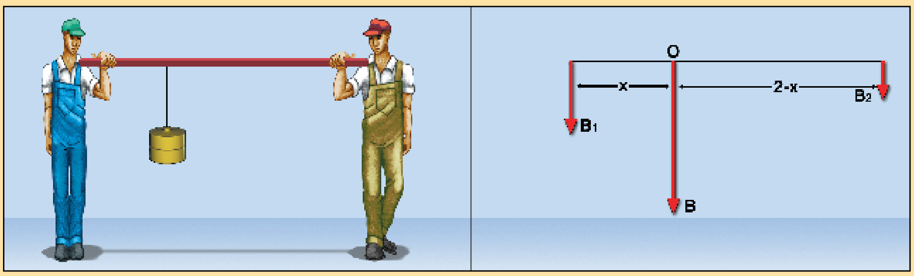
$$\boxed{\mathbf{M\,(+)\nearrow \;=\; M(-)\searrow}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\mathbf{\Sigma M=0}} \qquad (3.5)$$

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω

1ο Παράδειγμα

Δύο εργάτες μεταφέρουν ένα σώμα βάρους 500N κρεμασμένο σε μια αβαρή ράβδο, που ακουμπά με τις άκρες της στους ώμους των δύο εργατών, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν το μήκος της ράβδου είναι 2 m, σε ποιό σημείο της ράβδου πρέπει να κρεμαστεί το σώμα, ώστε ο ένας εργάτης να κουβαλά βάρος 200N;

Έστω ότι το σώμα κρέμεται από το σημείο Ο.



Το σώμα βάρους 500N, μεταφέρεται από τους δύο εργάτες. Εφόσον ο ένας εργάτης θα μεταφέρει τα 200N, ο άλλος θα μεταφέρει το υπόλοιπο, δηλαδή τα 300N.

Αν η απόσταση του βάρους B_1 =300N από το σημείο Ο είναι ℓ_1 = x, τότε η απόσταση του βάρους B_2 θα είναι 2-x.

Το βάρος Β=500N βρίσκεται πάνω στο σημείο Ο, επομένως η ροπή του ως προς αυτό είναι ίση με μηδέν.

Θεωρούμε τις ροπές των βαρών B_1 και B_2 ως προς το σημείο Ο, στο οποίο κρέμασαν το βάρος:

Η ροπή του βάρους που μεταφέρει ο ένας εργάτης τείνει να περιστρέψει τη ράβδο αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, και είναι:

$B_1 \cdot \ell_1 = 300x\ (N \cdot m)$.

Η ροπή του βάρους που μεταφέρει ο άλλος εργάτης τείνει να περιστρέψει τη ράβδο σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, και είναι:

$B_2 \cdot \ell_2 = 200(2-x)\ (N \cdot m)$.

Σύμφωνα όμως με το θεώρημα των ροπών για την ισορροπία των στερεών σωμάτων ισχύει:

$300x = 200\ (2-x)$

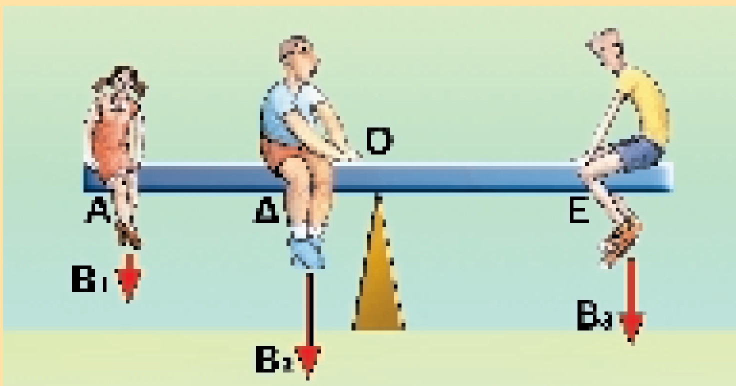
ή τελικά: $x = \dfrac{400}{500} = 0{,}8\ m.$

Επομένως, το βάρος πρέπει να κρεμαστεί σε απόσταση 0,8 m από τον εργάτη, που μεταφέρει το βάρος των 300N.

2ο Παράδειγμα

Στην τραμπάλα, που ισορροπεί σε οριζόντια θέση, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα, η Δόμνα έχει βάρος B_1=320N και είναι στη θέση Α, ο Νότης έχει βάρος B_2=540N και είναι στη θέση Δ, και ο Αλέξανδρος που έχει βάρος B_3 είναι στη θέση Ε. Πόσο βάρος έχει ο Αλέξανδρος;

Δίνονται ΑΟ=ℓ_1=3m, ΔΟ =ℓ_2=1m, και ΟΕ=ℓ_3=3m.



Θεωρούμε τις ροπές ως προς το σημείο Ο:

Οι ροπές που τείνουν να περιστρέψουν την τραμπάλα αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού είναι:

$B_1 \cdot \ell_1 + B_2 \cdot \ell_2 = 320N \cdot 3m + 540\ N \cdot 1m = 1500 N \cdot m$.

