ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

2.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Από προηγούμενες τάξεις γνωρίζουμε την έννοια της δύναμης:

- Με **βάση έναν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό** και **εκθέτη ακέραιο.**

Για παράδειγμα, $(-2)^3$, 3^{-2} , $\left(-\frac{3}{5}\right)^4$, $0{,}1^{-3}$.

Συγκεκριμένα, ορίσαμε ότι:

- $\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγ.}}$, αν ν θετικός ακέραιος με ν>1

  Για παράδειγμα,

  $$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$
  $$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$$

- $\alpha^1 = \alpha$ και $\alpha^0 = 1$, $\alpha \neq 0$.

  Για παράδειγμα

  $$\left(-\frac{3}{2}\right)^1 = -\frac{3}{2}$$
  $$2^0 = 1$$

- $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\nu$, αν ν θετικός ακέραιος και α≠0.

  Για παράδειγμα,

  $$3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$
  $$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(-\frac{2}{1}\right)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

Στη συνέχεια επεκτείνοντας την έννοια της δύναμης ορίζουμε δυνάμεις:

- Με **βάση έναν οποιοδήποτε θετικό πραματικό αριθμό** και **εκθέτη ρητό**.

Συκεκριμένα, αν α>0, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος

ορίζουμε ότι $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.

Για παράδειγμα, $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9$

$$7^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{7^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{7}} .$$

Αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο αριθμό ισχύουν και για τις δυνάμεις που έχουν εκθέτη ρητό αριθμό.

Επίσης ορίζουμε δυνάμεις:

- Με **βάση ένα οποιοδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό** και εκθέτη άρρητο αριθμό

Για παράδειγμα, $2^{\sqrt{3}}$, $(0{,}51)^{-\sqrt{7}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$

Ο υπολογισμός δυνάμεων με άρρητο εκθέτη γίνεται εύκολα με τη βοήθεια μιας υπολογιστικής μηχανής. Για παράδειγμα, για να υπολογίσουμε τη δύναμη $2^{\sqrt{3}}$, πατάμε με τη σειρά τα πλήκτρα $\boxed{2}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\sqrt{x}}$ $\boxed{=}$ και στην οθόνη εμφανίζεται το αποτέλεσμα κατά προσέγγιση.

Αποδεικνύεται ότι και στην περίπτωση αυτή ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων.

Με υπολογιστική μηχανή μπορούμε να υπολογίσουμε δυνάμεις με εκθέτη οποιοδήποτε αριθμό, όπως δείχνουν τα παρακάτω παραδείγματα.

ΔΥΝΑΜΗ	ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (Σειρά που πατάμε τα πλήκτρα)	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ (Κατά προσέγγιση)
$3^{1,2}$	3 x^y 1 • 2 =	3,707
$2,7^{-3,19}$	2,7 x^y 3 • 19 +/- =	0,042
$2^{\frac{3}{5}}$	2 x^y (3 : 5) =	1,516
$3^{\sqrt{5}}$	3 x^y 5 $\sqrt{x}$ =	11,665
2^{π}	2 x^y exp =	8,825

Σχόλιο

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι η δύναμη α^x είναι θετικός αριθμός, όταν η βάση α είναι θετική, ανεξάρτητα αν ο εκθέτης x είναι θετικός, αρνητικός ή μηδέν.

Επομένως, για τις δυνάμεις που έχουν βάση θετικό αριθμό και εκθέτη οποιοδήποτε πραματικό αριθμό ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

Αν α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $x, y \in R$, τότε:

1. $\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y}$
2. $\alpha^x : \alpha^y = \alpha^{x-y}$
3. $(\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x$
4. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{\alpha^x}{\beta^x}$
5. $(\alpha^x)^y = \alpha^{x \cdot y}$

Παραδείγματα

α	Χ	α^x
2	3	$2^3=8$
3	-2	$3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$
$\frac{2}{3}$	-2	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0=1$
3	$\frac{1}{2}$	$3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

Ειδικά, για α = 1 οι δυνάμεις 1^x **είναι ίσες με 1 για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x.**

