4. Να γραφούν σαν λογάριθμοι ενός αριθμού οι παραστάσεις

α) $3+\log_\alpha x-\frac{1}{2}\log_\alpha 16$

β) $2+3\log_5 2-2\log_5 10$

5. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις

α) $\log_2 36-\log_3 81+\log_7 49$

β) $\log 100+\log 10+\log 1-\log\frac{1}{100}$

γ) $\dfrac{\log 27+\log 8}{\log 9+\log 4}$

δ) $\log_\alpha \alpha^2+\log_\alpha\sqrt{\alpha}$

6. Αν $\log\alpha=2,\ \log\beta=-\frac{1}{2}$, $\log\gamma=3$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

α) $\log\dfrac{\alpha^4\beta^3}{10\gamma^2}$

β) $\log\dfrac{\sqrt{10^5\cdot\alpha}}{\beta^2\cdot\gamma^3}$

2.4 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- Γνωρίζουμε ότι για οποιοδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό x μπορούμε να βρούμε το logx.

Επομένως, αν σε κάθε θετικό αριθμό αντιστοιχίσουμε το λογάριθμό του, μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών και τύπο f(x) = logx.

Δηλαδή, f: $x\to\log x$, για κάθε $x>0$.

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται λογαριθμική συνάρτηση με βάση το 10.

Το πεδίο τιμών της συνάρτησης αυτής είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

- Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση,

αν σε κάθε θετικό αριθμό x αντιστοιχίσουμε τον πραγματικό αριθμό $\ln x$, ορίζουμε μια συνάρτηση φ με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών και τύπο $\varphi(x) = \ln x$.

Δηλαδή, φ: $x \to \ln x$,για κάθε $x > 0$.

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται λογαριθμική συνάρτηση με βάση το e.

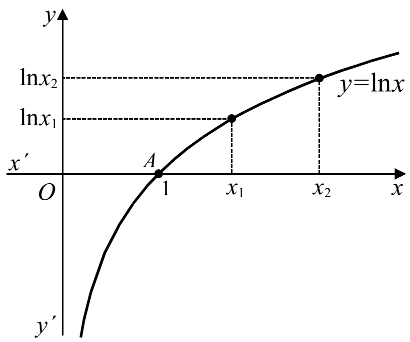
Το πεδίο τιμών της είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

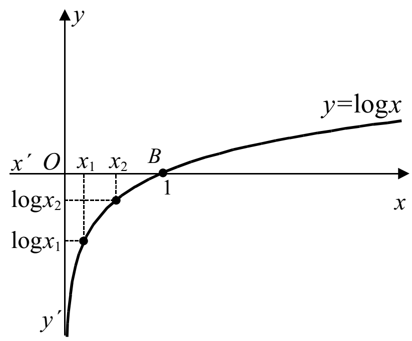
Για να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \log x$ και $\varphi(x) = \ln x$, κατασκευάζουμε τους αντίστοιχους πίνακες τιμών.

x	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^{2}	10^{3}	10^{4}
$y = \log x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

x	0,2	0,3	0,5	1	2	3	4	5
$y = \ln x$	-1,6	-1,2	-0,7	0	0,7	1,1	1,4	1,6

Στη συνέχεια παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη που παίρνουμε από τους παραπάνω πίνακες και, αφού τα ενώσουμε με μια συνεχή καμπύλη γραμμή, έχουμε τις γραφικές τους παραστάσεις.





Για τη λογαριθμική συνάρτηση f(x) = lnx παρατηρούμε ότι:

- Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$.
- Έχει σύνολο τιμών το R.
- Για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της με $x_1 < x_2$ έχουμε και $\ln x_1 < \ln x_2$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση y = lnx είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της
- Όσο οι τιμές του x πλησιάζουν στο μηδέν τόσο περισσότερο η γραφική παράσταση «πλησιάζει» τον ημιάξονα των αρνητικών αριθμών Oy΄, χωρίς να τον συναντά. Γι’ αυτό λέμε ότι η γραφική παράσταση της y = lnx έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα Oy΄.
- Η γραφική παράσταση τέμνει τον x ΄x στο A (1, 0), γιατί ln1 = 0.

