ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Σε προηγούμενες τάξεις μάθαμε ότι η γωνία 360^{o} είναι 2π rad. Επομένως γωνίες 180^{o} και 90^{o} είναι π rad και $\frac{\pi}{2}$ rad αντίστοιχα.

Γενικά, ο τύπος που μας βοηθάει να εκφράσουμε μία γωνία από μοίρες (μ^{o}) σε ακτίνια (α rad) και αντίστροφα είναι $\boxed{\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu}{180}}$

Για παράδειγμα:

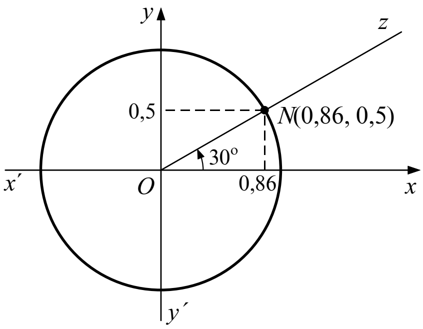
- αν μία γωνία είναι 30^{o} τότε από τον παραπάνω τύπο για $\mu=30$ έχουμε: $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{30}{180}$ δηλαδή $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{1}{6}$ και τελικά $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Άρα $\boxed{30^{o}=\frac{\pi}{6}\text{rad}}$.

- αν μία γωνία είναι $\frac{8\pi}{3}$rad τότε από τον ίδιο τύπο για $\alpha=\frac{8\pi}{3}$ έχουμε: $\frac{\frac{8\pi}{3}}{\pi}=\frac{\mu}{180}$ δηλαδή $\frac{8}{1}=\frac{\mu}{60}$ και τελικά $\mu=480^{o}$. Άρα $\boxed{\frac{8\pi}{3}\text{rad}=480^{o}}$.

Μάθαμε ακόμα να υπολογίζουμε το ημίτονο και το συνημίτονο οποιασδήποτε γωνίας με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου.

Όταν λέμε οποιαδήποτε γωνία, αναφερόμαστε σε γωνίες ω με $0\leq\omega\leq360^{o}$, σε γωνίες μεγαλύτερες από 360^{o} και σε αρνητικές γωνίες.

Για παράδειγμα, θα ξαναθυμίσουμε τη διαδικασία, για να βρούμε τα ημίτονα και τα συνημίτονα των γωνιών 30^{o}, 480^{o} και -60^{o}.

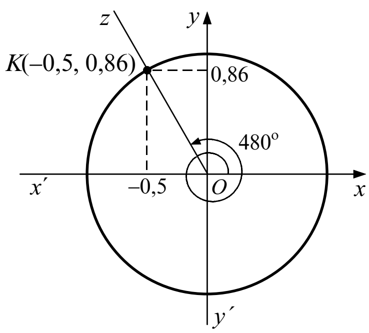


▪ Στο σύστημα των ορθογώνιων αξόνων που έχει αρχή το σημείο Ο θεωρούμε μία γωνία με κορυφή το Ο και **αρχική πλευρά** την ημιευθεία Οx.

Έστω τώρα ότι η ημιευθεία Οx περιστρέφεται γύρω από το Ο κατά τη **θετική φορά**, δηλαδή αντίθετα από την κίνηση των δεικτών του ρολογιού και, αφού διαγράψει κατά την κίνησή της γωνία 30^{o}, φτάνει στη θέση Οz. Η ημιευθεία Οz, που λέγεται **τελική πλευρά** της γωνίας, τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Ν(0,86, 0,5).

Όπως γνωρίζουμε: $συν30^{o} = συν\dfrac{\pi}{6} = 0{,}86$ = τετμημένη του Ν

και $ημ30^{o} = ημ\dfrac{\pi}{6} = 0{,}5$ = τεταγμένη του Ν .

