Κεφάλαιο 5

Ανάλυση αλγορίθμων

5.1 Γενικός διδακτικός σκοπός

Ο γενικός σκοπός του κεφαλαίου είναι να κατανοήσουν οι μαθητές τις τεχνικές ανάλυσης των αλγορίθμων και να εξοικειωθούν με την έννοια της πολυπλοκότητας των αλγορίθμων. Ο διδακτικός στόχος είναι να παρουσιασθούν οι λειτουργίες ανάλυσης των αλγορίθμων για συγκεκριμένα είδη προβλημάτων και να γίνουν ικανοί οι μαθητές να αναγνωρίζουν την πολυπλοκότητα των κυριοτέρων ειδών αλγορίθμων.

5.2 Ειδικοί διδακτικοί σκοποί

Μετά την ολοκλήρωση του παρόντος κεφαλαίου, οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση:

- να κατανοήσουν τις τεχνικές ανάλυσης των αλγορίθμων.
- να αναγνωρίσουν τη σημασία της επίδοσης και της αποδοτικότητας των αλγορίθμων.
- να εξοικειωθούν με διαδικασίες ελέγχου της ορθότητας ενός αλγορίθμου.
- να διακρίνουν και να βρίσκουν το είδος πολυπλοκότητας των αλγορίθμων.
- να εξειδικεύουν την ανάλυση αλγορίθμων για λειτουργίες σε συχνά χρησιμοποιούμενα είδη προβλημάτων.

5.3 Οδηγίες – επισημάνσεις

Ιδιαίτερη έμφαση και προσοχή πρέπει να δοθεί στα παρακάτω θεματικά αντικείμενα:

Είναι απαραίτητο να γίνουν αρκετά παραδείγματα για την ανάλυση και την πολυπλοκότητα των αλγορίθμων. Να επισημανθεί ο ρόλος της χειρότερης "στιγμής" (περίπτωσης) ενός αλγορίθμου για την αποτύπωση της πολυπλοκότητας και της αποδοτικότητάς του.

5.4 Προγραμματισμός μαθημάτων κεφαλαίου

Προτεινόμενος αριθμός μαθημάτων

δύο (2) δίωρα μαθήματα

Σχέδιο 1ου μαθήματος

Διδακτικοί στόχοι

- να κατανοήσουν τις τεχνικές ανάλυσης των αλγορίθμων.
- να αναγνωρίσουν τη σημασία της επίδοσης και της αποδοτικότητας των αλγορίθμων.
- να εξοικειωθούν με τις διαδικασίες ελέγχου της ορθότητας ενός αλγορίθμου.

Χώρος υλοποίησης μαθήματος

τάξη

Προτεινόμενα υλικά και εποπτικά μέσα διδασκαλίας

πίνακας, διαφάνειες.

Περιεχόμενα θεωρητικής παρουσίασης

- **Επίδοση αλγορίθμων:** τρόπος εκτίμησης της επίδοσης (ή αποδοτικότητας) των αλγορίθμων.
- **Χειρότερη περίπτωση ενός αλγορίθμου:** παρουσίαση της χειρότερης περίπτωσης ενός αλγορίθμου σε σχέση με το μέγιστο κόστος εκτέλεσης του αλγορίθμου μετρήσιμο σε υπολογιστικούς πόρους.
- **Μέγεθος εισόδου ενός αλγορίθμου:** καθορισμός μεταβλητών που να εκφράζουν το μέγεθος (size) του αλγορίθμου και να απεικονίζουν τους διαφορετικούς συνδυασμούς τιμών που κρίνουν τη συμπεριφορά ενός αλγορίθμου.
- **Χρόνος εκτέλεσης προγράμματος ενός αλγορίθμου:** υπολογισμός του χρόνου εκτέλεσης και της επίδοσης ενός αλγορίθμου με βάση τον αριθμό των πράξεων που θα εκτελεσθούν.
- **Αποδοτικότητα αλγορίθμων:** Επιλογή του αποδοτικότερου αλγορίθμου με βάση το μικρότερο χρόνο εκτέλεσης για την επίλυση ενός προβλήματος.

