# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

# ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

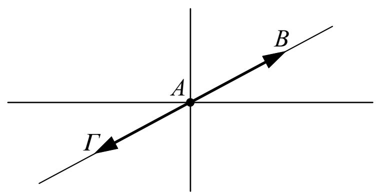
## 3.1 Βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη

Στην καθημερινή ζωή συναντούμε διάφορα μεγέθη, όπως είναι το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος, το εμβαδό ενός σχήματος, ο όγκος και η μάζα ενός σώματος, η ταχύτητα ενός κινητού, η δύναμη που εξασκείται σ' ένα σώμα κλπ.

Μερικά μεγέθη, για να τα κατανοήσουμε πλήρως, αρκεί ένας αριθμός, το μέτρο τους, που εκφράζει με πόσες μονάδες ισούνται: Για παράδειγμα, το ύψος του Γιάννη είναι 178 cm, η θερμοκρασία χτες ήταν $32^o$ C. Τα μεγέθη αυτά λέγονται **βαθμωτά** μεγέθη. Υπάρχουν όμως και μεγέθη, όπως η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός κινητού, η μετατόπιση ενός σώματος, η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα κτλ., για τον καθορισμό των οποίων απαιτούνται και άλλα στοιχεία. Τα παραπάνω μεγέθη λέγονται **διανυσματικά μεγέθη**.

## 3.2 Διανύσματα – Βασικές έννοιες

Έστω ότι ένα αεροπλάνο που κινείται σε ευθεία πορεία με ταχύτητα 500 km/h και βρίσκεται στο σημείο Α τη χρονική στιγμή t. Είναι φανερό ότι μόνο με το μέτρο της ταχύτητας δεν είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τη θέση του αεροπλάνου μετά από μια ώρα, αφού θα πρέπει να γνωρίζουμε ακόμα:



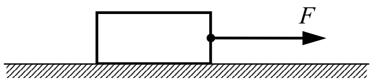

(α) Την ευθεία πάνω στην οποία κινείται, δηλαδή να ξέρουμε τη **διεύθυνση** της κίνησης.

(β) Πώς κινείται πάνω στην ευθεία. Με άλλα λόγια, πρέπει να μας πούνε ότι κινείται από από το Α στο Β ή από το Α στο Γ σημείο της ευθείας. Μας ενδιαφέρει, δηλαδή, να ξέρουμε τη **φορά** της κίνησης.

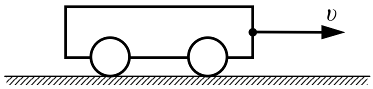
Τέτοια μεγέθη τα οποία, για να καθοριστούν πλήρως, χρειάζεται, εκτός από το **μέτρο** τους, και η **διεύθυνση** και η **φορά** τους λέγονται **διανυσματικά μεγέθη**.

Παραδείγματα διανυσματικών μεγεθών:

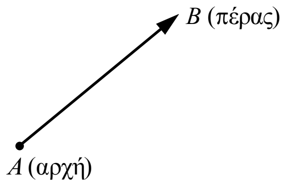
1) Η δύναμη που ασκείται σ' ένα σώμα.




2) Η ταχύτητα ενός κινητού.

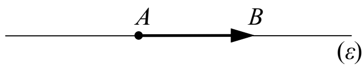



Γεωμετρικά ένα διάνυσμα παρίσταται με ένα ευθύγραμμο τμήμα τα άκρα του οποίου θεωρούνται το ένα ως αρχή και το άλλο ως πέρας. Έτσι ένα διάνυσμα με άκρα Α(αρχή) και Β (πέρας) θα συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$.




Για το συμβολισμό των διανυσμάτων χρησιμοποιούμε και μικρά γράμματα, για παράδειγμα, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, κ.λ.π.

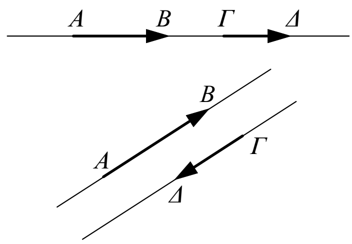
Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ λέγεται φορέας του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.




Κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ καθορίζεται από:

(α) Από τη **διεύθυνσή** του, που είναι η διεύθυνση του φορέα του.
(β) Από τη **φορά** του, που είναι από το Α προς το Β.
(γ) Από το **μέτρο** του που είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και συμβολίζεται με $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Είναι φανερό ότι $\left|\overrightarrow{AB}\right| \geq 0$.