Εισαγωγή στην έννοια της εκθετικής συνάρτησης

Παράδειγμα

Ο πληθυσμός μιας κοινωνίας βακτηριδίων διπλασιάζεται κάθε ώρα. Ας υποθέσουμε ότι τη στιγμή που αρχίσαμε να μετράμε το πλήθος των βακτηριδίων υπήρχαν 1.000 βακτηρίδια . Θα υπολογίσουμε:

i) Πόσα βακτηρίδια θα υπάρχουν μετά από μία, δύο, τρεις και τέσσερις ώρες από τη στιγμή που αρχίσαμε να μετράμε και
ii) πόσα βακτηρίδια υπήρχαν μία, δύο, τρεις και τέσσερις ώρες, πριν αρχίσουμε να μετράμε.

Λύση

Τη στιγμή που αρχίσαμε το μέτρημα υπήρχαν 1.000 βακτηρίδια:

Μετά από 1 ώρα θα υπάρχουν $2\cdot 1000=2^1\cdot 1000$ βακτηρίδια.

Μετά από 2 ώρες θα υπάρχουν $2\cdot(2\cdot 1000)=2^2\cdot 1000$ βακτηρίδια.

Μετά από 3 ώρες θα υπάρχουν $2\cdot(2^2\cdot 1000)=2^3\cdot 1000$ βακτηρίδια.

Μετά από 4 ώρες θα υπάρχουν $2\cdot(2^3\cdot 1000)=2^4\cdot 1000$ βακτηρίδια.

Αν υποθέσουμε ότι η στιγμή που αρχίσαμε να μετράμε είναι η χρονική στιγμή $x = 0$, τότε:

Μετά από 0, 1 , 2 , 3 , 4 ώρες, θα έχουμε αντίστοιχα

$1\ ,\ 2\ ,\ 2^2\ ,\ 2^3\ ,\ 2^4$ χιλιάδες βακτηρίδια.

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $1\ ,\ 2\ ,\ 2^2\ ,2^3,\ 2^4$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο 1 και λόγο 2.

Επίσης:

1 ώρα πριν αρχίσουμε το μέτρημα υπήρχαν $\left(\frac{1}{2}\cdot 1000\right)=\frac{1}{2}\cdot 1000$ βακτηρίδια.

2 ώρες πριν αρχίσουμε το μέτρημα υπήρχαν $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1000\right)=\frac{1}{2^2}\cdot 1000$ βακτηρίδια.

3 ώρες πριν αρχίσουμε το μέτρημα υπήρχαν $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^2}\cdot 1000\right)=\frac{1}{2^3}\cdot 1000$ βακτηρίδια.

4 ώρες πριν αρχίσουμε το μέτρημα υπήρχαν $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^3}\cdot 1000\right)=\frac{1}{2^4}\cdot 1000$ βακτηρίδια.

Οι αριθμοί $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^4}$ είναι ομοίως διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο 1 και λόγο $\frac{1}{2}$.

Αν παραστήσουμε με τους θετικούς ακεραίους 1, 2, 3, 4 τις ώρες από τότε που αρχίσαμε να μετράμε ($x=0$) και με τους αρνητικούς ακέραιους –1, -2, -3, -4 τις ώρες πριν αρχίσουμε να μετράμε, τότε ο πίνακας που ακολουθεί μας βοηθάει να δούμε καλύτερα πώς αυξάνεται ο πληθυσμός των βακτηριδίων στις ακέραιες ώρες.

Ώρες x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Πλήθος βακτηριδίων σε χιλιάδες	$2^{-4}=\frac{1}{16}$	$2^{-3}=\frac{1}{8}$	$2^{-2}=\frac{1}{4}$	$2^{-1}=\frac{1}{2}$	$2^0=1$	$2^1=2$	$2^2=4$	$2^3=8$	$2^4=\frac{1}{16}$

Από τον παραπάνω πίνακα καταλαβαίνουμε ότι το πλήθος των βακτηριδίων 2^{-4}, 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^{0}, 2^{1}, 2^{2}, 2^{3}, 2^{4} (σε χιλιάδες) είναι τιμές της συνάρτησης f_1, η οποία σε κάθε ακέραιο αριθμό x αντιστοιχίζει τον αριθμό 2^x.