- **Ορθότητα αλγορίθμων:** τυποποίηση και απόδειξη για την ορθότητα και εγκυρότητα των προτεινόμενων αλγορίθμων.

Περιεχόμενα πρακτικής εφαρμογής

- **Εφαρμογές, παραδείγματα από το βιβλίο του μαθητή:** Θα πρέπει να διδαχθούν οι παράγραφοι 5.1 μέχρι και 5.2 από το βιβλίο του μαθητή. Να απαντηθούν οι ερωτήσεις 1-8 του αντίστοιχου κεφαλαίου από το βιβλίο του μαθητή.
- **Δραστηριότητες από το τετράδιο του μαθητή:** Θα πρέπει να διδαχθούν τα παραδείγματα 1 και 2 από το αντίστοιχο κεφάλαιο από το τετράδιο του μαθητή. Κατ' ελάχιστον θα πρέπει να δοθούν στους μαθητές προς λύση μία από τις δραστηριότητες ΔΤ1 ή ΔΤ2 στην τάξη και μία από τις δραστηριότητες ΔΣ1, ΔΣ2 ή ΔΣ3 για το σπίτι.

Τεστ αξιολόγησης επίδοσης

Συμπληρώστε με σωστό ή λάθος

1. Για την κατανόηση της επίδοσης ενός αλγορίθμου χρειάζεται να απαντηθεί το πρωταρχικά ερώτημα για τον τρόπο υπολογισμού του χρόνου εκτέλεσης ενός αλγορίθμου.
2. Μία βασική πράξη είναι η επανάληψη ενός βρόχου τόσες φορές όσες δίνονται από το συγκεκριμένο όριο τιμών μίας μεταβλητής.
3. Το μέγεθος του αλγορίθμου εκφράζεται από κάποια ή κάποιες μεταβλητές και γενικά τα δεδομένα συνιστούν το μέγεθος της εισόδου ενός αλγορίθμου.
4. Οι βρόχοι επανάληψης δεν αποτελούν σημαντικό κριτήριο για το χαρακτηρισμό της επίδοσης ενός αλγορίθμου.
5. Για να έχει έννοια κάθε σύγκριση μεταξύ δύο προγραμμάτων αλγορίθμων θα πρέπει και τα δύο προγράμματα να έχουν συνταχθεί στην ίδια γλώσσα προγραμματισμού και να χρησιμοποιείται η ίδια υπολογιστική πλατφόρμα
6. Δεν είναι απαραίτητο να συνοδεύεται το στάδιο της ανάλυσης και της σχεδίασης του αλγορίθμου από τον αντίστοιχο έλεγχο της ορθότητάς του.

Επιλέξτε μεταξύ των προτεινόμενων μία σωστή απάντηση

7. Για την κατανόηση της επίδοσης ενός αλγορίθμου χρειάζεται να απαντηθεί ένα σύνολο ερωτημάτων. Ένα από τα πρωταρχικά ερωτήματα που προκύπτουν είναι:

   α) πώς υπολογίζεται ο χρόνος για την ανάγνωση ενός αλγορίθμου;

   β) πώς μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους οι διάφοροι τρόποι εξόδου δεδομένων για ένα αλγόριθμο;

   γ πώς μπορεί να γνωρίζει κανείς αν ένας αλγόριθμος είναι βέλτιστος;

   δ) πώς μπορεί να επιλεγεί ο κατάλληλος υπολογιστής για έναν αλγόριθμο ;

8. Μία βασική πράξη μπορεί να είναι:

   α) ανάθεση γλώσσας προγραμματισμού,

   β) σύγκριση μεταξύ δύο μεταβλητών

   γ) επιλογή 10 μεταβλητών

   δ) βρόχος επανάληψης

9. Πρέπει να υπάρχει κάποια ή κάποιες μεταβλητές που να εκφράζουν το μέγεθος του αλγορίθμου. Γενικά, το μέγεθος της εισόδου ενός αλγορίθμου συνίσταται από:

   α) αριθμό εντολών β) δεδομένα

   γ) αριθμό γραμμών δ) αριθμό βρόχων

10. Για να μπορεί να γίνει σύγκριση μεταξύ δύο προγραμμάτων αλγορίθμων θα πρέπει να ικανοποιείται μία από τις παρακάτω προϋποθέσεις:

    α) και τα δύο προγράμματα να έχουν συνταχθεί στην ίδια γλώσσα προγραμματισμού,

    β) να έχει χρησιμοποιηθεί ο ίδιος αριθμός βρόχων σε κάθε πρόγραμμα

    γ) ο μεταφραστής της γλώσσας προγραμματισμού να είναι διαφορετικός για κάθε πρόγραμμα

    δ) να μη χρησιμοποιείται η ίδια υπολογιστική πλατφόρμα,

11. Στο πρόβλημα της ταξινόμησης το μέγεθος της εισόδου του αλγορίθμου είναι
    α) το πλήθος των αντικειμένων που θα ταξινομηθούν
    β) ο αριθμός των βρόχων επανάληψης
    γ) ο αριθμός των βασικών πράξεων
    δ) α αριθμός των συγκρίσεων που θα γίνουν
12. Η απόδειξη της ορθότητας ενός αλγορίθμου θα πρέπει να περιλαμβάνει κάποια από τις παρακάτω συνθήκες:
    α) υπόθεση ότι κάθε τερματισμός της εκτέλεσης του αλγορίθμου οδηγεί σε αποδεκτά αποτελέσματα
    β) απόδειξη ότι θα υπάρξει τερματισμός της εκτέλεσης του αλγορίθμου
    γ) εκτίμηση του αριθμού των βρόχων επανάληψης του αλγορίθμου
    δ) απόδειξη ότι ο αλγόριθμος εξαρτάται από το συγκεκριμένο υπολογιστή.

Απαντήσεις τεστ αξιολόγησης επίδοσης

1:σωστό	7: γ
2:λάθος	8: β
3:σωστό	9: β
4:λάθος	10: α
5:σωστό	11: α
6:λάθος	12: β

Σχέδιο 2ου μαθήματος

Διδακτικοί στόχοι

- να διακρίνουν και να βρίσκουν το είδος πολυπλοκότητας των αλγορίθμων.
- να εξειδικεύουν την ανάλυση αλγορίθμων για λειτουργίες σε συχνά χρησιμοποιούμενα είδη προβλημάτων.

Χώρος υλοποίησης μαθήματος

τάξη

Προτεινόμενα υλικά και εποπτικά μέσα διδασκαλίας

πίνακας, διαφάνειες.

Περιεχόμενα θεωρητικής παρουσίασης

- **Πολυπλοκότητα αλγορίθμων.** Κατανόηση της σημασίας της πολυπλοκότητας για την αξιολόγηση αλγορίθμων.
- **Ανάλυση αλγορίθμων.** Εξήγηση του σημαντικού ρόλου της ανάλυσης αλγορίθμων για τη μελέτη της επίδοσης των αλγορίθμων.
- **Είδη αλγορίθμων.** Παρουσίαση της πολυπλοκότητας των κυριοτέρων ειδών αλγορίθμων που έχουν παρουσιασθεί σε προηγούμενα κεφάλαια.
- **Επανάληψη των εννοιών που διδάχθηκαν – Ανακεφαλαίωση**

