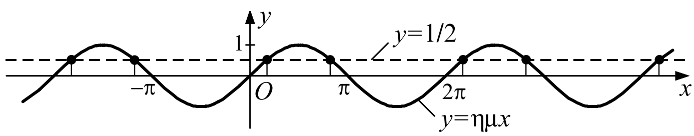
Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

Η εξίσωση ημx = α

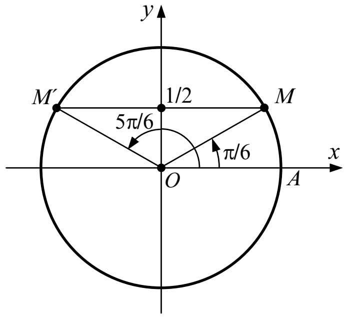
Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $\textbf{ημx} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ να βρούμε, δηλαδή, εκείνα τα $x \in R$, για τα οποία η συνάρτηση f(x) = ημx παίρνει την τιμή $\frac{1}{2}$. Σχεδιάζοντας τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων y = ημx και $y = \frac{1}{2}$ (ευθεία) παρατηρούμε ότι:



- Τα ζητούμενα x είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της καμπύλης y = ημx και της ευθείας $y = \frac{1}{2}$.
- Τα σημεία τομής της καμπύλης και της ευθείας είναι άπειρα σε πλήθος.

Επειδή η συνάρτηση y = ημx είναι περιοδική με περίοδο 2π, για να βρούμε τα x αρκεί να βρούμε αυτά που υπάρχουν σ' ένα διάστημα πλάτους 2π και σε καθένα να προσθέσουμε το $\kappa \cdot 2\pi$, όπου κ ακέραιος. Οι λύσεις της εξίσωσης $ημx = \frac{1}{2}$ στο διάστημα [0, 2π], όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου, είναι $\frac{\pi}{6}$ και $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.(Τα παραπληρωματικά τόξα έχουν ίδιο ημίτονο)

Επομένως, **όλες** οι λύσεις της εξίσωσης $ημx = \frac{1}{2}$ θα δίνονται από τους τύπους:



$$\begin{cases} x = 2κπ + θ \\ ή \\ x = 2κπ + \frac{5π}{6} \end{cases}, \; κ \in Z.$$

Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης ημx = α, δηλαδή, αν ισχύει ημx = ημθ, τότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{array}{l} x = 2κπ + θ \\ \quad\; ή \qquad\qquad , \; κ \in Z \\ x = 2κπ + (π-θ) \end{array}$$

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η εξίσωση $ημx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $ημ\frac{π}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα $-ημ\left(\frac{π}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ημ\left(-\frac{π}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(Τα αντίθετα τόξα έχουν αντίθετα ημίτοξα). Έτσι η εξίσωση γράφεται $ημx = ημ\left(-\frac{π}{4}\right)$ και οι λύσεις της δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{array}{l} x = 2κπ + \left(-\frac{π}{4}\right) \\ \qquad ή \\ x = 2κπ + \left[π - \left(-\frac{π}{4}\right)\right] \end{array}, \; κ \in Z, \text{ δηλαδή } \begin{cases} x = 2κπ - \frac{π}{4} \\ \qquad ή \\ x = 2κπ + π + \frac{π}{4} \end{cases}, \; κ \in Z.$$

2. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

Λύση

Επειδή $\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, η εξίσωση γράφεται $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}$, οπότε οι λύσεις της δίνονται από τους τύπους:

$$\left\{\begin{array}{ll} x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} & (\alpha) \\ \quad\text{ή} & ,\ \kappa\in Z. \\ x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6} & (\beta) \end{array}\right.$$

Από την (α) προκύπτει ότι $x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{12}$,

ενώ από τη (β) ότι $x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow$

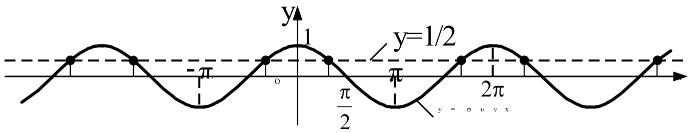
$x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{12}$.

Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{array}{ll} x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{12} & \\ \quad\text{ή} & ,\ \kappa\in Z \\ x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{12} & \end{array}$$

Η εξίσωση συνx = α

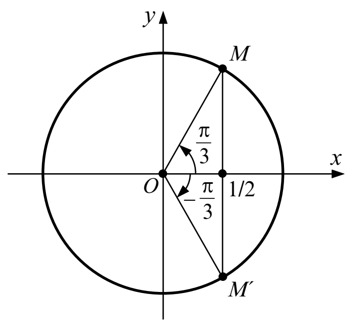
Έστω ότι πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}$. Και εδώ θα πρέπει να βρούμε τις τετμημένες των σημείων τομής, που είναι άπειρες σε πλήθος, της καμπύλης y = συνx και της ευθείας $y=\frac{1}{2}$, όπως μπορούμε να δούμε στο παρακάτω σχήμα.



Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου βρίσκουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης $συνx=\frac{1}{2}$ στο διάστημα [-π, π] είναι $\frac{\pi}{3}$ και $-\frac{\pi}{3}$, γιατί

$συν\frac{\pi}{3}=συν\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$. (Τα αντίθετα τόξα έχουν ίδιο συνημίτονο) .

Επειδή η συνάρτηση f(x) = συνx είναι περιοδική με περίοδο 2π, το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $συνx=\frac{1}{2}$ δίνεται από τους τύπους:



$$\begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \\ \quad ή \qquad , \kappa\in Z. \\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης συνx = α, ισχύει, δηλαδή, συνθ = συνx, τότε οι λύσεις αυτής δίνονται από τους τύπους:

$$\boxed{\begin{array}{l} x=2\kappa\pi+\theta \\ \qquad ή \qquad , \kappa\in Z \\ x=2\kappa\pi-\theta \end{array}}$$

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η εξίσωση $συνx = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Λύση

Επειδή $συν\frac{π}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, η εξίσωση γράφεται $συνx = συν\frac{π}{6}$ και οι λύσεις της δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{aligned} x &= 2κπ + \frac{π}{6} \\ &\text{ή} \qquad , κ \in Z \\ x &= 2κπ - \frac{π}{6} \end{aligned}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση $συνx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Λύση

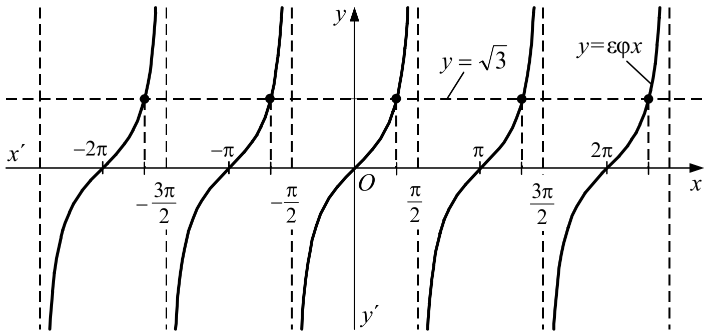
Επειδή $συν\frac{π}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, θα είναι $συν\left(π - \frac{π}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, δηλαδή $συν\frac{3π}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

(Τα παραπληρωματικά τόξα έχουν αντίθετα συνημίτονα). Έτσι, $συνx = συν\frac{3π}{4}$ και , επομένως,

$$\begin{aligned} x &= 2κπ + \frac{3π}{4} \\ &\text{ή} \qquad , κ \in Z. \\ x &= 2κπ - \frac{3π}{4} \end{aligned}$$

Η εξίσωση εφx = α

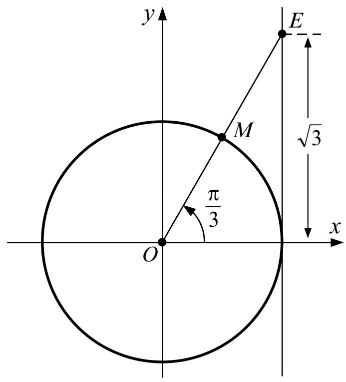
Έστω ότι πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $εφx = \sqrt{3}$. Σχεδιάζοντας τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = εφx$ και $y = \sqrt{3}$.