Η ροπή που τείνει να περιστρέψει την τραμπάλα σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού είναι:

$$B_3 \cdot \ell_3 = B_3 \cdot 3m.$$

Σύμφωνα όμως με το θεώρημα των ροπών για την ισορροπία των στερεών σωμάτων ισχύει:

$B_3 \cdot 3m = 1500\ N \cdot m$

ή $$B_3 = \frac{1500N \cdot m}{3\ m} = 500N.$$

Επομένως, το βάρος του Αλέξανδρου είναι 500N.

3.5 Κέντρο βάρους - Είδη ισορροπίας

Κάθε στερεό σώμα αποτελείται από στοιχειώδη σωματίδια. Καθένα από αυτά έχει μάζα και δέχεται μια ελκτική δύναμη από τη Γη. Η δύναμη αυτή ονομάζεται **βάρος** και θεωρούμε ότι έχει κατακόρυφη διεύθυνση.

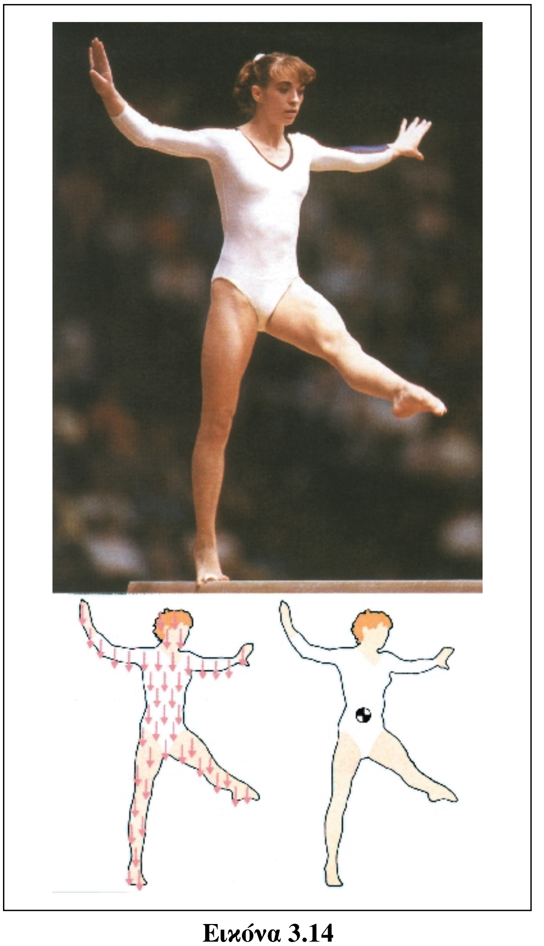
Σύμφωνα με την παραπάνω παραδοχή το βάρος κάθε σώματος είναι το αποτέλεσμα της αναζήτησης της συνισταμένης όλων αυτών των στοιχειωδών βαρών των σωματιδίων από τα οποία αποτελείται το σώμα, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.14.

Τα στοιχειώδη βάρη είναι παράλληλες δυνάμεις και η εύρεση του βάρους ενός σώματος είναι η σύνθεση όλων αυτών των παράλληλων και κατακόρυφων συνιστωσών.

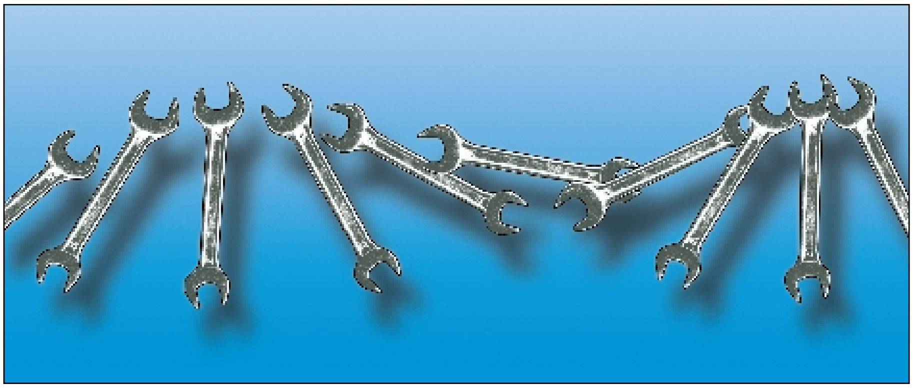
Η συνισταμένη όλων αυτών των στοιχειωδών βαρών περνά από ένα χαρακτηριστικό σημείο, που ονομάζεται **κέντρο βάρους** του σώματος.

Στο κέντρο βάρους μεταφέρουμε συνήθως και όλες τις δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα, όταν μελετάμε την ισορροπία αλλά και την κίνησή του κατά τις μετατοπίσεις.

Το πλεονέκτημα αυτού του σημείου είναι ότι, ακόμη και αν στραφεί το σώμα, χωρίς όμως να αλλάξει το σχήμα του, το σημείο αυτό παραμένει το ίδιο.