Για τη λογαριθμική συνάρτηση f(x) = log παρατηρούμε ότι:

- Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$.
- Έχει σύνολο τιμών το R.
- Για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της με $x_1 < x_2$ έχουμε και $\log x_1 < \log x_2$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση y = log είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
- Όσο οι τιμές του x πλησιάζουν στο μηδέν τόσο περισσότερο η γραφική παράσταση «πλησιάζει» τον ημιάξονα των αρνητικών αριθμών Oy΄, χωρίς να τον συναντά. Γι’ αυτό λέμε ότι η γραφική παράσταση της y = log έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα Oy ΄.
- Η γραφική παράσταση τέμνει τον x΄x στο B (1,0), γιατί log1 = 0.

Παρατήρηση

Αν $x > 1$, τότε $\log x > 0$ και $\ln x > 0$.
Αν $0 < x < 1$, τότε $\log x < 0$ και $\ln x < 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Να λυθούν οι εξισώσεις:

1. i) $\log(x-2) + \log(x-1) = \log(2x+8)$

ii) $\log^2 x - 3\log x = \log x^2 - 4$

iii) $\log_2 x = \log_4 9$

iv) $\log_2(x^2 - 9) = 4$

Λύση

i) Η εξίσωση αυτή ορίζεται μόνο όταν x-2 > 0 και x –1 > 0 και 2x+8 > 0.
Με τους περιορισμούς αυτούς η εξίσωση γίνεται:

$\log(x-2) + \log(x-1) = \log(2x+8) \Leftrightarrow \qquad [\log\theta_1 + \log\theta_2 = \log(\theta_1 \cdot \theta_2)]$

$\log[(x-2)\cdot(x-1)] = \log(2x+8) \Leftrightarrow \qquad$ [αν $\log f(x) = \log g(x)$,τότε f(x)=g(x)]

$(x-2)\ (x-1) = 2x + 8 \Leftrightarrow$

$x^2 - x - 2x + 2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow$ x=6 ή x= -1.

Από τις τιμές αυτές του x, η x = -1 απορρίπτεται, γιατί δεν ικανοποιεί και τους τρεις περιορισμούς. Επομένως, η εξίσωση έχει μόνο τη λύση x = 6.

ii) $\log^2 x - 3\log x = \log x^2 - 4\ ,\ x > 0 \Leftrightarrow \qquad [\log\theta^\kappa = \kappa\cdot\log\theta]$

$\log^2 x - 3\log x = 2\cdot\log x - 4 \Leftrightarrow \qquad [\log^2 x = (\log x)^2]$

$(\log x)^2 - 3\log x = 2\cdot\log x - 4$.

Θέτω logx = y και προκύπτει μια νέα εξίσωση

$y^2 - 3y = 2y - 4 \Leftrightarrow y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow$ y = 4 ή y =1.

Έχω $\log x = 4 \Leftrightarrow x = 10^4$

$\log x = 1 \Leftrightarrow x = 10$

iii) $\log_2 x = \log_4 9$

Η εξίσωση ορίζεται, όταν x > 0. Με τον περιορισμό αυτό η εξίσωση γίνεται:

$\log_2 x = \log_4 9 \Leftrightarrow$ $\left[\log_\alpha \theta = \dfrac{\log_\beta \theta}{\log_\beta \alpha}\right]$

$\log_2 x = \dfrac{\log_2 9}{\log_2 4} \Leftrightarrow$ $[\log_2 9 = 3, \log_2 4 = 2]$

$\log_2 x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow$

$x = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$

$x = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$.

iv) $\log_2(x^2 - 9) = 4$

Η εξίσωση ορίζεται, όταν $x^2 - 9 > 0$. Με τον περιορισμό αυτό η εξίσωση γίνεται:

$\log_2(x^2 - 9) = 4 \quad \Leftrightarrow$ $[4 = \log_2 16]$

$\log_2(x^2 - 9) = \log_2 16 \Leftrightarrow$

$x^2 - 9 = 16 \Leftrightarrow$

$x^2 = 25 \Leftrightarrow$

$x = 5$ ή $x = -5$.

Και οι δύο λύσεις είναι δεκτές, αφού ικανοποιούν τον περιορισμό.

Οι παραπάνω εξισώσεις που περιέχουν λογάριθμο του αγνώστου λέγονται λογαριθμικές εξισώσεις.

2. Να λυθεί το σύστημα:

$\left\{\begin{array}{l}\log x + \log y = 2\\ x + y = 25\end{array}\right\}$ **(λογαριθμικό σύστημα)**

Λύση

i) $\left\{\begin{array}{l}\log x + \log y = 2\\ x + y = 25\end{array}\right\}$ Το σύστημα ορίζεται για $x > 0$ και $y > 0$.