Παρατηρούμε ότι σε κάθε διάστημα πλάτους π, για παράδειγμα το $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, η εξίσωση έχει μία μόνο λύση και, επειδή η y = εφx είναι περιοδική με περίοδο π, αρκεί σ' αυτή τη λύση να προσθέσουμε το κπ, όπου κ ακέραιος.

Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου βρίσκουμε ότι η λύση της εξίσωσης $\varepsilon\varphi x=\sqrt{3}$ στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι η $\frac{\pi}{3}$ και, επομένως, λύση της εξίσωσης $\varepsilon\varphi x=\sqrt{3}$ είναι:

$x=\kappa\pi+\theta\ ,\ \kappa\in Z$.



Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης εφx = α, αν δηλαδή ισχύει εφx = εφθ, τότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι :

$$x=\kappa\pi+\theta\ ,\ \kappa\in Z$$

Σημείωση

Για την επίλυση της εξίσωσης σφx = α χρησιμοποιούμε τον ίδιο τύπο λύσεων.

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η εξίσωση $εφx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Λύση

Επειδή $εφ\frac{π}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, είναι $εφ\left(-\frac{π}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. (Τα αντίθετα τόξα έχουν αντίθετες εφαπτομένες). Επομένως, η εξίσωση γράφεται $εφx = εφ\left(-\frac{π}{6}\right)$, οπότε $x = κπ - \frac{π}{6}$, $κ \in Z$.

2. Να λυθεί η εξίσωση σφx = $\sqrt{3}$.

Λύση

Επειδή $σφ\frac{π}{6} = \sqrt{3}$, έχουμε $σφx = σφ\frac{π}{6}$ και οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τον τύπο $x = κπ + \frac{π}{6}$, $κ \in Z$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) ημx = 1 ii) συνx = 0 iii) συνx = -1 iv) σφx = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ v) $ημx = -\frac{1}{2}$

vi) εφx = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

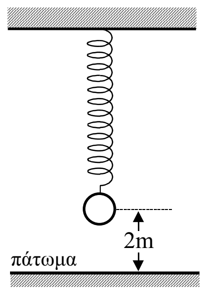
2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $ημ\left(2x + \frac{π}{3}\right) = -1$ ii) $συν\left(3x + \frac{π}{4}\right) = 1$ iii) $εφ\left(2x - \frac{π}{4}\right) = \sqrt{3}$.

3. Να λύσετε τις εξισώσεις χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικούς πίνακες ή υπολογιστή τσέπης:
i) ημx = 0,952 ii) συx = -0,804 iii) εφx = 27,603 .

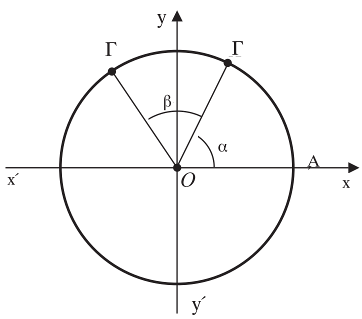
4. Να βρείτε για ποιες τιμές του x καθεμιά από τις επόμενες συναρτήσεις έχει τη μέγιστη και για ποιες την ελάχιστη τιμή της:
i) $f(x) = 2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $0 \le x < 2\pi$ ii) $g(x) = 4\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $0 \le x < 2\pi$.