Εικόνα 3.14
Το βάρος σώματος ως συνισταμένη των στοιχειωδών βαρών των σωματιδίων του



Υπάρχουν περιπτώσεις μελέτης κινήσεων κατά τις οποίες τα σώματα θεωρούνται σημειακά αντικείμενα και τότε η μάζα τους είναι συγκεντρωμένη στο κ.β. Οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα σχεδιάζονται με σημείο εφαρμογής το κ.β. τους.

Ας προβληματιστούμε

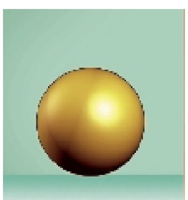
Ισορροπήστε ένα χάρακα με το δάκτυλό σας. Σημειώστε τις δυνάμεις που δέχεται ο χάρακας και προσπαθήστε να ερμηνεύσετε την ισορροπία του. Στη συνέχεια, τοποθετήστε πάνω στο χάρακα μια γομολάστιχα. Προσπαθήστε πάλι να ισορροπήσετε το σύστημα χάρακας –γομολάστιχα. Τι παρατηρείτε;

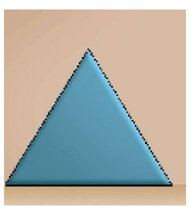
Ο προσδιορισμός του κέντρου βάρους ενός σώματος είναι, όπως καταλαβαίνουμε, πολυσύνθετη διαδικασία. Για το λόγο αυτό καταφεύγουμε σε άλλες μεθόδους, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

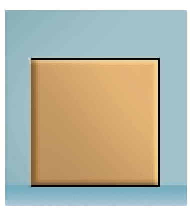
Συνήθως το κέντρο βάρους ενός ομογενούς σώματος είναι το κέντρο συμμετρίας του ή βρίσκεται πάνω σε έναν άξονα συμμετρίας του (*Ομογενές λέγεται ένα σώμα, όταν η πυκνότητά του είναι σταθερή σε όλη του την έκταση*).

Ας προβληματιστούμε

Βρείτε το κέντρο βάρος των παρακάτω ομογενών σωμάτων:


σφαίρα


ισόπλευρη τριγωνική πλάκα


τετραγωνική πλάκα

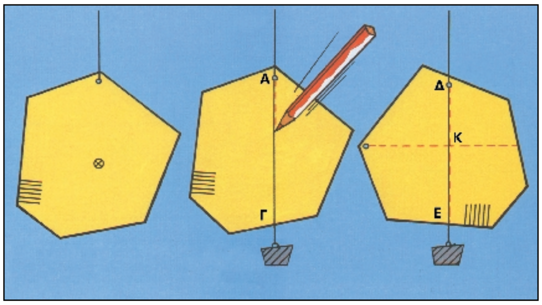

πλάκα σχήματος ορθογώνιου

Εύρεση του κέντρου βάρους ενός σώματος

Ας ερευνήσουμε

Πειραματικά το κέντρο βάρους μιας κατηγορίας σωμάτων, τα οποία όμως έχουν δύο διαστάσεις, π.χ. μιας πλάκας ακανόνιστου σχήματος, βρίσκεται με τη **μέθοδο της διπλής ανάρτησης**.

Φτιάξτε με ένα χαρτόνι μια επιφάνεια ακανόνιστου σχήματος όπως φαίνεται στην εικόνα 3.15.



Εικόνα 3.15
Πρακτικός προσδιορισμός κέντρου βάρους

Πάρτε ένα σχοινί και στη μια άκρη του δέστε ένα μικρό βάρος.

Κρεμάστε την επιφάνεια του χαρτονιού από ένα σημείο Α, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.15.

Από το ίδιο σημείο αναρτήστε το σχοινί με το βάρος και σημειώστε πάνω στη χάρτινη επιφάνεια τη διεύθυνση ΑΓ του σχοινιού.

Στη συνέχεια κρεμάστε την επιφάνεια του χαρτονιού από ένα άλλο σημείο Δ και επαναλάβετε την ίδια διαδικασία.

Σημειώστε και πάλι τη διεύθυνση ΔΕ, η οποία τέμνει την προηγούμενη διεύθυνση ΑΓ στο σημείο Κ.

Στερεώστε τη χάρτινη επιφάνεια στο σημείο Κ και στρέψτε την.

Τι παρατηρείτε;

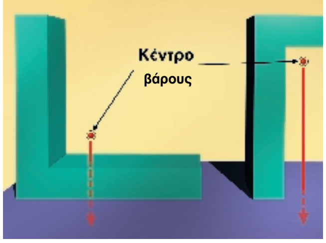
Πώς το εξηγείτε;

Το σημείο Κ είναι το κέντρο βάρους της χάρτινης επιφάνειας.

