Γεωμετρική πρόοδος

1.6 Η έννοια της γεωμετρικής προόδου

Στην ακολουθία 2, 10, 50, 250, … παρατηρούμε ότι κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί 5. Μία τέτοια ακολουθία ονομάζεται **γεωμετρική πρόοδος.**

Ώστε:

Μία ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος, όταν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του, όταν τον πολλαπλασιάσουμε μ' ένα σταθερό αριθμό λ, όπου λ διαφορετικό του μηδενός.

Δηλαδή, η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, αν και μονο αν ισχύει:

$$\boldsymbol{\alpha_{\nu+1}=\lambda\alpha_\nu} \text{ με } \boldsymbol{\alpha_1 \neq 0}$$

Ο σταθερός αριθμός λ λέγεται **λόγος** της γεωμετρικής προόδου.

Παρατήρηση: Αν $\lambda = \mathbf{1}$, έχουμε τη σταθερή ακολουθία α, α, α, …

Για παράδειγμα, η ακολουθία 1, 3, 9, 27, 81, … είναι γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $\alpha_1=1$ και λόγο $\lambda=3$.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι $\lambda=\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ για κάθε ν θετικό ακέραιο.

Δηλαδή, για να βρούμε το λόγο λ μιας γεωμετρικής προόδου, αρκεί να διαιρέσουμε οποιονδήποτε όρο της με τον προηγούμενό του.

Για παράδειγμα, στη γεωμετρική πρόοδο 1, 7, 49, 343, ... ο λόγος λ είναι ίσος με $\dfrac{7}{1}=\dfrac{49}{7}=\dfrac{343}{49}=\ldots=7$.

Από τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$\alpha_1 = \alpha_1$

$\alpha_2 = \alpha_1\lambda$

$\alpha_3 = \alpha_2\lambda = (\alpha_1\lambda)\lambda = \alpha_1\lambda^2$

$\alpha_4 = \alpha_3\lambda = (\alpha_1\lambda^2)\lambda = \alpha_1\lambda^3$

……………………

$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1}\lambda = (\alpha_1\lambda^{\nu-2})\lambda = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$.

Άρα ο νιοστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}}$$

Παραδείγματα

- Στη γεωμετρική πρόοδο 2, 6, 18, 54, ... να βρεθεί ο δέκατος όρος της. Επίσης να βρεθεί ο δέκατος όρος της αριθμητικής προόδου 2, 5, 8, 11, ... και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα**.**

Λύση

Ο λόγος λ της γεωμετρικής προόδου είναι $\lambda = \frac{\mathbf{6}}{2} = 3$ και ο πρώτος όρος της α_1=2. Άρα $\alpha_{10} = \alpha_{\mathbf{1}} \cdot \lambda^9 = 2 \cdot 3^9 = 39366$.

Η διαφορά ω της αριθμητικής προόδου είναι ω = 5-2 =3 και ο πρώτος όρος της $\alpha_{\mathbf{1}} = 2$**.** Άρα $\alpha_{10} = \alpha_{\mathbf{1}} + (\mathbf{10} - \mathbf{1}) \cdot \omega = 2 + 9 \cdot 3 = 29$.

Παρατηρούμε ότι ο όρος α_{10} της γεωμετρικής προόδου είναι "πολύ" μεγαλύτερος από τον όρο α_{10} της αριθμητικής προόδου, παρ' όλο που έχουν τους ίδιους πρώτους όρους και ο λόγος της γεωμετρικής προόδου ισούται με τη διαφορά της αριθμητικής προόδου.

- Στη γεωμετρική πρόοδο 1, $\frac{\mathbf{1}}{3}$, $\frac{\mathbf{1}}{9}$, $\frac{\mathbf{1}}{27}$, ... να βρεθεί ο όγδοος όρος της. Επίσης να βρεθεί ο δέκατος όρος της αριθμητικής προόδου 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{\mathbf{6}}{3}$, ... και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα**.**

Λύση

Ο λόγος λ της γεωμετρικής προόδου είναι $\lambda = \frac{\mathbf{1}}{3}$ και ο πρώτος όρος της α_1=1.

Άρα $\alpha_8 = \mathbf{1} \cdot \left(\frac{\mathbf{1}}{3}\right)^7 = \frac{\mathbf{1}}{2187} \cong \mathbf{0{,}000}4572$.