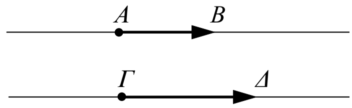
### Παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα



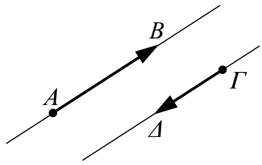

Δύο διανύσματα που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς λέγονται παράλληλα ή συγγραμικά διανύσματα και δηλώνουμε με το σύνολο «//».Στο διπλανό σχήμα είναι $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Δύο συγγραμικά διανύσματα έχουν την **ίδια διεύθυνση**.

Τα συγγραμικά διανύσματα διακρίνονται σε ομόρροπα και αντίρροπα.

**Ομόρροπα** είναι τα διανύσματα που έχουν την ίδια φορά και δηλώνονται με το σύμβολο «$\uparrow\uparrow$». Έτσι στο διπλανό σχήμα είναι $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.




**Αντίρροπα** είναι τα διανύσματα που έχουν αντίθετη φορά και δηλώνονται με το σύμβολο «$\uparrow\downarrow$». Στο διπλανό σχήμα είναι $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ .



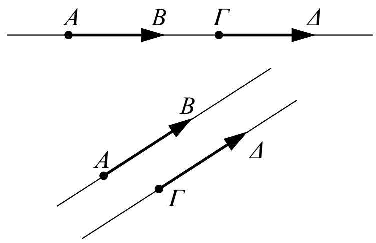

Ώστε: Τα ομόρροπα διανύσματα έχουν την ίδια διεύθυνση και την ίδια φορά, ενώ τα αντίρροπα διανύσματα έχουν την ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά.

Δύο διανύσματα λέγονται **ίσα,** όταν έχουν:

α) Την ίδια διεύθυνση,

β) την ίδια φορά,

γ) το ίδιο μέτρο.



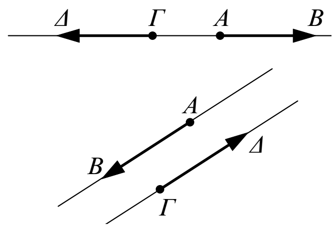

Στο διπλανό σχήμα είναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

Δύο διανύσματα λέγονται **αντίθετα**, όταν έχουν:

α) Την ίδια διεύθυνση,

β) αντίθετη φορά,

γ) το ίδιο μέτρο.




Για παράδειγμα, για να δηλώσουμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα, γράφουμε:

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta} \quad \text{ή} \quad \overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\overrightarrow{AB}.$$

Όταν τα άκρα ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ταυτίζονται, τότε το διάνυσμα λέγεται μηδενικό διάνυσμα και το συμβολίζουμε με $\vec{0}$. Ένα μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ έχει:

(α) Φορέα οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από το Α και

(β) μέτρο μηδέν.

Έτσι, το μηδενικό διάνυσμα μπορεί να θεωρηθεί συγγραμμικό και ομόρροπο προς κάθε άλλο διάνυσμα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ή λανθασμένη. Αν είναι σωστή, κυκλώστε το γράμμα Σ, αν είναι λάθος, κυκλώστε το γράμμα Λ.

(α) Το μέτρο ενός διανύσματος είναι μη αρνητικός αριθμός. Σ Λ
(β) Δυο διανύσματα ομόρροπα έχουν ίσα μέτρα. Σ Λ
(γ) Τα αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετα μέτρα . Σ Λ
(δ) Τα αντίθετα διανύσματα είναι αντίρροπα. Σ Λ
(ε) Το μηδενικό διάνυσμα έχει μέτρο μηδέν. Σ Λ
(ζ) Αν $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\overrightarrow{AB}$ . Σ Λ
(η) Τα αντίρροπα διανύσματα έχουν ίδια διεύθυνση. Σ Λ

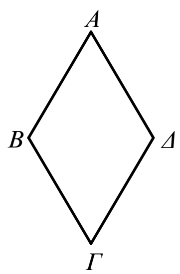
**2.** Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσα, όταν:

Α) $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ Β) $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ Γ) $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$

Δ) $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ και $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ Ε) Τίποτα από τα προηγούμενα.