Μπορεί η μέθοδος της διπλής ανάρτησης να χρησιμοποιηθεί σε μη ομογενή σώματα;

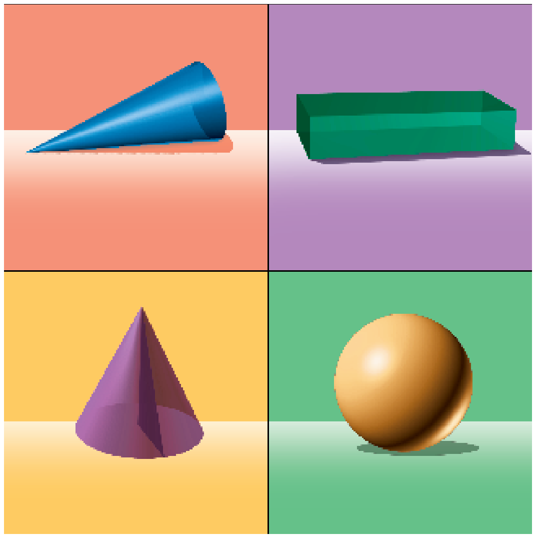
Ας προσέξουμε

Το κέντρο βάρους των σωμάτων μπορεί να βρίσκεται μέσα ή έξω από τα σώματα, όπως φαίνεται στις εικόνες.



3.6 Κέντρο βάρους και ισορροπία ενός σώματος

΄Ενα στερεό σώμα μπορεί να ισορροπεί, όταν στηρίζεται σε ένα ή σε περισσότερα σημεία πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.16.



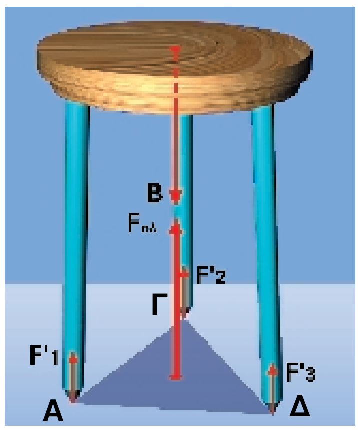
Εικόνα 3.16
Ισορροπία διάφορων στερεών

Αν τώρα θεωρήσουμε ένα τρίποδο σκαμνί και ενώσουμε τα σημεία επαφής του, που βρίσκονται στο οριζόντιο και λείο δάπεδο, προκύπτει ένα τρίγωνο, το οποίο ονομάζεται **βάση στήριξης**, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.17.

Το επίπεδο ασκεί στα τρία σημεία επαφής του σώματος με το δάπεδο Α,Γ,Δ αντιδράσεις (δυνάμεις από επαφή), οι οποίες είναι κατακόρυφες.

Αν προσπαθήσουμε να μελετήσουμε την ισορροπία του σκαμνιού, θα διαπιστώσουμε ότι το βάρος του Β και η συνισταμένη των τριών αντιδράσεων πρέπει να είναι δυνάμεις ίσου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης.

Για να συμβεί αυτό, η συνισταμένη δύναμη των τριών αντιδράσεων πρέπει να βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφη με το βάρος, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.17.

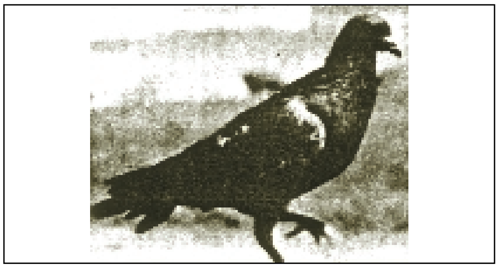


Εικόνα 3.17
Ισορροπία στερεού με τρία σημεία στήριξης

Δεν είναι δύσκολο να καταλήξει κανείς στο παρακάτω συμπέρασμα:

Στερεό σώμα, το οποίο στηρίζεται πάνω σε ένα λείο και οριζόντιο επίπεδο, ισορροπεί, όταν η κατακόρυφος που περνά από το κέντρο βάρους του σώματος τέμνει τη βάση στήριξής του.

Ας παρατηρήσουμε ένα περιστέρι καθώς περπατάει. Σε κάθε βήμα το περιστέρι τινάζει κεφάλι και λαιμό πίσω και εμπρός, έτσι ώστε να κρατάει το κέντρο βάρος του πάνω στην ευθεία που περνάει από το πόδι στο οποίο στηρίζεται.



Εικόνα 3.18
Το περιστέρι όταν περπατάει, βρίσκει τρόπο να ισορροπεί.

Ας επεκτείνουμε

Παίρνουμε μια σφαίρα.

Προσπαθούμε να ισορροπήσουμε τη σφαίρα στις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Πάνω σε μια μπάλα.

β. Πάνω στο θρανίο.

γ. Μέσα σε μια κούπα.