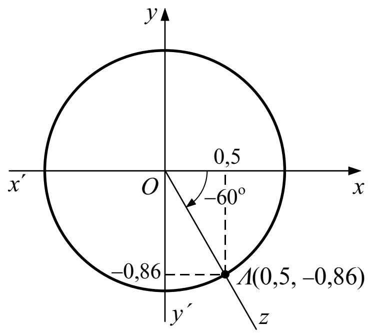


▪ Έστω τώρα ότι η αρχική πλευρά Οx περιστρέφεται γύρω από το Ο κατά τη θετική φορά και, αφού διαγράψει κατά την κίνησή της ένα πλήρη κύκλο (γωνία 360^{o}), συνεχίζοντας διαγράφει ακόμα γωνία 120^{o}. Δηλαδή, η ημιευθεία Οx σχηματίζει τώρα γωνία $(360^{o} + 120^{o}) = 480^{o} = \dfrac{8\pi}{3}$ rad. Η τελική πλευρά Οz΄ της γωνίας αυτής τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο Κ (-0,5, 0,86).

Έχουμε $συν480^{o} = συν\dfrac{8\pi}{3} =$ = -0,5 = τετμημένη του Κ ,

$ημ480^{o} = ημ\dfrac{8\pi}{3} =$ 0,86 = τεταγμένη του Κ .

▪ Όταν η ημιευθεία Οx περιστρέφεται γύρω από το Ο κατά την **αρνητική φορά**, δηλαδή σύμφωνα με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού, τότε σχηματίζονται αρνητικές γωνίες.

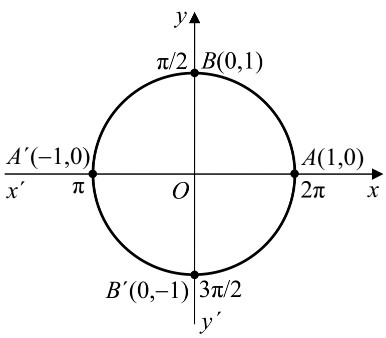


Αν, δηλαδή, η αρχική πλευρά Ox περιστρέφεται κατά την αρνητική φορά και διαγράφει γωνία $60^{o} = \frac{\pi}{3}\text{rad}$, λέμε ότι διαγράφει αρνητική γωνία 60^{o} ή αλλιώς γωνία -60^{o}.

Αν η τελική πλευρά Oz της γωνίας αυτής τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο Λ (0,5, -0,86), τότε:

$$\text{συν}(-60^{o}) = \text{συν}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}5 = \text{τετμημένη του Λ},$$

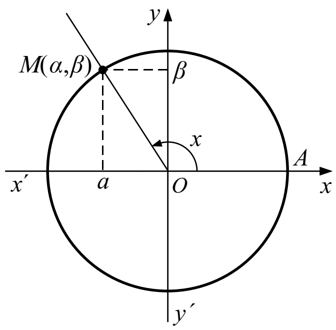
$$\text{ημ}(-60^{o}) = \text{ημ}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -0{,}86 = \text{τεταγμένη του Λ}.$$



Από τον ορισμό του ημιτόνου και του συνημιτόνου μιας γωνίας x εύκολα συμπεραίνουμε ότι:

x	ημx	συνx
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
2π	0	1

Γενικότερα, αν η τελική πλευρά μιας γωνίας x τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ(α,β), τότε ισχύει:



συνx = τετμημένη του σημείου Μ = **α,**
ημx = τεταγμένη του σημείου Μ = **β.**

Καταλαβαίνουμε ότι για κάθε γωνία x υπάρχει το συνημίτονό της και το ημίτονό της.

Έτσι:

- Αν **σε κάθε αριθμό x** αντιστοιχίσουμε **το συνημίτονο γωνίας x rad,** ορίζουμε μια συνάρτηση που ονομάζεται συνημίτονο και συμβολίζεται **συν**.
  Είναι, δηλαδή, **συν: x → συνx** .
  Η τιμή της συνάρτησης συνημίτονο στο x, συν(x), συμβολίζεται πιο απλά συνx.
  Για παράδειγμα, αντί να γράφουμε $συν\left(\frac{\pi}{2}\right)$, γράφουμε $συν\frac{\pi}{2}$.

- Αν **σε κάθε αριθμό x** αντιστοιχίσουμε **το ημίτονο γωνίας x rad**, ορίζουμε μια συνάρτηση που ονομάζεται ημίτονο και συμβολίζεται **ημ**.
  Είναι, δηλαδή, **ημ: x → ημx** .
  Η τιμή της συνάτησης ημίτονο στο x, ημ(x), συμβολίζεται πιο απλά ημx.
  Για παράδειγμα, αντί να γράφουμε $ημ\left(\frac{\pi}{3}\right)$, γράφουμε $ημ\frac{\pi}{3}$.

