ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Στην καθημερινή ζωή χρησιμοποιούμε συχνά τη λέξη «ακολουθία», όταν θέλουμε να εκφράσουμε τη διαδοχικότητα ενός συνόλου πραγμάτων ή γεγονότων σύμφωνα με μία ορισμένη τάξη. Με την ίδια ακριβώς σημασία χρησιμοποιούμε τη λέξη αυτή και στα Μαθηματικά.

1.1 Η έννοια της ακολουθίας

Ένα κομμάτι χαρτί σχήματος ορθογωνίου διπλώνεται 10 φορές έτσι ώστε σε κάθε δίπλωση το ένα τμήμα του χαρτιού να συμπίπτει με το άλλο. Παρατηρούμε ότι:

- Μετά από την 1η δίπλωση το χαρτί χωρίζεται σε 2 ίσα μέρη.
- Μετά από τη 2η δίπλωση το χαρτί χωρίζεται σε $4=2^2$ ίσα μέρη.
- Μετά από την 3η δίπλωση το χαρτί χωρίζεται σε $8=2^3$ ίσα μέρη.
  Συνεχίζοντας τη διαδικασία με τον ίδιο τρόπο,
- μετά από τη νιοστή δίπλωση το χαρτί χωρίζεται σε 2^ν ίσα μέρη.

Έχουμε λοιπόν την αντιστοιχία:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & \nu & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \ldots & 2^\nu & \ldots \end{array}$$

Με τον τρόπο αυτό ορίζεται μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών ακέραιων η οποία ονομάζεται ακολουθία .
Ώστε:

Ακολουθία είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών .

Η ακολουθία συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα α και η τιμή της στο ν, δηλαδή το α(ν), συμβολίζεται με α_ν και λέμε ότι έχουμε την ακολουθία (α_ν).

Οι τιμές $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, … κ.τ.λ. λέγονται όροι της ακολουθίας. Ο α_1 λέγεται πρώτος όρος, ο α_2 λέγεται δεύτερος όρος, … , ο α_ν λέγεται νιοστός ή γενικός όρος της ακολουθίας.
Έστω, για παράδειγμα, μία ακολουθία α με $\alpha_\nu = \nu^2 + 1$.
Τότε $\alpha_1 = 1^2 + 1 = 2$, $\alpha_2 = 2^2 + 1 = 5$, $\alpha_3 = 3^2 + 1 = 10$, …

Τονίζουμε ότι το ν εκφράζει την τάξη του όρου, ενώ ο α_ν την τιμή του όρου. Για παράδειγμα, στην ακολουθία $\alpha_\nu=\nu^2+1$,ο α_3 είναι ο τρίτος όρος και η τιμή του είναι $3^2+1=10$.

Παραδείγματα

1. Να γραφούν οι τέσσερις πρώτοι όροι της ακολουθίας με γενικό όρο $\alpha_\nu=2^\nu$ με ν=1, 2, 3…

Λύση

$\alpha_1=2$, $\alpha_2=2^2=4$, $\alpha_3=2^3=8$ και $\alpha_4=2^4=16$.

2. Η ακολουθία (α_ν) με ν =1, 2, 3… ορίζεται από το κανόνα: «σε κάθε φυσικό αριθμό, διάφορο του μηδενός, αντιστοιχίζουμε το τετράγωνό του». Να γραφούν οι 5 πρώτοι όροι της.

Λύση

$\alpha_1=1^2 = 1$, $\alpha_2=2^2=4$, $\alpha_3=3^2=9$, $\alpha_4=4^2=16$ και $\alpha_5=5^2=25$.

3. Να γραφεί ο νιοστός όρος της ακολουθίας που έχει πρώτους όρους τους αριθμούς 1, 3, 5, 7, …

Λύση

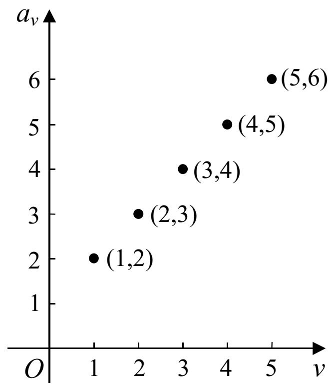
Παρατηρούμε ότι κάθε όρος της ακολουθίας έχει τύπο 2ν-1, δηλαδή $\alpha_\nu=2\nu-1$ με ν=1, 2, 3…

1.2 Γραφική παράσταση ακολουθίας

Μία ακολουθία μπορεί να παρασταθεί γραφικά σ’ ένα σύστημα συντεταγμένων όπως και μία συνάρτηση.