Με τους περιορισμούς αυτούς το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x + y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log(x \cdot y) = \log 100 \\ x + y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot y = 100 \\ x + y = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 - y \\ (25 - y)y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 - y \\ -y^2 + 25y - 100 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 - y \\ y^2 - 25y + 100 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 - y \\ y = 5 \quad \text{ή} \quad y = 20 \end{cases}.$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι x = 20 και y = 5
ή
x = 5 και y = 20.

3. Ημιζωή μιας ραδιενεργού ουσίας είναι ο χρόνος που πρέπει να περάσει, ώστε να διασπαστεί (να εξαφανιστεί) η μισή ποσότητα της ουσίας.
Το ραδιενεργό ιώδιο έχει χρόνο ημιζωής περίπου 7 μέρες.
Αν είναι Q_0 η αρχική ποσότητα του ραδιενεργού ιωδίου, τότε η ποσότητα που έχει απομείνει μετά από t μέρες δίνεται από τη σχέση $Q = Q_0 e^{-et}$.
α) Να βρείτε τη σταθερά c της σχέσης αυτής.
β) Για Q_0 =500gr, να βρείτε σε πόσες μέρες θα έχουν μείνει 5gr ραδιενεργού ιωδίου.
Δίνονται: $\ln 2 \cong 0,7$ και $\ln 10 \cong 2,3$.

Λύση

α) Μετά από 7 μέρες (t = 7) θα έχει απομείνει η μισή ποσότητα του ραδιενεργού ιωδίου, δηλαδή $Q = Q_0/2$. Με αντικατάσταση στη σχέση $Q = Q_0 e^{-et}$ έχουμε: $Q_0/2 = Q_0 e^{-7c}$, που μας δίνει $e^{-7c} = 1/2$.
Λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε:
$\ln e^{-7c} = \ln 1 - \ln 2$, δηλαδή -7c lne = -ln2, άρα c = ln2/ 7 και τελικά c = 0,1.

β) Με αντικατάσταση των τιμών Q_0 =500gr και Q = 5gr στη σχέση $Q = Q_0 e^{-et}$ έχουμε: $5 = 500 e^{-0,1t}$ που μας δίνει $e^{-0,1t} = 1/100$.
Λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε: $\ln e^{-0,1t} = \ln 10^{-2}$, δηλαδή –0,1t lne = -2 ln10, άρα t = 2 ln10 /0,1 και τελικά t = 46 μέρες.

4. Δύο ανοιχτά δοχεία περιέχουν το ένα 100ml νερό και το άλλο 1000ml οινόπνευμα. Υποθέτουμε ότι το νερό εξατμίζεται με ρυθμό 2% την ημέρα και το οινόπνευμα με ρυθμό 10%. Να βρείτε:

α) Τις συναρτήσεις που δίνουν τον όγκο του νερού και του οινοπνεύματος που έχει απομείνει σε κάθε δοχείο μετά από t μέρες.

β) Μετά από πόσες μέρες οι όγκοι του νερού και του οινοπνεύματος που έχουν μείνει μέσα στα δοχεία γίνονται ίσοι;

Λύση

α) Οι όγκοι του νερού και του οινοπνεύματος μετά από 1, 2, 3, ….., t μέρες είναι:

Μέρες t	**Όγκος νερού Q_1 (ml)**	**Όγκος οινοπνεύματος Q_2 (ml)**
Στην αρχή	100	1000
Μετά από 1 μέρα	$100\cdot(1-0{,}02)=100\cdot 0{,}98$	$1000\cdot(1-0{,}10)=100\cdot 0{,}90$
Μετά από 2 μέρες	$100\cdot(1-0{,}02)^2=100\cdot 0{,}98^2$	$1000\cdot(1-0{,}10)^2=100\cdot 0{,}90^2$
Μετά από 3 μέρες	$100\cdot(1-0{,}02)^3=100\cdot 0{,}98^3$	$1000\cdot(1-0{,}10)^3=100\cdot 0{,}90^3$
………………	………………	………………..
Μετά από t μέρες	$100\cdot(1-0{,}02)^t=100\cdot 0{,}98^t$	$1000\cdot(1-0{,}10)^t=100\cdot 0{,}90^t$

Επομένως, η συνάρτηση που δίνει τον όγκο του νερού είναι $Q_1(t)=100\cdot 0{,}98^t$ και αυτή που δίνει τον όγκο του οινοπνεύματος είναι $Q_2(t)=1000\cdot 0{,}90^t$.

