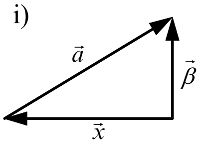
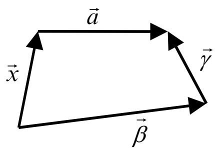
2. Στις παρακάτω περιπτώσεις να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως συνάρτηση των άλλων διανυσμάτων που δίνονται:

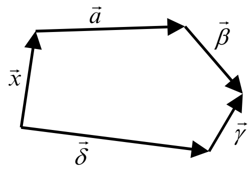
i)



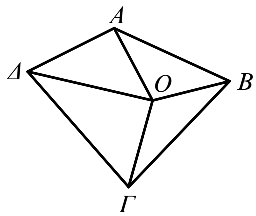
ii)



iii)



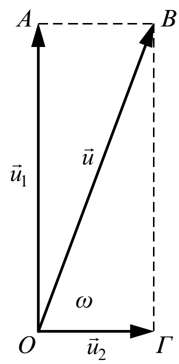
3. Με βάση το διπλανό σχήμα να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:



1. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B} = ...$
2. $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta O} + ... = \overrightarrow{A\Gamma}$
3. $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta O} + ... = \vec{0}$
4. $\overrightarrow{A\Delta} - .... = \overrightarrow{A\Gamma}$
5. $\overrightarrow{A\Delta} + ... = \overrightarrow{AO} + ...$

4. Για τα τέσσερα σημεία Α,Β,Γ,Δ ισχύει ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και ότι $\overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{B\Gamma} = \vec{0}$.

5. Στο διπλανό σχήμα το διάνυσμα $\vec{u}_1$ παριστάνει την ταχύτητα ενός πλοίου που διασχίζει ένα ποτάμι, ενώ το $\vec{u}_2$ παριστά την ταχύτητα των νερών του ποταμού. Να βρεθεί η ταχύτητα $\vec{u}$ με την οποία κινείται τελικά το πλοίο. Είναι: $|\vec{u}_1|$=400 m/min και $|\vec{u}_2|$ =150m/min.



Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Έστω ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και ένας πραγματικό αριθμός $\lambda \neq 0$.

Ονομάζουμε **γινόμενο του αριθμού λ επί το διάνυσμα $\vec{\alpha}$** και το συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\lambda\vec{\alpha}}$ ένα νέο διάνυσμα το οποίο είναι:

- ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda > 0$, αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda < 0$
- έχει μέτρο ίσο με $|\lambda| \cdot |\vec{\alpha}|$, δηλαδή $|\lambda\vec{\alpha}| = |\lambda| \cdot |\vec{\alpha}|$.

Ορίζουμε ακόμη: $0 \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$ και $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Η πράξη με την οποία βρίσκουμε το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού λ μ' ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ λέγεται **πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα**.

Ο πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$
2. $(\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$
3. $\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$
4. $1 \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$

Σημείωση 1η : Σύμφωνα με τον τρόπο που ορίζεται ο πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα, αν δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ συνδέονται με τη σχέση $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}, \lambda \in R$, τότε τα διανύσματα αυτά είναι συγγραμμικά. Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή, αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ είναι συγγραμμικά, τότε υπάρχει $\lambda \in R$, ώστε να ισχύει: $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$. Δηλαδή, αποδεικνύεται ότι ισχύει το θεώρημα:

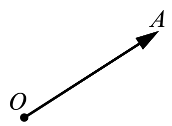
Δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ είναι συγγραμμικά, αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in R$ και ισχύει: $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$

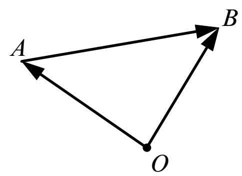
Σημείωση 2η: Αν για τρία σημεία Α,Β,Γ ισχύει $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{B\Gamma}, \lambda \in R$, τότε με βάση το ανωτέρω θεώρημα τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ **είναι συγγραμμικά και, επομένως, τα Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.**

Σημείωση 3η: Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα ενός επιπέδου και υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ και λ τέτοιοι, ώστε $\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, τότε λέμε ότι το $\vec{\gamma}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Διάνυσμα θέσης ενός σημείου

Για να καθορίσουμε τη θέση ενός σημείου Α μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής: Θεωρούμε ένα σταθερό σημείο Ο το οποίο αποτελεί και σημείο αναφοράς. Η θέση του σημείου Α ως προς το σταθερό σημείο Ο καθορίζεται πλήρως από το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$. Γι' αυτό το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ λέγεται και **διάνυσμα θέσης** του Α.