Η διαφορά ω της αριθμητικής προόδου είναι $\omega=\frac{\mathbf{1}}{3}$ και ο πρώτος όρος της $\alpha_{\mathbf{1}}=\mathbf{1}$. Άρα $\alpha_8=\alpha_{\mathbf{1}}+7\omega=\mathbf{1}+\frac{7}{3}=\frac{\mathbf{11}}{3}=3{,}\mathbf{666}\ldots$.

Παρατηρούμε ότι ο όρος α_8 της γεωμετρικής προόδου είναι "πολύ" μικρότερος από τον όρο α_8 της αριθμητικής προόδου, παρ' όλο που έχουν τους ίδιους πρώτους όρους και ο λόγος της γεωμετρικής προόδου ισούται με τη διαφορά της αριθμητικής προόδου.

Γενικότερα από τα παραπάνω παραδείγματα παρατηρούμε ότι:
Αν έχουμε μία γεωμετρική πρόοδο και μία αριθμητική πρόοδο τέτοιες ώστε να έχουν ίσους πρώτους όρους και ο λόγος της πρώτης να είναι ίσος με τη διαφορά της δεύτερης, (λ = ω), οι όροι της γεωμετρικής προόδου μεταβάλλονται «πολύ γρηγορότερα» από τους αντίστοιχους όρους της αριθμητικής προόδου**.**

1.7 Γεωμετρικός μέσος

Σε μία γεωμετρική πρόοδο παίρνουμε τρεις διαδοχικούς όρους, για παράδειγμα στη 2,$\boxed{10,50,250}$,1250,… παίρνουμε τους όρους 10, 50 και 250. Παρατηρούμε ότι $50^2=\mathbf{10}\cdot 25\mathbf{0}$, δηλαδή το τετράγωνο του μεσαίου όρου ισούται με το γινόμενο των δύο άλλων**.**
Η ιδιότητα αυτή ισχύει σε κάθε γεωμετρική πρόοδο και διατυπώνεται ως εξής:

Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε το τετράγωνο του μεσαίου όρου ισούται με το γινόμενο των δυο άλλων όρων, και αντίστροφα, δηλαδή :

$$\boldsymbol{\beta^2=\alpha\gamma\ ,\ \ \alpha\beta\gamma\neq 0}$$

Απόδειξη

Αν α, β, γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, τότε :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha}&=\lambda\\ \frac{\gamma}{\beta}&=\lambda\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta}\Leftrightarrow\beta^2=\alpha\gamma$$

Ο αριθμός β με την ιδιότητα $\beta^2 = \alpha\gamma$ ονομάζεται **γεωμετρικός μέσος** των αριθμών α και γ.

1.8 Άθροισμα ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου

Έστω α_1 είναι ο πρώτος όρος της γεωμετρικής προόδου και λ ο λόγος της. Τότε για το άθροισμα $S_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu$ των ν πρώτων όρων της έχουμε:

$$S_\nu = \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_1\lambda^3 + \dots + \alpha_1\lambda^{\nu-1} \quad \text{και}$$
$$\lambda S_\nu = \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_1\lambda^3 + \dots + \alpha_1\lambda^{\nu-1} + \alpha_1\lambda^\nu .$$

Αν από τη δεύτερη ισότητα αφαιρέσουμε την πρώτη, παίρνουμε :

$$S_\nu(\lambda-1)=\alpha_1\lambda^\nu-\alpha_1=\alpha_1(\lambda^\nu-1) \Leftrightarrow \boxed{S_\nu = \alpha_1\frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}}$$

Επομένως, δείξαμε ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου δίνεται από τον τύπο: $\boxed{S_\nu = \alpha_1\frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}}$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να προσδιορισθεί ο x, ώστε οι αριθμοί x-4, x, 2x να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Λύση

Για να είναι οι αριθμοί x-4, x, 2x διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, πρέπει να ισχύει η σχέση : $x^2=(x-4)2x$.

$x^2-2x^2+8x=0$ ή

$-x^2+8x=0$ ή

$x(-x+8)=0$ ή

$x = 0$ ή $x = 8$

Για x =8, οι αριθμοί είναι 4 , 8, 16 που είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Για x =0, οι αριθμοί είναι -4, 0, 0 και δεν υπάρχει γεωμετρική πρόοδος.