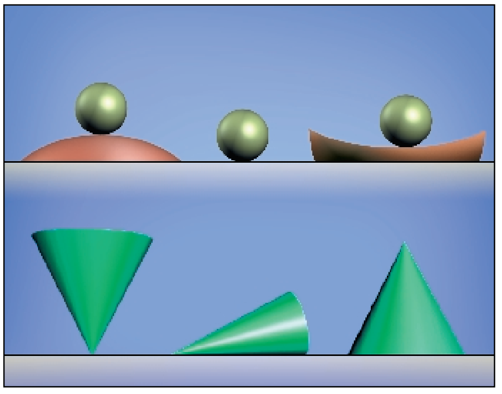
Κάνουμε το ίδιο με έναν κώνο, στηρίζοντάς τον στο έδαφος:

α. Με την κορυφή.

β. Με την παράπλευρη επιφάνεια.

γ. Με τη βάση του.

Τι παρατηρούμε;



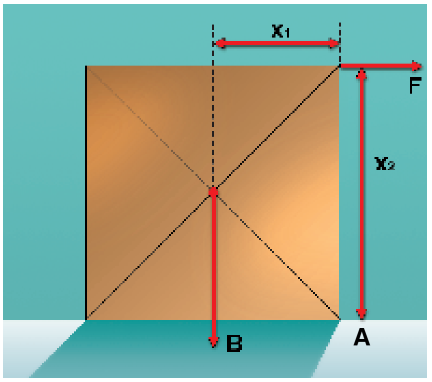
Εικόνα 3.19
Διάφορες περιπτώσεις ισορροπίας σφαίρας και κώνου.

Στην πρώτη περίπτωση η σφαίρα ή ο κώνος ισορροπούν στο οριζόντιο επίπεδο με **ελάχιστα σημεία επαφής**. Αν η σφαίρα ή ο κώνος απομακρυνθούν ελάχιστα από τη θέση ισορροπίας, δεν ξαναγυρίζουν στην αρχική θέση τους. Σ' αυτή την περίπτωση η ισορροπία των σωμάτων ονομάζεται **ασταθής**.

Στη δεύτερη περίπτωση, αν η σφαίρα ή ο κώνος εκτραπούν από τη θέση της αρχικής ισορροπίας τους, ισορροπούν σε μια νέα θέση. Σ' αυτή την περίπτωση η ισορροπία των σωμάτων ονομάζεται **ουδέτερη ή αδιάφορη**.

Τέλος, στην τρίτη περίπτωση, αν η σφαίρα ή ο κώνος απομακρυνθούν λίγο από τη θέση ισορροπίας, ξαναγυρίζουν στην αρχική θέση τους. Σ' αυτή την περίπτωση η ισορροπία των σωμάτων ονομάζεται **ευσταθής**.

Ο βαθμός ευστάθειας ενός σώματος μετριέται με τη γωνία κατά την οποία στρέφεται το σώμα, ώστε να ανατραπεί. Η γωνία αυτή είναι τόσο μεγαλύτερη, όσο χαμηλότερα είναι το κέντρο βάρους του σώματος και φυσικά όσο μεγαλύτερη είναι η βάση στήριξης.



Εικόνα 3.20
Ισορροπία κιβωτίου

Τέλος, ας θεωρήσουμε το κιβώτιο της εικόνας 3.20 και ένα σημείο ανατροπής Α.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο όταν αρχίζει η ανατροπή είναι η αντίδραση F_A στο σημείο Α, το βάρος του Β και η δύναμη F, που ασκούμε, ώστε να ανατρέψουμε το κιβώτιο. Οι ροπές των δυνάμεων αυτών ως προς στο σημείο Α είναι αντίστοιχα:

$M_1 = B \cdot x_1$
$M_2 = F \cdot x_2$
$M_3 = F_A \cdot 0$

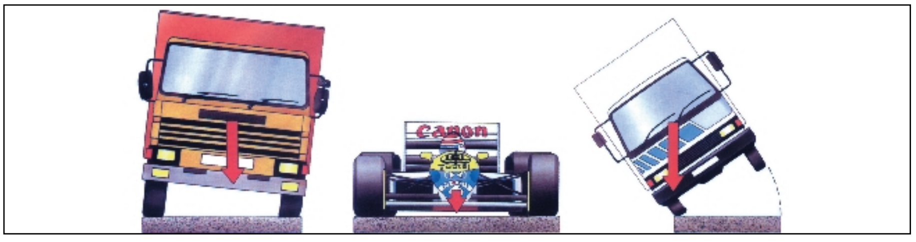
Το πηλίκο των ροπών $$\boxed{\beta = \frac{M_1}{M_2}} \qquad (3.6)$$

ορίζει το **βαθμό ασφάλειας,** προκειμένου το κιβώτιο ή γενικότερα ένα στερεό σώμα να μην ανατραπεί.

Σε μια ευσταθή ισορροπία το πηλίκο αυτό είναι μεγαλύτερο της μονάδας, διότι τότε η ροπή του βάρους είναι μεγαλύτερη από τη ροπή της δύναμης η οποία τείνει να ανατρέψει ένα σώμα. Με την επίδραση της ροπής του βάρους μπορεί το κιβώτιο να επιστρέψει στη θέση ισορροπίας.