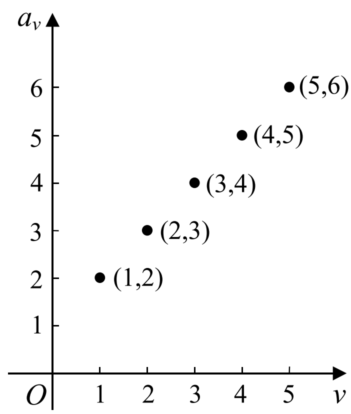
Επειδή το πεδίο ορισμού της ακολουθίας είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων, η γραφική της παράσταση αποτελείται από σημεία με τετμημένες θετικούς ακέραιους αριθμούς.

Για παράδειγμα, στο σχήμα 1 βλέπουμε μερικά σημεία της γραφικής παράστασης της ακολουθίας $\alpha_\nu=\nu+1$.



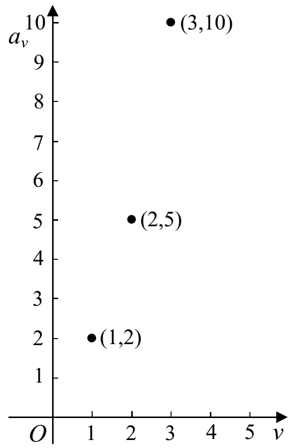
Σχήμα 1

Όμοια στο σχήμα 2 βλέπουμε τη γραφική παράσταση της ακολουθίας $\alpha_\nu = \frac{8}{\nu}$.



Σχήμα 2

Στο σχήμα 3 βλέπουμε τη γραφική παράσταση της ακολουθίας $\alpha_\nu = \nu^2 + 1$.



Σχήμα 3

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τους 5 πρώτους όρους των παρακάτω ακολουθιών:

i) $\alpha_\nu = 2\nu + 1$ ii) $\beta\nu=3\nu$ iii) $\alpha_\nu=(-1)^\nu-(-1)\nu+1$ iv) $\alpha_\nu = (1+\frac{1}{\nu})^\nu$.

2. Όμοια των ακολουθιών:

i) $\alpha_\nu = \frac{2\nu+1}{\nu+1}$ ii) $\beta_\nu = \sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi}{4}$.

3. Να παραστήσετε γραφικά τους 5 πρώτους όρους των ακολουθιών:

i) $\alpha_\nu=2\nu$ ii) $\alpha_\nu=\nu^2-1$ iii) $\alpha_\nu = \frac{2\nu}{\nu+1}$.

ΠΡΟΟΔΟΙ

Αριθμητική Πρόοδος

1.3 Η έννοια της αριθμητικής προόδου

Στην ακολουθία 2, 7, 12, 17, 22,… παρατηρούμε ότι κάθε όρος της, προκύπτει από τον προηγούμενό του, όταν προσθέσουμε σ' αυτόν τον αριθμό 5. Μια τέτοια ακολουθία ονομάζεται **αριθμητική πρόοδος.**

Ώστε:

Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος, όταν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του, όταν προσθέσουμε σ' αυτόν τον ίδιο πάντοτε αριθμό.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με **ω** και τον λέμε **διαφορά της προόδου**.
Δηλαδή, η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική, πρόοδος αν και μόνον αν ισχύει:

$$\boldsymbol{\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\omega \quad \text{ή} \quad \alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\omega}$$

Επομένως, για να βρούμε τη διαφορά **ω** μιας αριθμητικής προόδου, αρκεί από έναν οποιοδήποτε όρο της να αφαιρέσουμε τον προηγούμενό του.
Για παράδειγμα, στην αριθμητική πρόοδο 4, 8, 12, 16,… έχουμε $\omega=12-8=4$

Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$\alpha_1=\alpha_1$

$\alpha_2=\alpha_1+\omega$

$\alpha_3=\alpha_2+\omega=(\alpha_1+\omega)+\omega=\alpha_1+2\omega$

$\alpha_4=\alpha_3+\omega=(\alpha_1+2\omega)+\omega=\alpha_1+3\omega$

… … … … …

$\alpha_\nu=[\alpha_1+(\nu-2)\omega]+\omega=\alpha_1+(\nu-1)\omega$

Ώστε: $\boldsymbol{\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\,\omega}$

Δηλαδή, βρίσκουμε το νιοστό όρο μιας αριθμητικής προόδου, αν στον πρώτο όρο της προσθέσουμε ν-1 φορές τη διαφορά.

Για παράδειγμα, στην αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 3$ και ω = 4 ο νιοστός όρος της είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\,\omega = 3 + (\nu-1)\cdot 4 = 3+4\nu-4 = 4\nu - 1$.

1.4 Αριθμητικός μέσος

Σε μία αριθμητική πρόοδο παίρνουμε τρεις διαδοχικούς της όρους, για παράδειγμα, στην 4, $\boxed{9,\ 14,\ 19}$, 24, 29… παίρνουμε τους όρους 9, 14, 19. Παρατηρούμε ότι $2\cdot 14 = 19+9$, δηλαδή το διπλάσιο του μεσαίου όρου ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων όρων.
Η ιδιότητα αυτή ισχύει σε κάθε αριθμητική πρόοδο και διατυπώνεται ως εξής:

Αν οι αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής πρόοδου, τότε το διπλάσιο του μεσαίου όρου ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων όρων, και αντίστροφα.

Απόδειξη

Έστω ότι οι α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά ω . Θα είναι: $\beta-\alpha = \omega$ και $\gamma-\beta = \omega$, οπότε $\beta-\alpha = \gamma-\beta$.
Επομένως: $2\beta = \alpha+\gamma$.

Αντίστροφα: Αν $2\beta=\alpha+\gamma$, τότε $\beta+\beta=\alpha+\gamma$, δηλαδή $\beta-\alpha = \gamma-\beta=\omega$. Άρα α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Ο αριθμός β με την ιδιότητα $2\beta=\alpha+\gamma$ ονομάζεται **αριθμητικός μέσος** των α και γ.

1. 5 Άθροισμα ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου

Έστω η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω. Το άθροισμα $S_\nu=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots+\alpha_\nu$ των ν-πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο: $S\nu = \dfrac{\nu(\alpha_1+\alpha_\nu)}{2}$.

Απόδειξη

Έχουμε : $S_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu$ ή
$S_\nu = \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} + \ldots + \alpha_2 + \alpha_1$.

Τότε, αν προσθέσουμε κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες παίρνουμε:

$2S_ν=(α_1+α_ν)+(α_2+α_{ν-1})+\ldots+(α_{ν-1}+α_2)+(α_ν+α_1)$
$= (α_1+α_ν)+[(α_1+ω)+(α_ν-ω)]+\ldots+[(α_ν-ω)+(α_1+ω)]+(α_1+α_ν)$
$= (α_1+α_ν)+(α_1+α_ν)+\ldots+(α_1+α_ν)+(α_1+α_ν)$
$= ν(α_1+α_ν)$.

΄Αρα: $$S_ν=\frac{ν(α_1+α_ν)}{2}$$

Αντικαθιστώντας το $α_ν$ με $α_ν=α_1+(ν-1)ω$ έχουμε :

$$S_ν=\frac{[\,2α_1+(ν-1)ω\,]\cdot ν}{2}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να προσδιοριστεί ο x έτσι, ώστε οι αριθμοί 5, x +3, 18 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Λύση

Από τον τύπο 2β=α+γ έχουμε :

$2(x+3)=18+5$
$2x=23-6$
$2x=17$
$x=8,5$.

2. Αν το άθροισμα του 7ου και του 17ου όρου μιας αριθμητικής προόδου είναι 30, ενώ το άθροισμα του 9ου και του 20ου όρου είναι 40.

i) Να βρεθεί η πρόοδος.

ii) Να υπολογιστεί το άθροισμα από τον τρίτο έως και το δέκατο όρο της προόδου.