5. Το μεταλλικό σφαιρίδιο που κρέμεται από το ελατήριο στο παρακάτω σχήμα απέχει από το πάτωμα 2m. ΄Οταν το ελατήριο πάλλεται το ύψος του σφαιριδίου
από το πάτωμα σε μέτρα είναι $h = 2 + \frac{1}{3}\eta\mu 2t$, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.
i) Να υπολογίσετε τη διαφορά ανάμεσα στο μέγιστο και ελάχιστο ύψος.
ii) Πόσες φορές δημιουργείται αυτή η διαφορά στο διάστημα $t \in [0,8]$;



Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

Ας θεωρήσουμε τις εφεξής γωνίες $A\hat{O}B = \alpha$ και $B\hat{O}\Gamma = \beta$.



Τότε $A\hat{O}\Gamma = A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma$, δηλαδή $A\hat{O}\Gamma = \alpha + \beta$. Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω τύποι:

$$\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta$$
$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$$
$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$$
$$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}$$

Παρατήρηση

Για να ορίζονται οι εφ(α+β), εφα και εφβ, πρέπει συν(α+β) ≠ 0, συνα ≠ 0 και συνβ ≠ 0.

Όμοια, για να ορίζονται οι σφ(α+β), σφα και σφβ, πρέπει ημ(α+β) ≠ 0, ημα ≠ 0 και ημβ ≠ 0.

Για παράδειγμα, έχουμε:

$$\eta\mu 75^{o}=\eta\mu(45^{o}+30^{o})=\eta\mu 45^{o}\cdot\sigma\upsilon\nu 30^{o}+\sigma\upsilon\nu 45^{o}\cdot\eta\mu 30^{o}=$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

$$\sigma\upsilon\nu 75^{o}=\sigma\upsilon\nu(45^{o}+30^{o})=\sigma\upsilon\nu 45^{o}\cdot\sigma\upsilon\nu 30^{o}-\eta\mu 45^{o}\cdot\eta\mu 30^{o}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

$$\varepsilon\varphi 75^{o}=\varepsilon\varphi(45^{o}+30^{o})=\frac{\varepsilon\varphi 45^{o}+\varepsilon\varphi 30^{o}}{1-\varepsilon\varphi 45^{o}\cdot\varepsilon\varphi 30^{o}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

$$\sigma\varphi 75^{o}=\sigma\varphi(45^{o}+30^{o})=\frac{\sigma\varphi 45^{o}\cdot\sigma\varphi 30^{o}-1}{\sigma\varphi 45^{o}+\sigma\varphi 30^{o}}=\frac{1\cdot\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}.$$

Αν στους παραπάνω τύπους αντικαταστήσουμε το β με το –β, παίρνουμε:

$$\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta$$
$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$$
$$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$$
$$\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}$$

Για παράδειγμα, έχουμε:

$$\eta\mu15^{o}=\eta\mu(45^{o}-30^{o})=\eta\mu45^{o}\cdot\sigma\upsilon\nu30^{o}-\sigma\upsilon\nu45^{o}\cdot\eta\mu30^{o}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}..$$

$$\sigma\upsilon\nu15^{o}=\sigma\upsilon\nu(45^{o}-30^{o})=\sigma\upsilon\nu45^{o}\cdot\sigma\upsilon\nu30^{o}-\eta\mu45^{o}\cdot\eta\mu30^{o}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

$$\varepsilon\varphi15^{o}=\varepsilon\varphi(45^{o}-30^{o})=\frac{\varepsilon\varphi45^{o}-\varepsilon\varphi30^{o}}{1+\varepsilon\varphi45^{o}\cdot\varepsilon\varphi30^{o}}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3\cdot\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=2-\sqrt{3}.$$

$$\sigma\varphi15^{o}=\sigma\varphi(45^{o}-30^{o})=\frac{\sigma\varphi45^{o}\cdot\sigma\varphi30^{o}+1}{\sigma\varphi30^{o}-\sigma\varphi45^{o}}=\frac{1\cdot\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=$$
$$=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}.$$

Αν στους τύπους του ημ(α+β), του συν(α+β), της εφ(α+β) και της σφ(α+β) αντικαταστήσουμε το β με το α, θα έχουμε:

- $ημ2α = ημ(α+α) = ημα \cdot συνα + συνα \cdot ημα = 2ημα \cdot συνα$

  Επομένως:

  $$\boxed{ημ2α = 2ημασυνα}$$

- $συν2α = συν(α+α) = συνα \cdot συνα + ημα \cdot ημα = συν^2α - ημ^2α$.