2. Να βρεθεί γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $α_1$ και λόγο λ, όταν $α_{10}=320$ και $α_6=20$.

Λύση

Οι δοσμένες σχέσεις μας οδηγούν στη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} α_{10}=320 \\ α_6=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} α_1λ^9=320 \\ α_1λ^5=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} λ^4=16 \\ 16α_1λ=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} λ=2 \quad \text{ή} \quad λ=-2 \\ 16α_1λ=20 \end{cases}$$

Οπότε , για λ=2 παίρνουμε $α_1=5/8$ και

για λ= -2 παίρνουμε $α_1= -5/8$

και οι γεωμετρικές πρόοδοι είναι αντίστοιχα

$\frac{5}{8}, \frac{10}{8}, \frac{20}{8}, \frac{40}{8}, \ldots$ και

$-\frac{5}{8}, \frac{10}{8}, -\frac{20}{8}, \frac{40}{8}, \ldots$

3. Ένα σχοινί μήκους ενός μέτρου το χωρίζουμε σε δύο ίσα μέρη και το ένα απ' αυτά το ονομάζουμε $α_1$. Στη συνέχεια το άλλο μισό το χωρίζουμε σε δύο ίσα μέρη και το ένα απ' αυτά το ονομάζουμε $α_2$. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται συνέχεια και έτσι δημιουργείται μια ακολουθία $(α_ν)$.
   i) Να βρεθεί ο γενικός τύπος της ακολουθίας.
   ii) Να αποδειχτεί ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος.
   iii) Να υπολογιστεί το άθροισμα των ν πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου. Ποιο είναι το άθροισμα, όταν το ν γίνει «πολύ» μεγάλο; (εφαρμογή ν=**10** και ν=**100**)

Λύση

Από την εκφώνηση του προβλήματος προκύπτουν τα εξής:

i)

- $\alpha_1 = \frac{1}{2}$.

- $\alpha_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$, αφού αυτό που είχε μείνει ήταν το **1**/2 και παίρνουμε το μισό του**.**

- $\alpha_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$, αφού αυτό που είχε μείνει ήταν το **1**/4 και παίρνουμε το μισό του**.** Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι:

- $\alpha^{\nu} = \frac{1}{2^{\nu}}$

ii) Επειδή $\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2^{\nu+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{\nu}} = \frac{1}{2}\alpha_{\nu}$, η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$.

iii) Είναι $S_{\nu} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{\nu}}$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2^{\nu}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{\nu}}\ .$$

Για ν=**10** έχουμε :

$S_{10} = 1 - (\frac{1}{1024}) =$ **0**,999**0** (περίπου **1**)

και για ν=**100**

$S_{100} = 1 - 1 - \frac{1}{2^{100}} = 0{,}99999\ldots$ (περίπου **1**).

Παρατηρούμε ότι, αν συνεχιστεί η διαδικασία «άπειρες φορές», τότε το άθροισμα S_ν γίνεται σχεδόν ίσο με **1**, δηλαδή με το αρχικό μήκος του σχοινιού**.** Το $S_\nu = \mathbf{1} - \dfrac{\mathbf{1}}{2^\nu}$ για να γίνει σχεδόν **1**, σημαίνει ότι ο όρος $\dfrac{\mathbf{1}}{2^\nu}$ γίνεται σχεδόν μηδέν, όταν το ν γίνεται «πολύ» μεγάλο**.**

Γενικότερα, αν $|\lambda| < \mathbf{1}$, τότε το λ^ν παίρνει τιμή σχεδόν μηδέν, όταν το ν γίνεται «πολύ» μεγάλος αριθμός**.**

Παρατήρηση

Έστω η γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ, όπου $|\lambda|<\mathbf{1}$**.** Τότε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο:

$$S_\nu = \frac{\alpha_1(\lambda^\nu - \mathbf{1})}{\lambda - \mathbf{1}}$$

Όπως αναφέρθηκε, η τιμή του όρου λ^ν, όταν το ν παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, «πλησιάζει» το **0.**

Στην περίπτωση αυτή το άθροισμα των άπειρων όρων της γεωμετρικής προόδου δίνεται από τον τύπο:

$$S = \frac{\alpha_1}{\mathbf{1} - \lambda}$$

Ώστε:

Το άθροισμα των άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, όπου $|\lambda|<1$, **δίνεται από τον τύπο**:

$$\boxed{S = \frac{\alpha_1}{\mathbf{1} - \lambda}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σε μια γεωμετρική πρόοδο:

- Οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι της με τη σειρά που δίνονται, αν $\gamma^2 = \alpha\beta$**.**

Σ Λ

- Αν α_1=**1** και λ=4, ο νιοστός όρος δίνεται από τον τύπο $\alpha_\nu = 4^{\nu-1}$.
  Σ Λ
- Αν α_1=**1** και λ=3, το άθροισμα των **10** πρώτων όρων της ισούται με **6400.**
  Σ Λ
- Ο γεωμετρικός μέσος των 3, 27 είναι 9**.**
  Σ Λ

2. Σε μια γεωμετρική πρόοδο :

- Αν α_1=2, α_ν=162 και λ=3, τότε το ν ισούται με:
  Α) **1**2 Β) **6** Γ) 5 Δ) 8
- Αν α_1=5, α_ν=120 και Σ_ν=255, τότε το λ ισούται με:
  Α) 2 Β) 3 Γ) 4 Δ) 5 Ε) -**1**/2
- Αν α_1=3 και λ=2/3, το άθροισμα των άπειρων όρων της είναι:
  Α) **1**2 Β) 27 Γ) 9 Δ)8**1**
- Αν α_5=144 και α_7=576, τότε λ^2 ισούται με :
  Α) **1** Β) 2 Γ) 3 Δ) 4

3. Βρείτε τους παρακάτω όρους των γεωμετρικών προόδων:
   i) Τον 5ο και τον 8ο όρο της 3, **6**, **1**2…
   ii) Το **1**4ο και τον 7ο όρο της 81, -20, 9,…

4. Γράψτε το νιοστό όρο των γεωμετρικών προόδων:
   i) 2, 4, 8, 16, …
   ii) $x, x^2, x^3, \ldots$
   iii) $2, 3, \frac{9}{2}, \ldots$

5. Βρείτε το νιοστό όρο και το άθροισμα των ν πρώτων όρων των παρακάτω γεωμετρικών προόδων:
   i) 3, 6, **1**2,… και ν= 8**.**
   ii) 64, 32, **16**,… και ν=**10.**
   iii) $\frac{\mathbf{1}}{72}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}44}, \frac{\mathbf{1}}{288}, \mathbf{...}$ και ν=**12.**

6. Βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο, όταν :
   i) α_{10}=320 και α_6=20.

ii) $\alpha_5=\frac{27}{16}$ και $\alpha_9=\frac{1}{3}$.

iii) $\alpha_3=\frac{9}{16}$ και $\alpha_6=-\frac{9}{2}$.

7. Να προσδιορισθεί έτσι ο x, ώστε οι αριθμοί x-4, x+1, x-19 να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

8. Αν $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}$, να δείξετε ότι οι α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

9. Να σχηματιστεί η γεωμετρική πρόοδος στη οποία το άθροισμα των δύο πρώτων όρων είναι 48 και το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων είναι **60**.

10. Να υπολογιστούν τα άθροισματα: i) $S=\frac{2}{9}+\frac{4}{81}+....+(\frac{2}{9})^{\nu}+...$

ii) $S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}...$

11. Να σχηματιστεί γεωμετρική πρόοδος που έχει $\alpha_2=\frac{4}{5}$ και άθροισμα άπειρων όρων 5.

12. Σε γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος όρος της ισούται με το λόγο της και το άθροισμα των άπειρων όρων της είναι 3. Βρείτε τον 7ο όρο της.

13. Ο πληθυσμός ενός χωριού τις τελευταίες 5 διαδοχικές δεκαετίες ήταν 2173, 2281, 2395, 2514. Δείξτε ότι ο πληθυσμός αυξήθηκε περίπου κατά γεωμετρική πρόοδο.

14. Μια μπάλα πέφτει από ύψος **60** μέτρων και αναπηδά στο έδαφος φτάνοντας κάθε φορά στο **1**/3 του ύψους της προηγούμενης αναπήδησης. Να βρεθεί το ύψος που θα φτάσει στην τέταρτη αναπήδηση.