Λύση

Έχουμε: $$\begin{cases} α_7+α_{17}=30 \\ α_9+α_{20}=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} α_1+6ω+α_1+16ω=30 \\ α_1+8ω+α_1+19ω=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2α_1+22ω=30 \\ 2α_1+27ω=40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 2 \\ \alpha_1 = -7 \end{cases}$$

Το άθροισμα των όρων από τον τρίτο ως και τον δέκατο θα ισούται $\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\ldots+\alpha_{10} = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{10}) - (\alpha_1+\alpha_2)$, δηλαδή:

$$S_{10}-S_2=\frac{[2(-7)+9\cdot 2]10}{2}-\frac{[2(-7)+1\cdot 2]\cdot 2}{2}=20 - (-12) =32$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση:
α) Σε μία αριθμητική πρόοδο

- Οι αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι της, αν 2γ=α+β. Σ Λ
- Αν $\alpha_1=1$ και ω=4, τότε $\alpha_\nu=4\nu-3$. Σ Λ
- Αν $\alpha_1=1$ και ω=2, τότε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της ισούται με 100. Σ Λ

β) Σε μία αριθμητική πρόοδο:

- Αν $\alpha_1=15$ και ω=-3, τότε το πλήθος των θετικών όρων της ισούται με
  Α) 5 Β) 15 Γ) 6 Δ) 3
- Αν 2α–2, 5, 3α–8 διαδοχικοί όροι της, τότε το α ισούται με:
  Α) 0 Β) 4 Γ) 2 Δ) 5
- Αν $\alpha_1=3$, $\alpha_\nu=38$ και ω=5, τότε το ν ισούται με:
  Α) 8 Β) 6 Γ) 7 Δ) 4

γ)

- Βρείτε τον 27ο και τον 41ο όρο της αριθμητικής προόδου 5, 11, 17…
- Βρείτε τον 13ο και τον 109ο όρο της αριθμητικής προόδου 71, 70, 69…
- Βρείτε τον 16ο και τον 90ο όρο της αριθμητικής προόδου -3, -5, -7…

2.

- Βρείτε το νιοστό όρο της αριθμητικής προόδου x, 2x, 3x, …
- Βρείτε το νιοστό όρο της αριθμητικής προόδου 2α-β, 4α-3β, 6α-5β.

3.

- Βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου
  7, 3, -1, …
- Βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου
  $\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-3}{4}, \ldots$

4. Βρείτε το πλήθος των όρων και τη διαφορά αριθμητικής προόδου, όταν:

- $\alpha_1=3$, $\alpha_\nu=90$ και $S\nu=1395$.
- $\alpha_1=70$, $\alpha_\nu=7$ και $S\nu=1075$.

5. α) Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των αριθμών 18 και 20.
β) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε οι αριθμοί 5x+1, 3x-2, 11 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
γ) Αν δύο αριθμοί διαφέρουν κατά 10 και ο αριθμητικός τους μέσος είναι 50, να βρείτε τους αριθμούς.

6. Μια στέγη σπιτιού έχει 12 σειρές κεραμίδια. Η πρώτη σειρά έχει 45 κεραμίδια και κάθε επόμενη σειρά έχει δύο κεραμίδια λιγότερα. Πόσα κεραμίδια έχει η 7^η σειρά και πόσα όλη η στέγη;

7. Ένα μικρό αγόρι φτιάχνει ένα τριγωνικό σωρό από πλαστικά τουβλάκια έτσι, ώστε να έχει ένα τουβλάκι στην κορυφή, ενώ σε κάθε επόμενη σειρά τοποθετεί ένα επιπλέον τουβλάκι. Εάν το αγόρι έχει 100 τουβλάκια, πόσες σειρές μπορεί να συμπληρώσει και πόσα τουβλάκια θα του μείνουν (εκτός σωρού);

8. Ένα ρολόι χτυπά τις ακέραιες ώρες από την πρώτη μέχρι και τη δωδεκάτη. Βρείτε πόσους χτύπους κάνει το 24ωρο.