β) Έστω ότι μετά από t μέρες οι όγκοι του νερού και του οινοπνεύματος στα δύο δοχεία γίνονται ίσοι. Δηλαδή, $Q_1=Q_2$, οπότε $100\cdot 0{,}98^t=1000\cdot 0{,}90^t$ ή αλλιώς $0{,}98^t=10\cdot 0{,}90^t$. Λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης έχουμε:

$\log(0{,}98^t)=\log(10\cdot 0{,}90^t)\Rightarrow t\cdot\log 0{,}98=\log 10+t\log 0{,}90\Rightarrow$

$-0{,}0088t=1-0{,}0458t\Rightarrow 0{,}037t=1\Rightarrow t=1/0{,}037$ και τελικά $t=27$ μέρες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) Η συνάρτηση f(x) =logx έχει πεδίο ορισμού:
- ο Το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών $(0,+\infty)$.
- ο Το σύνολο των αρνητικών πραγματικών αριθμών $(-\infty,0)$.
- ο Το σύνολο R των πραγματικών αριθμών.

β) Η συνάρτηση f(x) = logx τέμνει:
- ο Τον άξονα x΄x στο Α (1, 0).
- ο Τον άξονα y΄y στο Β (0, 1).
- ο Δεν τέμνει τους άξονες.

2. α) Η συνάρτηση f(x) = lnx τέμνει τον άξονα x΄x στο Α (1, 0) και έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα Οy Σο Λο

β) Αν $\theta > 1$, τότε $\log\theta > 0$ Σο Λο

γ) Αν $\theta > 0$, τότε $\ln\theta > 0$ Σο Λο

δ) Αν $0 < \theta < 1$, τότε $\ln\theta < 0$ Σο Λο

3. α) Η εξίσωση $x^2 - 2\log 10 - x = 0$ είναι:
- ο Λογαριθμική εξίσωση.
- ο Εκθετική εξίσωση.
- ο Ούτε λογαριθμική ούτε εκθετική.

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\log 2x + \log 3 = \log 36$

β) $2\log(x-3) = \log 36$

γ) $\log x + \log(x-1) = \log 12$

δ) $\log(2x-1) + 3\log 2 = \log(4-x)$

ε) $2\log(x-1) = \log 16$

στ) $\log x - \log(x-1) = \log 3$

ζ) $\log(x+1) + 2\log\sqrt{5x} = 2$

η) $\log(x-2)^2 = \log 16$

θ) $2^{2x} = 3^{x+1}$

ι) $5^{x+1} = 7$

κ) $10^{2\log -3} = x$

5. Να λυθούν τα συστήματα

α) $\begin{matrix} \log x + 2\log y = 5 \\ \log x - \log y = 3 \end{matrix}$

β) $\begin{matrix} \log^2 x + \log^2 y = 10 \\ \log x - \log y = 2 \end{matrix}$

γ) $\begin{matrix} x^{\log y} = 1000 \\ \log(x \cdot y) = 4 \end{matrix}$

6. Να προσδιοριστούν οι τιμές του x, ώστε οι αριθμοί logx, $\log(3\sqrt{2})$, log (x-3) να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

7. ΄Οταν το ηλιακό φως περνάει μέσα από τα κρύσταλλα ενός παραθύρου, η έντασή του ελαττώνεται σύμφωνα με τη σχέση $I(x) = I_0 e^{-0,02x}$, όπου I_0 η ένταση που έχει το ηλιακό φως όταν πέφτει στο κρύσταλλο, και x το πάχος του κρυστάλλου σε mm. Να βρείτε:
α) Σε ποιο ποσοστό μειώνεται η αρχική ένταση, όταν το φως περάσει μέσα από κρύσταλλο πάχους 5 mm;
β) Τι πάχος πρέπει να έχει το τζάμι, για να μειωθεί η ένταση στο 80% της αρχικής της τιμής.

8. Ένα σταματημένο αυτοκίνητο αρχίζει να επιταχύνεται με τη μεγαλύτερη επιτάχυνση που του επιτρέπει ο κινητήρας του. Η ταχύτητά του (σε km/h) αυξάνεται με το χρόνο (σε sec) σύμφωνα με τη σχέση u(t)= $u_o \cdot (1 - e^{ct})$, όπου u_o η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει.
α) Αν σε χρόνο 7sec η ταχύτητα του αυτοκινήτου φτάνει το μισό της μέγιστης τιμής της, να βρείτε τη σταθερά c.
β) Αν η μέγιστη ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι u_o =160km / h, να βρείτε σε πόσο χρόνο αναπτύσσει ταχύτητα 100km / h.
Δίνονται : ln2 = 0,7 και ln3 = 1,1.