΄Υστερα από μελέτες έχει διαπιστωθεί ότι η ισορροπία ενός σώματος είναι περισσότερο ευσταθής, όσο μεγαλύτερη είναι η βάση στήριξής του και επιπλέον όσο πιο χαμηλά είναι το κέντρο βάρους.

Συζητήστε τις παρακάτω περιπτώσεις της εικόνας 3.21.



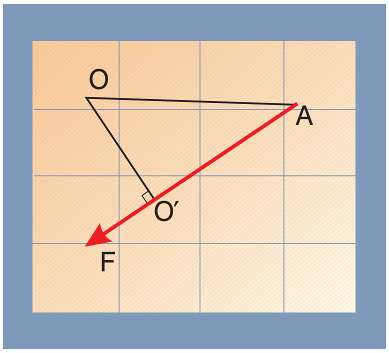
Εικόνα 3.21

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ- ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.1 Το μέτρο της ροπής της δύναμης F ως προς το σημείο Ο είναι:

α. Μ = F . (ΟΑ)
β. Μ = - F. (ΟΑ)
γ. Μ = F (ΟΟ′)
δ. Μ= - F (ΟΟ′)

Ποια από τις παραπάνω προτάσεις είναι η σωστή ;



3.2 Στην πόρτα του δωματίου σου ασκείται δύναμη F, και η πόρτα δεν περιστρέφεται. Αυτό συμβαίνει διότι:

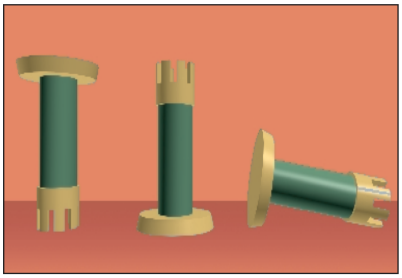
α. Η δύναμη τέμνει τον άξονα περιστροφής.
β. Η δύναμη ασκείται σε μεγάλη απόσταση από τον άξονα περιστροφής.
γ. Η δύναμη είναι παράλληλη προς τον άξονα περιστροφής

Ποιές από τις προτάσεις είναι λανθασμένες.

3.3 Απομακρύνουμε ένα σώμα από τη θέση ισορροπίας του. Αντιστοίχισε τα αποτελέσματα της αριστερής στήλης με τα είδη της ισορροπίας στη δεξιά στήλη:

Αποτελέσματα	**Είδη ισορροπίας**
α. Το σώμα επανέρχεται στην αρχική θέση του.	Ασταθής ισορροπία
β. Το σώμα απομακρύνεται χωρίς επιστροφή.	Ευσταθής ισορροπία
γ. Το σώμα παραμένει ακίνητο στη νέα θέση.	Ουδέτερη ισορροπία

3.4 Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι τρεις θέσεις ενός πύργου από σκάκι. Σημειώστε σε ποια θέση ο πύργος έχει:

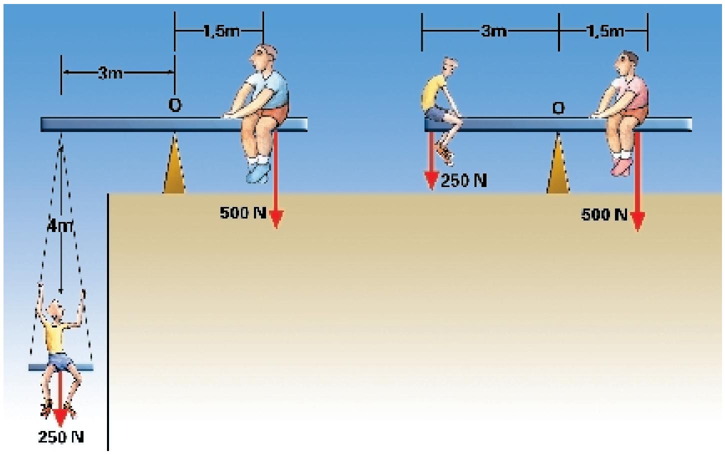


α. Αδιάφορη ισορροπία
β. Ευσταθή ισορροπία
γ. Ασταθή ισορροπία.

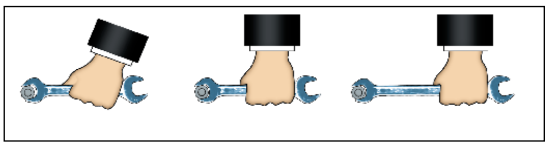
Αιτιολογήστε τις επιλογές σας.

3.5 Πως θα βρείτε το κέντρο βάρους ακανόνιστης πλάκας; Να περιγράψετε τα στάδια που θα ακολουθήσετε.