  Επειδή $ημ^2α + συν^2α = 1$, έχουμε $ημ^2α = 1 - συν^2α$ και $συν^2α = 1 - ημ^2α$.

  Άρα, $συν2α = συν^2α - ημ^2α = συν^2α - (1 - συν^2α) = συν^2α - 1 + συν^2α =$

  $= 2συν^2α - 1$ και

  $συν2α = συν^2α - ημ^2α = (1 - ημ^2α) - ημ^2α = 1 - ημ^2α - ημ^2α =$

  $= 1 - 2ημ^2α$.

  Επομένως:

  $$\boxed{\begin{aligned} συν2α &= συν^2α - ημ^2α \\ &= 2συν^2α - 1 \\ &= 1 - 2ημ^2α \end{aligned}}$$

- $εφ2α = εφ(α+α) = \dfrac{εφα + εφα}{1 - εφα \cdot εφα} = \dfrac{2εφα}{1 - εφ^2α}$.

  Επομένως:

  $$\boxed{εφ2α = \dfrac{2εφα}{1 - εφ^2α}}$$

- $σφ2α = σφ(α+α) = \dfrac{σφα \cdot σφα - 1}{σφα + σφα} = \dfrac{σφ^2α - 1}{2σφα}$.

  Επομένως:

  $$\boxed{σφ2α = \dfrac{σφ^2α - 1}{2σφα}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν $ημα=\frac{5}{13}$, με $0<α<\frac{π}{2}$, και $συνβ=-\frac{4}{5}$, με $\frac{π}{2}<β<π$, να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του α+β.

Λύση

Είναι: $συν^2α=1-ημ^2α=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}$, οπότε $συνα=\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{12}{13}$, αφού $0<α<\frac{π}{2}$ και $συνα>0$.

Επίσης για τη γωνία β ισχύει:

$ημ^2β=1-συν^2β=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$, οπότε $ημβ=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$, αφού $\frac{π}{2}<β<π$ και $ημβ>0$.

Επομένως ,

$$ημ(α+β)=ημα\cdot συνβ+συνα\cdot ημβ=\frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5}=\frac{16}{65}$$

$$συν(α+β)=συνα\cdot συνβ-ημα\cdot ημβ=\frac{12}{13}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{63}{65}$$

οπότε

$$εφ(α+β)=\frac{ημ(α+β)}{συν(α+β)}=\frac{\frac{16}{65}}{-\frac{63}{65}}=-\frac{16}{63},$$

$$σφ(α+β)=\frac{συν(α+β)}{ημ(α+β)}=\frac{-\frac{63}{65}}{\frac{16}{65}}=-\frac{63}{16}.$$

2. Να αποδειχτεί ότι: $ημ(α+β)\cdot ημ(α-β)=ημ^2α-ημ^2β$.

Απόδειξη

$$ημ(α+β)\cdot ημ(α-β) = (ημα\cdot συνβ + συνα\cdot ημβ)(ημα\cdot συνβ - συνα\cdot ημβ) =$$

$$= ημ^2α\cdot συν^2β - συν^2α\cdot ημ^2β = ημ^2α(1-ημ^2β) - (1-ημ^2α)ημ^2β =$$
$$= ημ^2α - ημ^2α\cdot ημ^2β - ημ^2β + ημ^2α\cdot ημ^2β = ημ^2α - ημ^2β.$$

3. Να λυθεί η εξίσωση: $2ημx = συν\left(x-\frac{π}{6}\right)$.