**3.** Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. Σε κάθε περίπτωση κυκλώστε τη σωστή απάντηση.

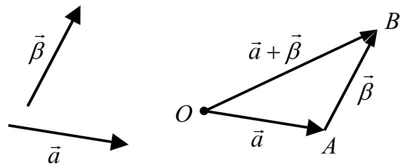
1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ Σ Λ
2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Delta}$ Σ Λ
3) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Delta}$ Σ Λ
4) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{\Delta\Gamma}|$ Σ Λ
5) $|\overrightarrow{B\Delta}| = |\overrightarrow{A\Gamma}|$ Σ Λ



## 3.3 Πράξεις με διανύσματα

### Πρόσθεση διανυσμάτων

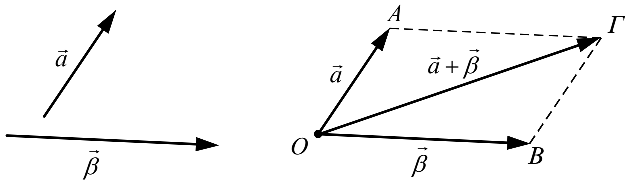
Έστω δυο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο Ο παίρνουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και στη συνέχεια με αρχή το Α παίρνουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$. Τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{AB}$ λέγονται διαδοχικά διανύσματα. Το



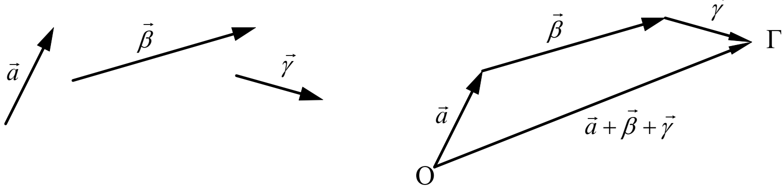

διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$ λέγεται άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και συμβολίζεται με $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Η πράξη με την οποία βρίσκουμε το άθροισμα δυο διανυσμάτων λέγεται **πρόσθεση** διανυσμάτων.

Η πρόσθεση δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μπορεί να γίνει και με τη **μέθοδο του παραλληλογράμμου**, ως εξής:

Με κοινή αρχή ένα σημείο Ο θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$.




Ο κανόνας της πρόσθεσης δύο διανυσμάτων εφαρμόζεται και για τον υπολογισμό αθροίσματος περισσότερων από δύο διανυσμάτων. Για να προσθέσουμε, για παράδειγμα, τρία διανύσματα $\vec{\alpha}$ , $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$



γράφουμε τρία διαδοχικά διανύσματα ίσα με αυτά, οπότε το διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\delta}$, με αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου, είναι το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ , $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$.

Σχηματίζουμε στη συνέχεια το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ. Η διαγώνιος του ΟΓ δίνει το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, δηλαδή $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

### Ιδιότητες της πρόσθεσης διανυσμάτων

Για την πρόσθεση διανυσμάτων ισχύουν οι πιο κάτω ιδιότητες.

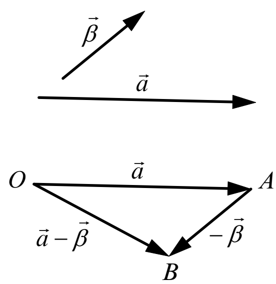
| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$ | (αντιμεταθετική) |
| 2. | $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ | (προσεταιριστική) |
| 3. | $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$ | (ουδέτερο στοιχείο) |
| 4. | $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$ | (αντίθετα διανύσματα) |

**Παρατήρηση:**

Επειδή ισχύει η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα στην πρόσθεση διανυσμάτων, το άθροισμα διανυσμάτων είναι το ίδιο, ανεξάρτητα από τον τρόπο που θα εκτελεστεί η πρόσθεση. Δεν ενδιαφέρει, δηλαδή, η σειρά με την οποία θα προσθέσουμε τα διανύσματα.

### Αφαίρεση διανυσμάτων

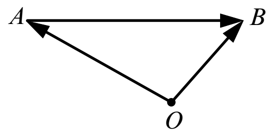
Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Ονομάζουμε διαφορά του $\vec{\beta}$ από το $\vec{\alpha}$ και τη συμβολίζουμε με $\vec{\alpha}$ - $\vec{\beta}$ το διάνυσμα: $\vec{\alpha}$ - $\vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$. Δηλαδή, διαφορά του $\vec{\beta}$ από το $\vec{\alpha}$ είναι το διάνυσμα που παίρνουμε, όταν προσθέσουμε στο $\vec{\alpha}$ το αντίθετο του $\vec{\beta}$. (βλέπε διπλανό σχήμα).