  Επειδή η τετμημένη και η τεταγμένη οποιουδήποτε σημείου του τριγωνομετρικού κύκλου παίρνουν τιμές στο [-1, 1] έχουμε ότι $-1 \le συνx \le 1$ και $-1 \le ημx \le 1$.

- Αν **σε κάθε αριθμό x** με συν$x \neq 0$ αντιστοιχίσουμε το **πηλίκο** $\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}$ ορίζουμε μια συνάρτηση που ονομάζεται εφαπτομένη και συμβολίζεται **εφ**.

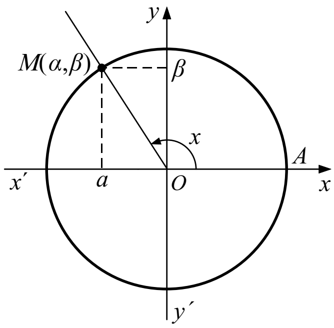
  Είναι, δηλαδή, **εφ:** $x \to \frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}$.

  Η τιμή της συνάρτησης εφ στο x, εφ(x), συμβολίζεται πιο απλά εφx.

  Για παράδειγμα, αντί να γράφουμε $\text{εφ}\left(\frac{\pi}{4}\right)$, γράφουμε $\text{εφ}\frac{\pi}{4}$.

  Το πεδίο τιμών της συνάρτησης εφ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών R.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ



Στο διπλανό σχήμα, έστω ότι η Ox περιστρέφεται κατά τη θετική φορά* και όταν φθάσει στη θέση OM έχει διαγράψει γωνία x rad. Επειδή το M έχει συντεταγμένες α και β τότε:

συν**x** = α και

ημ**x** = β

Ας υποθέσουμε ότι η Ox αφού διαγράψει μία πλήρη γωνία **(2π rad)** έρχεται πάλι στη θέση OM. Δηλαδή έχει διαγράψει γωνία (2π +x). Καταλαβαίνουμε ότι:

συν(2π+**x**) = α και

ημ(2π+**x**) = β

Εάν η Ox συνεχίσει να περιστρέφεται και μετά από δύο πλήρεις γωνίες έρθει πάλι στη θέση OM, η γωνία που έχει διαγράψει είναι ($2 \cdot 2\pi + x$).

Καταλαβαίνουμε πάλι ότι

συν($2 \cdot 2\pi$ +**x**) = α και

ημ($2 \cdot 2\pi$ +**x**)= β.

Επομένως αν η Ox μετά από ν πλήρεις γωνίες έρθει πάλι στη θέση OM, η γωνία που έχει διαγράψει θα είναι ($\nu \cdot 2\pi$ +**x**) και θα έχουμε :

---

* Σε ανάλογα συμπεράσματα θα καταλήξουμε αν υποθέσουμε ότι η Ox περιστρέφεται κατά την αρνητική φορά.

συν (ν · 2π +**x**)=α και
ημ (ν · 2π +**x**) = β

Δηλαδή τελικά αφού η ημιευθεία Ox διαγράψει μία πλήρη γωνία, **(2π rad)**, αν συνεχίσει να περιστρέφεται οι τιμές των ημx και συνx αρχίζουν να επαναλαμβάνονται.

Για παράδειγμα

$$\eta\mu\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right) = 0,5$$

$$\eta\mu\ (2\pi + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}) = 0,5$$

$$\eta\mu\ (2 \cdot 2\pi + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}) = 0,5$$

$$\eta\mu\ (3 \cdot 2\pi + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}) = 0,5$$

…

Ο θετικός αριθμός 2π λέγεται **περίοδος** των συναρτήσεων ημ και συν. Οι συναρτήσεις ημ και συν ονομάζονται **περιοδικές συναρτήσεις**.

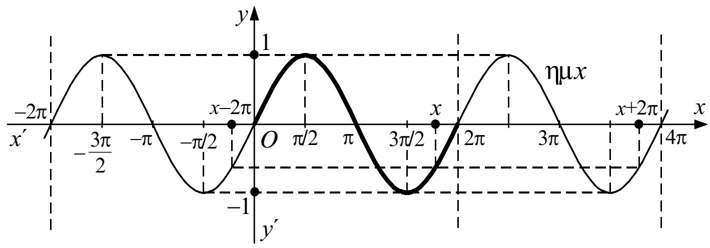
Γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων y = ημx και y = συνx

Για να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων ημ και συν, κατασκευάζουμε πρώτα τους αντίστοιχους πίνακες τιμών .