3.6 Μελετήστε τις δύο περιπτώσεις ισορροπίας, όπως φαίνονται στην παρακάτω εικόνα. Είναι δυνατόν να ισορροπούν οι δύο μπόμπιρες και στις δύο περιπτώσεις;

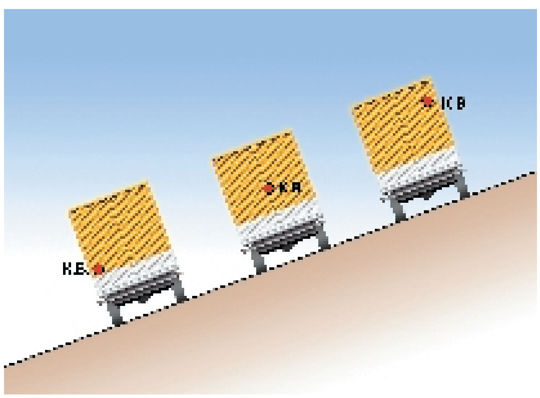


3.7 Ελέγξετε γιατί στα τρία παρακάτω στιγμιότυπα οι ροπές διαφέρουν;

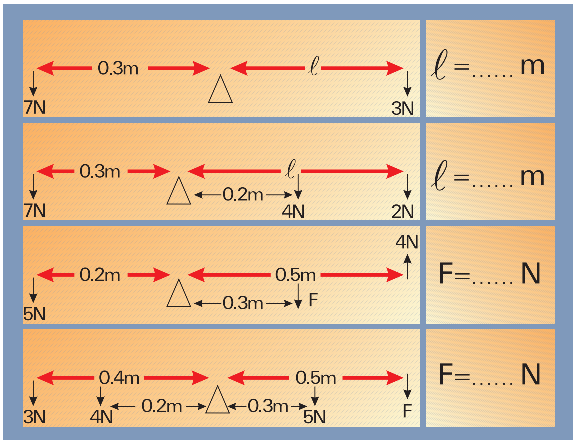


3.8 Γιατί τα λεωφορεία και τα φορτηγά έχουν μεγάλα τιμόνια;

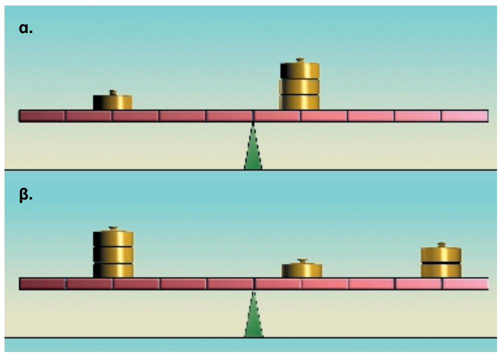
3.9 Τρία φορτηγά αυτοκίνητα έχουν παρκάρει σε έναν ανηφορικό δρόμο. Το κέντρο βάρους των αυτοκινήτων έχει σημειωθεί στις εικόνες. Θα ανατραπεί κάποιο από τα αυτοκίνητα και ποιο/α θα είναι αυτό/α;



3.10 Συμπληρώστε τα κενά στις παρακάτω περιπτώσεις ισορροπίας ενός δοκαριού αμελητέου βάρους:

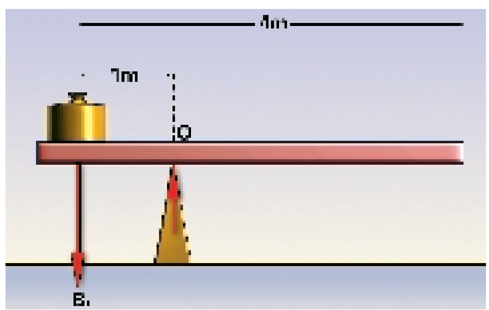


3.11 Στο διπλανό σχήμα ο χάρακας έχει μήκος 50cm και είναι βαθμολογημένος κατά διαστήματα 5cm. Μεταλλικοί δίσκοι έχουν τοποθετηθεί όπως φαίνεται στις περιπτώσεις α και β. Και στις δύο περιπτώσεις ο χάρακας ισορροπεί. Αποδείξτε τον παραπάνω ισχυρισμό με μαθηματικές σχέσεις.

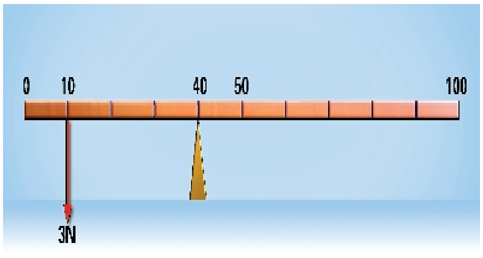


3.12 Η εικόνα 3.3 (σελ. 62) δείχνει τρεις διαφορετικές θέσεις του πεντάλ ενός ποδηλάτου. Εάν το σημείο εφαρμογής της δύναμης στο πεντάλ απέχει από το κέντρο του οδοντωτού δίσκου κατά 20cm και η δύναμη που εφαρμόζεται σε κάθε περίπτωση είναι 25N, πόση είναι η ροπή της δύναμης σε κάθε περίπτωση;