Περιεχόμενα πρακτικής εφαρμογής

- **Εφαρμογές, παραδείγματα από το βιβλίο του μαθητή.** Θα πρέπει να διδαχθούν οι παράγραφοι 5.3 μέχρι και 5.4 από το βιβλίο του μαθητή. Να απαντηθούν οι ερωτήσεις 9-13 του αντίστοιχου κεφαλαίου από το βιβλίο του μαθητή.
- **Δραστηριότητες από το τετράδιο του μαθητή.** Θα πρέπει να διδαχθούν τα παραδείγματα 3 και 4 του αντίστοιχου κεφαλαίου από το τετράδιο του μαθητή. Κατ' ελάχιστον θα πρέπει να δοθούν στους μαθητές προς λύση μία από τις δρασητριότητες ΔΤ3 ή ΔΤ4, και μία από τις δραστηριότητες ΔΣ4 ή ΔΣ5.

Τεστ αξιολόγησης επίδοσης

Συμπληρώστε με σωστό ή λάθος

1. Ένας τρόπος εκτίμησης της επίδοσης ενός αλγορίθμου είναι ο θεωρητικός ή αλλιώς «εκ των προτέρων» όπου χρησιμοποιείται μία μεταβλητή που εκφράζει το μέγεθος του προβλήματος.

2. Αν η πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου είναι f(n), τότε λέγεται ότι είναι τάξης O(g(n)) αν υπάρχουν δύο θετικοί ακέραιοι c και n_0, έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει: $|f(n)| \leq c\ |g(n)|$.
3. Η πολυπλοκότητα της Ταξινόμησης ευθείας ανταλλαγής είναι O(n).
4. Πολυωνυμικοί λέγονται οι αλγόριθμοι με πολυπλοκότητα που φράσσεται από κάτω με μία πολυωνυμική έκφραση.
5. Η πολυπλοκότητα της Δυαδικής αναζήτησης είναι O(logn).
6. O(n) είναι η γραμμική πολυπλοκότητα που θεωρείται η καλύτερη επίδοση για έναν αλγόριθμο που πρέπει να εξετάσει ή να δώσει στην έξοδο n στοιχεία.

Συμπλήρωσε τα κενά με το σωστή λέξη που λείπει

7. Ο _____________ τρόπος εκτίμησης της επίδοσης ενός αλγορίθμου εισάγει μία μεταβλητή που εκφράζει το μέγεθος του προβλήματος, ώστε η μέτρηση της αποδοτικότητας του αλγόριθμου να ισχύει για οποιοδήποτε σύνολο δεδομένων και ανεξάρτητα από υποκειμενικούς παράγοντες.
8. _________________ λέγονται οι αλγόριθμοι με πολυπλοκότητα που φράσσεται από επάνω με μία πολυωνυμική έκφραση.
9. Όταν σε έναν αλγόριθμο κάθε εντολή του προγράμματος του εκτελείται μία φορά ή το πολύ μερικές μόνο φορές ο αλγόριθμος είναι ________________ πολυπλοκότητας.

Απαντήσεις τεστ αξιολόγησης επίδοσης

1:σωστό	4:λάθος	7: θεωρητικός
2:λάθος	5:σωστό	8: πολυωνυμικός
3:λάθος	6:σωστό	9:σταθερής

5.5 Προβληματισμοί και θέματα προς συζήτηση

- Να γίνει σαφές ότι για κάθε αλγόριθμο μπορεί να προκύψει μία συνάρτηση που να δίνει επακριβώς τον αριθμό των συγκρίσεων, τον αριθμό των αντιμεταθέσεων κοκ. Ωστόσο, σημαντικό είναι η **ποιοτική** συμπεριφορά του αλγορίθμου, που δηλώνεται με το συμβολισμό Ο. Είναι καλό ο προγραμματιστής να προσέχει ώστε να επιτύχει την πιο αποτελεσματική κωδικοποίηση ενός αλγορίθμου, αλλά αν ο αλγόριθμος δεν είναι ο καλύτερος δυνατός σε σχέση με το δεδομένο πρόβλημα, τότε η προσπάθεια βελτιστοποίησης του κώδικα είναι μάταιη.