Στην περίπτωση ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ είναι τα διανύσματα θέσης των άκρων του, το δε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των διανυσμάτων θέσης των άκρων του. Πράγματι έχουμε:

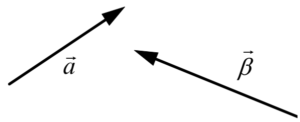
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

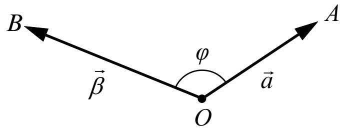
Ώστε: Οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των διανυσμάτων θέσης των άκρων του και μάλιστα $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Με βάση την τελευταία σχέση έχουμε να παρατηρήσουμε ότι η διαφορά δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή είναι ένα διάνυσμα με αρχή το πέρας του δεύτερου («αφαιρετέου») και πέρας το πέρας του πρώτου («μειωτέου»).

Γωνία δύο διανυσμάτων

Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Με αρχή ένα τυχαίο σημείο Ο παίρνουμε $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$.



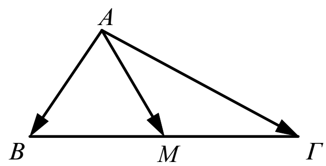


Η κυρτή γωνία φ που σχηματίζουν τα διανύσματα θέσης των Α και Β λέγεται γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Είναι φανερό ότι $0 \le \varphi \le \pi$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, να δειχθεί ότι $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma})$.

Λύση

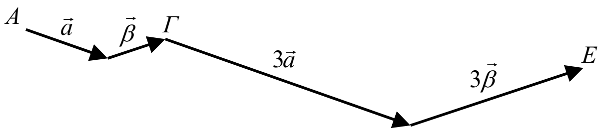


$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM} \qquad (1)$$
$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma M}. \qquad (2)$$

με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει:

$$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{\Gamma M}$$
$$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma} \qquad (\overrightarrow{BM},\ \overrightarrow{\Gamma M} \text{ αντίθετα})$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}).$$

2. Στο παρακάτω σχήμα να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α,Γ,Ε είναι συνευθειακά.



Λύση

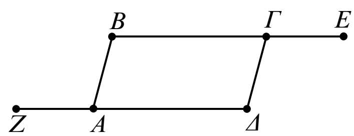
$\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

$\overrightarrow{\Gamma E} = 3\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = 3\,(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\,)$

Άρα, $\overrightarrow{\Gamma E} = 3\overrightarrow{A\Gamma}$, δηλαδή τα σημεία Α,Γ,Ε είναι συνευθειακά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και ΓΕ=ΑΖ=$\dfrac{B\Gamma}{2}$. Καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστή ή λάθος. Αν είναι σωστή, κυκλώστε το γράμμα Σ, αν είναι λάθος, κυκλώστε το γράμμα Λ.



(1)	$\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{\Gamma E}$	Σ	Λ
(2)	$\overrightarrow{BZ} = \overrightarrow{E\Delta}$	Σ	Λ
(3)	$\overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{\Gamma E}$	Σ	Λ
(4)	$\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{\Gamma E}$	Σ	Λ
(5)	$\overrightarrow{ZA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$	Σ	Λ
(6)	$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{A\Gamma}$	Σ	Λ

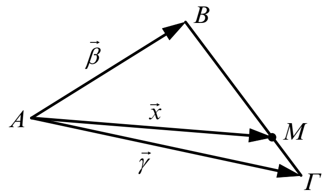
2. Ποιο από τα παρακάτω διανύσματα είναι παράλληλο στο διάνυσμα $3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$;

1) $6\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$ 2) $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ 3) $2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ 4) $\vec{\alpha} - \frac{2}{3}\vec{\beta}$.

3. Δίδονται δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.Να κατασκευάσετε τα διανύσματα :
$2\vec{\alpha}$, $-3\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$, $-3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$.

4. Αν στο διπλανό σχήμα είναι ΒΜ=3ΜΓ, να αποδείξετε ότι:

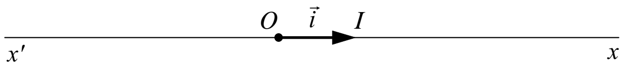
$$\vec{x} = \frac{1}{4}(\vec{\beta} + 3\vec{\gamma})\,.$$



3.4 Συντεταγμένες στο επίπεδο

Άξονας

Έστω x΄x μια ευθεία και δύο σημεία της Ο και Ι. Θεωρούμε ότι το Ο είναι σημείο αναφοράς (αρχή) και το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OI}$ ότι είναι 1, δηλαδή το διάνυσμα $\overrightarrow{OI}$ να είναι το μοναδιαίο διάνυσμα πάνω στη x΄x. Το $\overrightarrow{OI}$ το συμβολίζουμε με το $\vec{i}$.



Η ευθεία x΄x, στην οποία ορίσαμε ένα σημείο αναφοράς και το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{i}$, λέγεται **άξονας**. Η ημιευθεία Οx λέγεται θετικός ημιάξονας, ενώ η ημιευθεία Οx΄ λέγεται αρνητικός ημιάξονας.

Για ένα σημείο Μ του άξονα, επειδή $\overrightarrow{OM} \,//\, \vec{i}$ θα υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$. Αλλά και αντίστροφα για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει μοναδικό σημείο Μ του x΄x ώστε $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$. Τον αριθμό x τον ονομάζουμε **τετμημένη** του σημείου Μ.