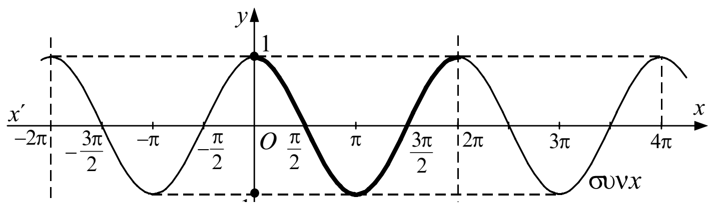
x	…	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	-π	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$2\pi+\frac{\pi}{2}$	2π+π	$2\pi+\frac{3\pi}{2}$	4π	…
ημx	…	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	…

x	…	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	-π	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$2\pi+\frac{\pi}{2}$	2π+π	$2\pi+\frac{3\pi}{2}$	4π	…
συνx	…	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	…

Στη συνέχεια παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη που παίρνουμε από τους παραπάνω πίνακες και τα ενώνουμε με μια συνεχή γραμμή.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο λέγεται **ημιτονοειδής καμπύλη.**



Παρατηρούμε ότι αν χωρίσουμε το πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης σε διαστήματα που **έχουν πλάτος ίσο με την περίοδο 2π**, για παράδειγμα τα … [-4π, -2π], [-2π, 0], [0, 2π], [2π, 4π], … οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων ημ και συν σ’ ένα από τα διαστήματα αυτά, για παράδειγμα στο [0, 2π], **έχει ακριβώς την ίδια μορφή** και στα υπόλοιπα διαστήματα.

Δηλαδή για οποιοδήποτε x έχω

- ημ(x – 2π) = ημx = ημ(x + 2π)
- συν(x – 2π) = συνx = συν(x +2π).

Γενικότερα

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός Τ > 0 τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

i) $(x+T) \in A$, $(x-T) \in A$

και

ii) $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός Τ λέγεται περίοδος της συνάρτησης f..

Από τις γραφικές παραστάσεις βλέπουμε ακόμα ότι η μέγιστη τιμή των συναρτήσεων ημ και συν είναι $+1$ και η ελάχιστη τιμή -1.

Σχόλιο

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι, αν θέλουμε να κάνουμε τη γραφική παράσταση (και γενικότερα τη μελέτη) μιας περιοδικής συνάρτησης με περίοδο Τ, αφού χωρίσουμε το πεδίο ορισμού της σε διαστήματα πλάτους Τ, αρκεί να κάνουμε τη γραφική της παράσταση (τη μελέτη) σ' ένα από τα διαστήματα αυτά και να την επαναλάβουμε στα υπόλοιπα.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = εφx

Αναφέραμε σε προηγούμενη παράγραφο ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης εφ είναι το σύνολο $R_1 = \{x / συνx \neq 0\}$.

Επειδή για κάθε $x \in R_1$ ισχύει εφ(x - π) = εφ(x + π) = εφx, συμπεραίνουμε ότι **η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π**.

Επομένως, αν χωρίσουμε το πεδίο ορισμού της σε διαστήματα πλάτους π, για παράδειγμα … $\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$…, αρκεί να κάνουμε τη γραφική της παράσταση σ' ένα από τα διαστήματα αυτά, για παράδειγμα το $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και να την επαναλάβουμε στα υπόλοιπα.

Τα παραπάνω διαστήματα είναι ανοιχτά, γιατί στα άκρα τους το συνημίτονο γίνεται μηδέν και η εφαπτόμενη δεν ορίζεται.

Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της f(x) = εφx, κατασκευάζουμε με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού πίνακα ή μιας υπολογιστικής μηχανής έναν πίνακα τιμών.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
εφx	Δεν ορίζεται	$-\sqrt{3}$ $\cong -1{,}7$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\cong -0{,}6$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\cong 0{,}6$	1	$\sqrt{3}$ $\cong 1{,}7$	Δεν ορίζεται

Στη συνέχεια παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη αυτά των αντίστοιχων τιμών και τα ενώνουμε με μια συνεχή γραμμή.