- Σημαντικό, επίσης, ζήτημα είναι η απόδειξη ορθότητας, που αποτελεί μία επαγγελματική πρακτική κατά την κατασκευή μεγάλων και σύνθετων προγραμμάτων. Η ανάπτυξη ενός προγράμματος δεν τελειώνει με την πρώτη απόπειρα κωδικοποίησης αλλά περνά από πολλές φάσεις ελέγχου. Σε όλες τις φάσεις απαραίτητη είναι η ύπαρξη τεκμηρίωσης.

5.6 Προτεινόμενες πηγές πληροφόρησης

Όλη η προτεινόμενη βιβλιογραφία του κεφαλαίου, όπως καταγράφεται στο βιβλίο του μαθητή.

5.7 Απαντήσεις ερωτήσεων βιβλίου μαθητή

1. Δες αρχή παραγράφου 5.1
2. Δες παράγραφο 5.1
3. Δες παράγραφο 5.1
4. Δες παράγραφο 5.1
5. Δες παράγραφο 5.1
6. Αποδοτικότητα αλγορίθμου είναι μία έννοια που εκφράζει τη χρήση των υπολογιστικών πόρων (χώρος και χρόνος) από τον αλγόριθμο και αποτελεί το γενικότερο κριτήριο σύγκρισης αλγορίθμων. Έτσι αν ο αλγόριθμος Β δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με τον αλγόριθμο Α, αλλά σε λιγότερο χρόνο ή με χρήση λιγότερης μνήμης, τότε είναι αποδοτικότερος του Α.
7. Δες παράγραφο 5.2.
8. Δες παράγραφο 5.2.

9. Δες παράγραφο 5.3.
10. Δες παράγραφο 5.3.
11. Δες παράγραφο 5.3.2
12. Δες παράγραφο 5.3.2 και δραστηριότητες ΔΤ3 κα ΔΤ4 κεφαλαίου 3
13. Δες παράγραφο 5.4.

5.8 Απαντήσεις δραστηριοτήτων τετραδίου μαθητή

➤ Στην τάξη

ΔΤ1.

1. Το κομμάτι του αλγορίθμου είναι ένας απλός βρόχος. Ο αριθμός των πράξεων είναι n/2, άρα η πολυπλοκότητα είναι O(n).
2. Το κομμάτι είναι ένας διπλός/εμφωλευμένος βρόχος. Ο αριθμός των πράξεων προκύπτει με τον υπολογισμό του διπλού αθροίσματος

   $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1=\sum_{i=1}^{n}n=n^2$$

   Άρα, η πολυπλοκότητα είναι $O(n^2)$.
3. Παρόμοια περίπτωση με την προηγούμενη.

   $$\sum_{i=1}^{n/2}\sum_{j=1}^{n}1=\sum_{i=1}^{n/2}n=n^2\ /\ 2$$

   Άρα, η πολυπλοκότητα είναι $O(n^2)$

Γενικά, ισχύει ότι κάθε απλός βρόχος έχει γραμμική πολυπλοκότητα, κάθε διπλός βρόχος έχει τετραγωνική πολυπλοκότητα κοκ.

ΔΤ 2:

Απαιτείται ένας μονοδιάστατος πίνακας donation (έστω 30 θέσεων), όπου να είναι αποθηκεύονται τα διάφορα ποσά των δωρεών. Αυτός ο πίνακας πρέπει να σαρωθεί ώστε να αθροισθούν τα επιμέρους ποσά σε ένα συνολικό ποσό sum.

```
Αλγόριθμος Δωρεές_SOS
Δεδομένα // donation //
sum ← 0
Για i από 1 μέχρι 30
   sum ← sum+donation[i]
Τέλος_επανάληψης
Εκτύπωσε sum
Τέλος Δωρεές_SOS
```

Ο αλγόριθμος αυτός είναι ουσιαστικά μία γραμμική διαδικασία. Η πολυπλοκότητα είναι O(n).