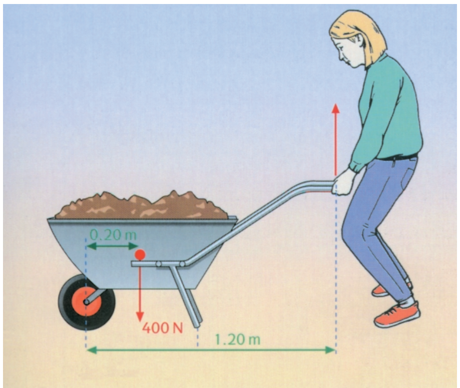
3.13 Το βάρος μιας ομογενούς δοκού είναι 100N. Με την επίδραση του βάρους B_1 ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα. Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:
α. Πόση είναι η ροπή του βάρους Β1;
β. Πόσο είναι το μέτρο του Β1;



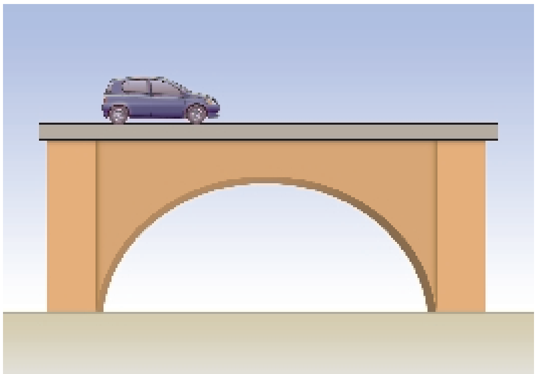
3.14 **Στη διπλανή εικόνα ο χάρακας έχει βάρος 10N και είναι βαθμολογημένος σε εκατοστά. Αν κρεμάσετε ένα βάρος των 3N και στηρίξετε το χάρακα όπως φαίνεται στην εικόνα, τι θα συμβεί;**



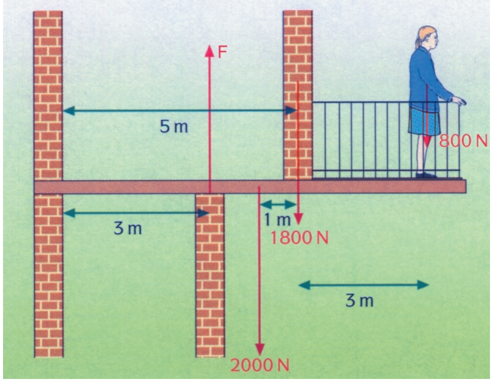
3.15 **Μια κοπέλα κουβαλάει χώμα για τον κήπο της με το καροτσάκι, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Να υπολογίσετε τη δύναμη με την οποία η κοπέλα σηκώνει το καροτσάκι.**



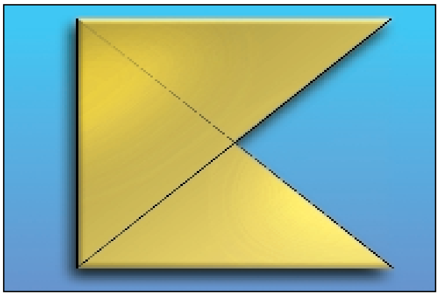
3.16 **Μια γέφυρα έχει βάρος 20.000N, μήκος ℓ και στηρίζεται σε δύο στύλους, όπως φαίνεται στην εικόνα. Στη γέφυρα σταμάτησε ένα αυτοκίνητο Α βάρους 10000N σε απόσταση $\frac{\ell}{4}$ από το αριστερό άκρο. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που δέχονται οι δύο στύλοι. (Η γέφυρα θεωρείται ομογενής).**



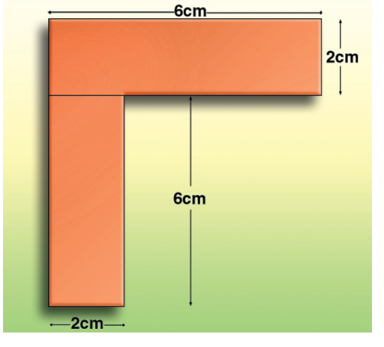
3.17 Υπολογίστε τη δύναμη F που δέχεται η δοκός(υποστήριγμα) στην εικόνα που ακολουθεί.



3.18 Από μια τετράγωνη πλάκα πλευράς 10cm αφαιρείται ένα από τα τέσσερα τρίγωνα που σχηματίζουν οι διαγώνιοί της. Να βρείτε τη θέση του κέντρου βάρους της πλάκας που απέμεινε.



3.19 Μια ομογενής επιφάνεια σε σχήμα Γ έχει τις διαστάσεις που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Να βρείτε το κέντρο βάρους της επιφάνειας.



3.20 Ομογενής ράβδος βάρους B=50N ισορροπεί σε οριζόντια θέση με τη βοήθεια ενός σχοινιού, όπως δείχνει η εικόνα. Στο σημείο K κρέμεται σώμα Σ βάρους B_1 =10N. Αν το μήκος της ράβδου είναι L=4m, η απόσταση AK=3m και η γωνία $\varphi=30^0$, ζητούνται: α) η τάση T του νήματος, β) η δύναμη που ασκεί ο τοίχος στη ράβδο στο σημείο A.