Η πράξη με την οποία βρίσκουμε τη διαφορά $\vec{\alpha}$ - $\vec{\beta}$ δύο οποιωνδήποτε διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ λέγεται **αφαίρεση διανυσμάτων**.

Έστω τώρα $\overrightarrow{AB}$ ένα οποιοδήποτε διάνυσμα και Ο σημείο του χώρου. Τότε έχουμε: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$,

δηλαδή $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}$




Η τελευταία σχέση μας λέει ότι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μπορεί να γραφεί ως διαφορά του $\overrightarrow{OA}$ από το $\overrightarrow{OB}$ με το Ο να είναι ένα οποιοδήποτε σημείο.

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** Στο σώμα Σ ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$. Να σχεδιαστεί η δύναμη που χρειάζεται, ώστε το σώμα να μην μετακινηθεί από τη θέση του.

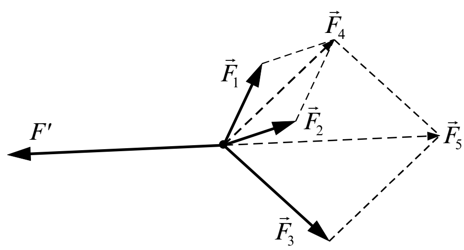
### Λύση

Θα υπολογίσουμε το άθροισμα $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, οπότε η ζητούμενη δύναμη $\vec{F}\,'$ θα είναι ίση με : $\vec{F}\,' = -\vec{F}$.

Το άθροισμα $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ είναι η $\vec{F}_4$.

Το άθροισμα $\vec{F}_4 + \vec{F}_3$ είναι η $\vec{F}_5$.

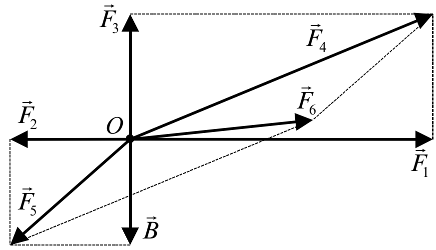
Άρα, η δύναμη που χρειάζεται για να μην μετακινηθεί το σώμα είναι η $\vec{F}\,'$, που είναι αντίθετη από την $\vec{F}_5$.




**2.** Σ' ένα αεροπλάνο που πετάει και βρίσκεται στη θέση Ο ενεργούν οι εξής δυνάμεις: η προωθητική δύναμη $\vec{F}_1$, η αντίσταση του αέρα $\vec{F}_2$, η ανυψωτική δύναμη $\vec{F}_3$ και το βάρος του $\vec{B}$. Να βρεθεί αν το αεροπλάνο κερδίζει ή χάνει ύψος.

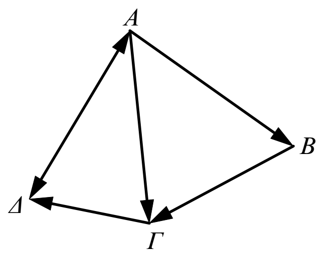
**Λύση**

Το άθροισμα των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_3$ είναι η $\vec{F}_4$. Το άθροισμα των $\vec{F}_2$ και $\vec{B}$ είναι η $\vec{F}_5$. Τέλος, το άθροισμα των $\vec{F}_4$ και $\vec{F}_5$ είναι η $\vec{F}_6$. Είναι φανερό ότι η $\vec{F}_6$, που επενεργεί σε αντικατάσταση όλων των δυνάμεων, θα ανυψώνει το αεροπλάνο. Άρα, το αεροπλάνο κερδίζει ύψος.




**3.** Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:
(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$ (2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}$

**Λύση**




(1) Είναι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma})+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$
$=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{A\Delta}$

(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta})+\overrightarrow{\Delta A}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}=\vec{0}$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ή λάθος. Να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν είναι σωστή, ή το Λ, αν είναι λάθος.

(α) Τα διανύσματα $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ και - $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ είναι αντίρροπα. Σ Λ

(β) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}-\vec{\alpha}$ έχουν το ίδιο μέτρο. Σ Λ

(γ) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}-\vec{\alpha}$ είναι αντίθετα. Σ Λ

(δ) Τα διανύσματα $\vec{x}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ και $\vec{y}=\vec{\alpha}-\vec{\gamma}+\vec{\beta}$ είναι ίσα. Σ Λ