ΔΤ 3:

Η παραλλαγή αυτή του αλγορίθμου υπολογισμού αριθμών Fibonacci είναι αρκετά πολύπλοκη στην κατανόηση των λειτουργιών της. Ωστόσο η ανάλυση της πολυπλοκότητάς της είναι εύκολη. Ουσιαστικά, το ειδικός βάρος του αλγορίθμου βρίσκεται στην επαναλητική δομή "Επανάλαβε όσο n΄)΄0 ...". Μέσα στη δομή αυτή, το n υποδιαιρείται συνεχώς με την εντολή "n DIV 2". Έτσι ο αριθμός των επαναλήψεων του βρόχου αυτού είναι O(logn). Παρόμοια είναι και η εξήγηση στην άσκηση ΔΣ3 (δες στη συνέχεια), σχετικά με την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου της δυαδικής αναζήτησης.

ΔΤ 4:

Έστω ότι τα δεδομένα αποθηκεύονται σε μία δομή δισδιάστατου πίνακα, όπου κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μία ταινία, ενώ μία στήλη του πίνακα κρατά τη χρονιά παραγωγής. Το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί απλά σαρώνοντας κάθε γραμμή του πίνακα και ελέγχοντας την τιμή της αντίστοιχης στήλης. Έτσι αν η τιμή είναι 1960, τότε τα στοιχεία της ταινίας/γραμμής θα δίνοναι στο χρήστη, αλλιώς ο έλεγχος θα προχωρεί στην επόμενη γραμμή. Μία τέτοια διαδικασία είναι γραμμική.

➤ *Στο σπίτι*

ΔΣ 1:

1. Το κομμάτι του αλγορίθμου είναι ένας απλός βρόχος n=100 επαναλήψεων. Άρα, η πολυπλοκότητα είναι γραμμική O(n).
2. Όπως και στην περίπτωση (1) της δραστηριότητας ΔΤ1, το κομμάτι είναι ένας απλός βρόχος, όπου εκτελούνται n-1 επαναλήψεις. Άρα. η πολυπλοκότητα είναι O(n).
3. Παρόμοια περίπτωση με την προηγούμενη. Ο αριθμός των επαναλήψεων του απλού βρόχου είναι (n-1)/3, άρα. η πολυπλοκότητα είναι O(n).

ΔΣ 2:

Σύμφωνα (μεταξύ των άλλων) με τις ασκήσεις ΔΤ1 και ΔΣ1, προκύπτει εύκολα ότι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι γραμμική O(n).

ΔΣ 3:

Στο κυρίως σώμα του αλγορίθμου Δυαδική_Αναζήτηση (παράγραφος 4.3 τετραδίου μαθητή) υπάρχει μία επαναληπτική δομη. Ανάλογα με το αποτέλεσμα της σύγκρισης "ΚΑΤ[mid]΄(΄ΟΝΟΜΑ", θα εκτελεσθεί ένας από τους τρεις κλάδους που έχουν σταθερό κόστος. Επομένως το ερώτημα είναι πόσες φορές θα επαναληφθεί η εντολή "Αν" μέσα στο βρόχο. Αυτό μπορεί να προκύψει παρατηρώντας ότι κάθε φορά το σχετικό διάστημα (high-low) συνεχώς υποδιπλασιάζεται. Ο μέγιστος αριθμός υποδιπλασιασμών είναι log(high-low). ΄Ετσι προκύπτει ότι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι O(logn). Συνεπώς σε ένα πίνακα 10 θέσεων, η δυαδική αναζήτηση τερματίζει με τέσσερις προσπάθειες στη χειρότερη περίπτωση.