Δηλαδή η f_1 έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των ακεραίων και τιμές μέσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών:

$$\mathbf{f_1 : Z \to R \quad \text{με } f_1(x) = 2^x}$$

Για παράδειγμα, ο αριθμός των βακτηριδίων :

3 ώρες πριν αρχίσουμε το μέτρημα είναι $f_1(-3) = \frac{1}{2^3} \cdot 1000 = 125$ βακτηρίδια

6 ώρες αφού αρχίσουμε το μέτρημα είναι $f_1(6) = 2^6 = 64.000$ βακτηρίδια

Τι συμβαίνει όμως με το πλήθος των βακτηριδίων στις ενδιάμεσες χρονικές στιγμές;

Η έρευνα έχει δείξει ότι για οποιαδήποτε χρονική στιγμή x το πλήθος των βακτηριδίων είναι 2^x.

Τελικά, οι αριθμοί που μας δίνουν το πλήθος των βακτηριδίων οποιαδήποτε χρονική στιγμή x, $x \in [-4, 4]$ είναι τιμές μιας συνάρτησης f, η οποία σε κάθε πραγματικό αριθμό x αντιστοιχίζει τον αριθμό 2^x.

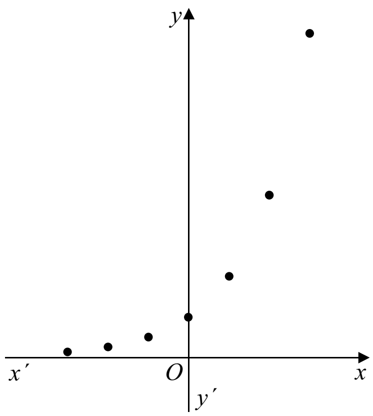
Δηλαδή, ορίζεται η συνάρτηση:

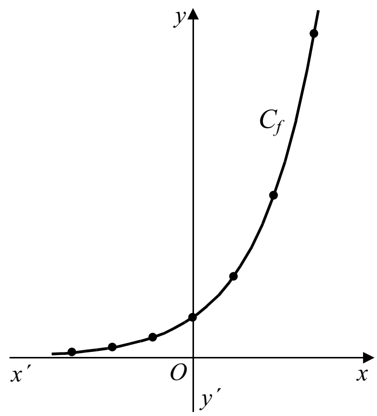
$$\mathbf{f : R \to R \quad \text{με } f(x) = 2^x}$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται εκθετική συνάρτηση με βάση 2.

Αν σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_1 και f, παρατηρούμε ότι η C_{f_1} είναι σύνολο μεμονωμένων σημείων, ενώ η C_f είναι συνεχής γραμμή.

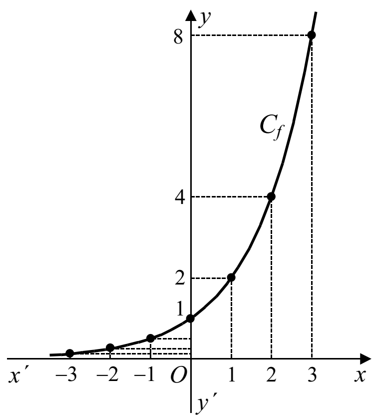
Την εξέλιξη του φαινομένου του προηγούμενου παραδείγματος στο χρονικό διάστημα της παρατήρησης, α) στις ακέραιες ώρες και β) οποιαδήποτε χρονική στιγμή, μας τη δίνουν οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις.





Η C_{f_1} είναι σύνολο μεμονωμένων σημείων.   Η C_f είναι συνεχής καμπύλη γραμμή.

Για τη συνάρτηση $\mathbf{f : R \to R}$ με $\mathbf{f(x) = 2^x}$ παρατηρούμε ότι:



- Η $f(x) = 2^x$ έχει πεδίο ορισμού το R.
- Έχει σύνολο τιμών το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών.
- Όταν μεγαλώνουν οι εκθέτες

$$\ldots -1 < -\frac{1}{2} < 0 < 1 < \sqrt{2} < 2 < 3 < \ldots,$$

μεγαλώνουν αντίστοιχα και οι δυνάμεις

$$\ldots 2^{-1} < 2^{-\frac{1}{2}} < 2^0 < 2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2 < 2^3 < \ldots,$$

δηλαδή, μεγαλώνουν οι τιμές της συνάρτησης $f(x) = 2^x$.