Λύση

$$2ημx = συν\left(x-\frac{π}{6}\right) \Leftrightarrow 2ημx = συνx\cdot συν\frac{π}{6} + ημx\cdot ημ\frac{π}{6} \Leftrightarrow$$

$$2ημx = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot συνx + \frac{1}{2}ημx \Leftrightarrow 4ημx = \sqrt{3}συνx + ημx \Leftrightarrow$$

$$4ημx - ημx = \sqrt{3}συνx \Leftrightarrow 3ημx = \sqrt{3}συνx \Leftrightarrow \frac{ημx}{συνx} = \frac{\sqrt{3}}{3},\ συνx \neq 0$$

$$\Leftrightarrow εφx = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow εφx = εφ\frac{π}{6} \Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{6},\ κ \in Z$$

4. Αν $ημα = \frac{1}{5}$ και $\frac{π}{2} < α < π$, να υπολογιστούν τα ημ2α και συν2α.

Λύση

Έχουμε: $συν2α = 1 - 2ημ^2α = 1 - 2\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{23}{25}$

Αλλά $συν^2α = 1 - ημ^2α = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$ και, επειδή $\frac{π}{2} < α < π$, $συνα < 0$,

επομένως $συνα = -\sqrt{\frac{24}{25}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$, οπότε

$$ημ2α = 2ημασυνα = 2\cdot\frac{1}{5}\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{25}.$$

5. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης : $A = \dfrac{\varepsilon\varphi 15^o}{1-\varepsilon\varphi^2 15^o}$.

Λύση

Έχουμε:

$$A = \frac{2\varepsilon\varphi 15^o}{2(1-\varepsilon\varphi^2 15^o)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\varepsilon\varphi 15^o}{1-\varepsilon\varphi^2 15^o} = \frac{1}{2}\varepsilon\varphi(2\cdot 15) = \frac{1}{2}\varepsilon\varphi 30^o = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών : 105^o και 135^o.

2. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α + β, αν :

i) $\eta\mu\alpha = -\dfrac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\beta = -\dfrac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ και $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$,

ii) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\eta\mu\beta = \dfrac{12}{13}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ και $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

3. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu(-2x) - \eta\mu 3x \cdot \eta\mu(-2x)$.

ii) $\eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x \cdot \eta\mu x$.

iii) $\dfrac{\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi 2x}{1-\varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi 2x}$.

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu x$.

ii) $\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$.

5. Να αποδείξετε ότι:

i) $ημ(α+β)+ημ(α-β)=2ημα\cdot συνβ$.

ii) $συν(α+β)+συν(α-β)=2συν^2α\cdot ημ^2β$.

6. Να αποδείξετε ότι σε κάθε μη ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:
$εφA+εφB+εφΓ=εφA\cdot εφB\cdot εφΓ$.

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2συνx=ημ\left(x+\frac{π}{6}\right)$ ii) $ημ7x=συν\left(7x+\frac{π}{6}\right)$.

8. Αν $συνx=-\frac{1}{3}$ και $\frac{π}{2}<x<π$, να υπολογιστούν τα ημ2x και εφ2x.

9. Αν $εφ2α=\frac{3}{4}$ και $\frac{π}{2}<α<π$, να βρεθεί η εφα.

10. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία α με $συνα\neq 0$ ισχύει:

i) $ημ2α=\frac{2εφα}{1+εφ^2α}$ ii) $συν2α=\frac{1-εφ^2α}{1+εφ^2α}$.

11. Να αποδείξετε ότι:

i) $ημ^2α+συν2α=συν^2α$ ii) $\frac{ημ2α}{1-ημ^2α}=2εφα$

iii) $\frac{ημ2α}{1+συν2α}=εφα$ iv) $ημ2α-συν2α\cdot εφα=εφα$.

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2-ημ^2x=2συν^2\frac{x}{2}$ ii) $ημ2x\cdot συν2x=\frac{1}{4}$.