ΔΣ 4:

Ο αλγόριθμος που δίνεται στην εκφώνηση είναι ο κλασικός αλγόριθμος ταξινόμησης με ευθεία ανταλλαγή. ΄Οπως είναι γνωστό, η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι τετραγωνική O(n^2). Άλλωστε, αυτό αποδεικνύεται και από το γεγονός της ύπαρξης των δύο εμφωλευμένων βρόχων. Ο αλγόριθμος του Παραδείγματος

2 είναι επίσης τετραγωνικός. Αν και τα όρια των επαναλήψεων των βρόχων είναι διαφορετικά κατά μία μονάδα (n-1 αντί n), η διαφορά αυτή είναι ασήμαντη και δεν επηρεάζει την ποιοτική ομοιότητα των δύο αλγορίθμων.

ΔΣ 5:

Έστω ότι συχνά εκτελούνται αναζητήσεις του τύπου «Βρες τις ταινίες του έτους 19??». Στην περίπτωση αυτή αξίζει τον κόπο να έχουμε τον πίνακα ταξινομημένο ως προς τη χρονολογία παραγωγής. Αυτό θα συμβεί χρησιμοποιώντας κάποια από τις μεθόδους ταξινόμησης. Όταν, λοιπόν, ο πίνακας είναι ταξινομημένος ως προς τη χρονολογία παραγωγής, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και πάλι η γραμμική μέθοδος αναζήτησης. Όμως στην περίπτωση αυτή, όταν φθάσουμε σε μία ταινία με χρονολογία παραγωγής μεγαλύτερη από τη ζητούμενη, τότε η αναζήτηση σταματά και δεν συνεχίζει μέχρι το τέλος του πίνακα. Η μετατροπή του αλγορίθμου γραμμικής αναζήτησης για να την περίπτωση των ταξινομημένων δεδομένων είναι εύκολη υπόθεση.

5.9 Συμπληρωματικά στοιχεία

Ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος: ομαδοποίηση σε κιβώτια.

Το πρόβλημα της ομαδοποίησης σε κιβώτια ορίζεται ως εξής. Δίνονται n αντικείμενα και κιβώτια μέγιστης χωρητικότητας C κιλών. Το κάθε αντικείμενο έχει βάρος l_i κιλών, όπου $l_i < C$ για $1 \leq i \leq n$. Ζητείται η τοποθέτηση των n αντικειμένων αυτών στον ελάχιστο αριθμό κιβωτίων, δεδομένου ότι κάθε αντικείμενο μπορεί να τοποθετηθεί σε ένα και μόνο ένα κιβώτιο.

Έστω ότι n = 6 και c = 100, ενώ τα βάρη των αντικειμένων είναι 50, 60, 30, 70, 50 και 40 αντίστοιχα. Για να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός κιβωτίων που μπορεί να χωρέσει τα αντικείμενα απαιτείται να γίνουν δοκιμές για όλους τους δυνατούς τρόπους. Το σύνολο των δυνατών τρόπων που πρέπει να εξετασθούν είναι n! = 6! = 120, αριθμός που προκύπτει θεωρώντας τις αντίστοιχες διατάξεις των n αντικειμένων. Αν το n είναι μικρός ακέραιος, τότε ίσως είναι εφικτό να γίνουν όλες οι σχετικές δοκιμές ώστε να βρεθεί η καλύτερη λύση, η λεγόμενη *βέλτιστη* (optimal). Ωστόσο, είναι ευνόητο ότι όταν το n είναι ιδιαίτερα μεγάλο, π.χ. 1000, τότε το σύνολο των δυνατών τρόπων που προκύπτει είναι ένας πραγματικά τεράστιος αριθμός (δηλαδή 1000!), οπότε η δοκιμή όλων των σχετικών διατάξεων απαιτεί τεράστιους υπολογιστικούς πόρους. Σε μία τέτοια περίπτωση συχνά ζητείται να βρεθεί όχι η βέλτιστη λύση αλλά μία *υποβέλτιστη* (suboptimal) που εγγυημένα θα προσεγγίζει τη βέλτιστη ικανοποιητικά, η οποία να προκύπτει από έναν αλγόριθμο που δεν είναι ιδιαίτερα χρονοβόρος.