Πιο απλά: Όταν μεγαλώνουν οι τιμές του x, η καμπύλη «ανεβαίνει». Τότε, όπως είναι γνωστό, λέμε ότι η $f(x) = 2^x$ είναι γνησίως αύξουσα .

- Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α (0, 1), γιατί για $x = 0$, $f(0) = 2^0 = 1$.

Γενικά

Έστω α θετικός αριθμός με $\alpha \neq 1$. Τότε σε κάθε πραγματικό αριθμό x μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τον αριθμό α^x.

Έτσι ορίζουμε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R και τύπο $f(x) = \alpha^x$.

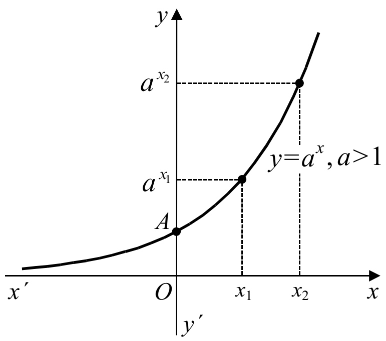
Δηλαδή,

$f: R \to R$ με $f(x) = \alpha^x$.

Η συνάρτηση αυτή λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση α. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης αυτής είναι το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών.

Αν α = 1 η συνάρτηση γίνεται $f(x) = 1^x = 1$, δηλαδή είναι σταθερή συνάρτηση. Επομένως, δεν έχει ενδιαφέρον η μελέτη της, αφού είναι γνωστή η συμπεριφορά της.

Γενικά, η γραφική της $f: R \to R$ με $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 1$ έχει την παρακάτω μορφή:



Τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε από τη μελέτη της $f(x) = 2^x$ γενικεύονται και για την $f(x) = \alpha^x$ με $\alpha > 1$. Έτσι έχουμε :

Η $f(x) = \alpha^x$ με $\alpha > 1$

- Έχει πεδίο ορισμού το R
- Σύνολο τιμών το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών.
- Είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$.
- Η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο A (0, 1).
- Η γραφική της παράσταση, όσο οι τιμές του x μικραίνουν, «πλησιάζει» όλο και πιο πολύ τον ημιάξονα των αρνητικών αριθμών Ox΄, χωρίς να τον

συναντά. Γι' αυτό λέμε ότι η C_f της $f(x)=\alpha^x$ έχει «οριζόντια ασύμπτωτο» τον αρνητικό ημιάξονα των τετμημένων.

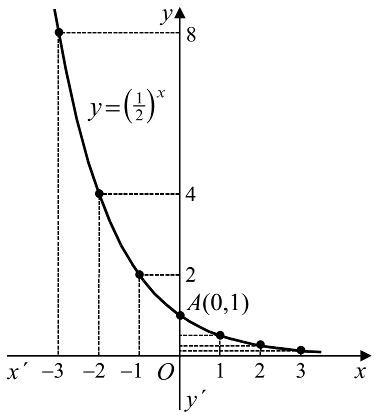
Ας σχεδιάσουμε τώρα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$g:R\to R$ με τύπο $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Κατασκευάζουμε πρώτα έναν πίνακα τιμών.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	32	1 6	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

Στη συνέχεια παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη που παίρνουμε από τον παραπάνω πίνακα και αφού τα ενώσουμε με μια συνεχή καμπύλη, παίρνουμε τη γραφική παράσταση:



Από τη γραφική παράσταση της $g:R\to R$ με $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ παρατηρούμε ότι:

- Η g έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών R.
- Έχει σύνολο τιμών το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών.
- Παρατηρούμε ότι, όταν οι εκθέτες μεγαλώνουν

  $\ldots -2< -1<-\frac{1}{2}<0< 1<\sqrt{2}<2<\ldots$, αντίστοιχα μικραίνουν οι δυνάμεις