Θεωρώντας και πάλι τις τιμές του συγκεκριμένου παραδείγματος, μπορεί εύκολα να προκύψει ότι ο ελάχιστος αριθμός κιβωτίων είναι 3. Για παράδειγμα, το 1ο με το 5ο, το 2ο με το 6ο και το 3ο με το 4ο αντικείμενο μπορούν να συνδυασθούν σε τρία ζεύγη, όπου το βάρος του κάθε ζεύγους είναι ίσο με 100 κιλά, όσο δηλαδή και η χωρητικότητα των κιβωτίων.

Γενικά, στο πρόβλημα αυτό έχουν δοθεί ως απάντηση πολλοί προσεγγιστικοί αλγόριθμοι. Στη συνέχεια θα εξετασθεί ένας από αυτούς, που στην αγγλική βιβλιογραφία συναντάται με τη μνημονική ονομασία first fit. Η ονομασία αυτή προκύπτει από τη φιλοσοφία, στην οποία στηρίζεται ο αλγόριθμος. Με απλά λόγια, λοιπόν, ο αλγόριθμος θεωρεί ότι τα κιβώτια και τα αντικείμενα είναι αριθμημένα. Έτσι λαμβάνοντας κάθε αντικείμενομε τη σειρά, προσπαθεί να το βάλει στο κιβώτιο με το μικρότερο αύξοντα αριθμό που έχει διαθέσιμο χώρο. Ο επόμενος αλγόριθμος περιγράφει καλύτερα αυτή τη μέθοδο της λύσης.

Αλγόριθμος: Τοποθέτηση αντικειμένου στην πρώτη διαθέσιμη θέση όπου ταιριάζει .	
Είσοδος:	Αριθμός αντικειμένων n. Χωρητικότητα κιβωτίου C. Βάρος κάθε αντικειμένου l_i, όπου $l_i < C$ για $1 \le i \le n$.
Έξοδος:	Πλήθος απαραίτητων κιβωτίων X.
Βήμα 1	Αρίθμησε τα αντικείμενα 1,2,...,n.
Βήμα 2	Αρίθμησε τα κιβώτια 1,2,...,m.
Βήμα 3	Θέσε i=1. Θέσε j=1. Θέσε X=1.
Βήμα 4	Αν το i-οστό αντικείμενο χωρά στο j-οστό κιβώτιο, τότε τοποθέτησέ το εκεί, ανανέωσε τη διαθέσιμη χωρητικότητα του κιβωτίου και πήγαινε στο Βήμα 6, αλλιώς θέσε j=j+1.
Βήμα 5	Αν j>X, τότε θέσε X=j και πήγαινε στο Βήμα 4.
Βήμα 6	Θέσε i=i+1.
Βήμα 7	Αν i ≤ n πήγαινε στο Βήμα 4 αλλιώς πήγαινε στο Βήμα 8.
Βήμα 8	Τύπωσε τον X.

Αν ο αναγνώστης υλοποιήσει τον προσεγγιστικό υποβέλτιστο αυτόν αλγόριθμο με κάποια γλώσσα προγραμματισμού και δοκιμάσει το πρόγραμμα με τα προηγούμενα δεδομένα, τότε θα διαπιστώσει ότι απαιτούνται 4 κιβώτια που θα περιέχουν τα αντικείμενα με αρίθμηση (1,3), (2,6), (4) και (5) αντίστοιχα. Έτσι για το συγκεκριμένο παράδειγμα απαιτείται ένα μόνο περισσότερο κιβώτιο σε σχέση με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό κιβωτίων. Στο σημείο αυτό αναφέρεται ότι στη γενική περίπτωση ο αριθμός των κιβωτίων που θα προκύψει με τη μέθοδο first-fit είναι στη χειρότερη περίπτωση περίπου 70% μεγαλύτερος από τον ελάχιστο δυνατό αριθμό.