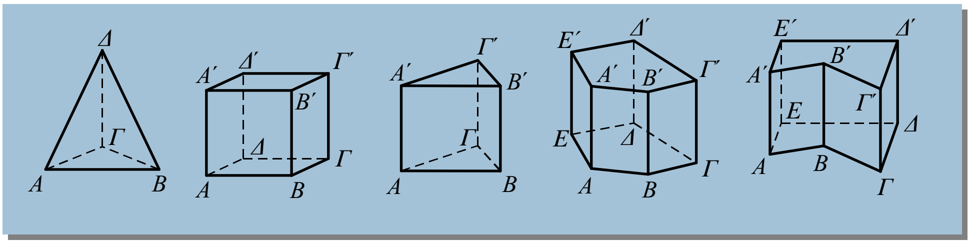
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

ΜΕΤΡΗΣΗ ΣΤΕΡΕΩΝ

Η Στερεομετρία είναι ο κλάδος της Γεωμετρίας που μελετάει μη επίπεδα σχήματα, δηλαδή σχήματα των οποίων τα σημεία δεν ανήκουν όλα στο ίδιο επίπεδο. Τέτοια σχήματα λέγονται **στερεά σχήματα** ή σύντομα **στερεά**. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε συνοπτικά ορισμούς, μερικές βασικές ιδιότητες και τους τύπους υπολογισμού επιφάνειας και όγκου απλών στερεών σχημάτων.

6.1 Πολύεδρα - Πρίσματα

Τα παρακάτω στερεά περικλείονται από πολύγωνα.



Τέτοια στερεά λέγονται **πολύεδρα**.

Ώστε:

Πολύεδρο ονομάζεται κάθε στερεό που περικλείεται από επιφάνειες επίπεδων πολυγώνων.

Τα επίπεδα πολύγωνα που περικλείουν το πολύεδρο λέγονται **έδρες**. Οι πλευρές των εδρών ονομάζονται **ακμές** και οι κορυφές των εδρών **κορυφές** του πολυέδρου.

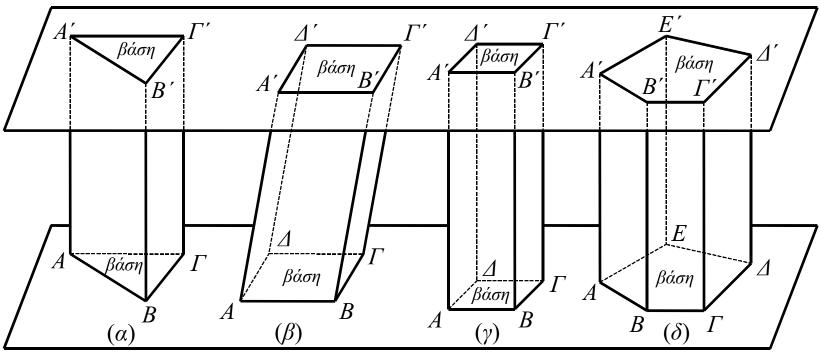
Διαγώνιος πολυέδρου ονομάζεται κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο κορυφές που δε βρίσκονται στην ίδια έδρα.

Παράδειγμα

Το τέταρτο πολύεδρο του προηγούμενου σχήματος έχει 7 έδρες (ΑΒΒ΄Α΄, ΒΓΓ΄Β΄, …), 15 ακμές (ΑΑ΄, ΒΒ΄,…) και 10 κορυφές (Α, Β, Β΄,…). Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ΄, ΔΑ΄, … είναι διαγώνιες του πολυέδρου.

Κυρτό πολύεδρο ονομάζεται κάθε πολύεδρο στο οποίο το επίπεδο οποιασδήποτε έδρας του αφήνει όλες τις κορυφές του που δεν ανήκουν σ’ αυτή στο ίδιο μέρος του χώρου. Τα τέσσερα πρώτα σχήματα από τα παραπάνω είναι κυρτά πολύεδρα, ενώ το πέμπτο μη κυρτό.

Παρακάτω θα ασχοληθούμε μόνο με κυρτά πολύεδρα και για συντομία θα τα αναφέρουμε ως πολύεδρα.

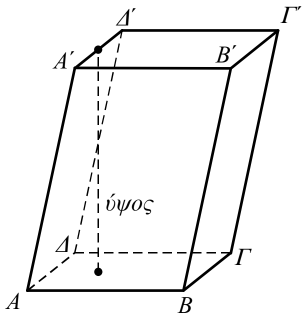


Τα πολύεδρα του παραπάνω σχήματος παρατηρούμε ότι έχουν τις δύο έδρες ίσες και παράλληλες (αφού ανήκουν σε παράλληλα επίπεδα), ενώ όλες οι άλλες έδρες τους είναι παραλληλόγραμμα. Τα πολύεδρα αυτά λέγονται **πρίσματα**.

Ώστε:

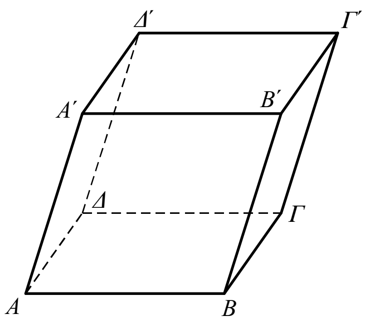
Πρίσμα λέγεται το πολύεδρο που έχει δύο έδρες ίσες και παράλληλες, ενώ όλες οι υπόλοιπες έδρες του είναι παραλληλόγραμμα.

Οι παράλληλες έδρες ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄, ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄και ΑΒΓΔΕ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ των πρισμάτων του παραπάνω σχήματος λέγονται **βάσεις**, ενώ όλες οι άλλες έδρες λέγονται **παράπλευρες έδρες**.

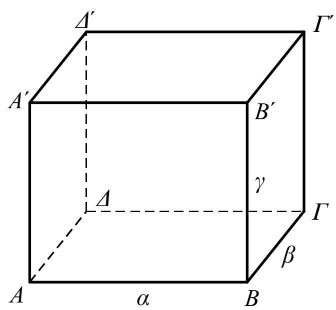


Η απόσταση των δύο βάσεων πρίσματος ονομάζεται ύψος και συμβολίζεται με **υ**. Οι έδρες του πρίσματος που δεν είναι βάσεις ονομάζονται **παράπλευρες έδρες** και οι ακμές που δεν ανήκουν σε κάποια από τις βάσεις **παράπλευρες ακμές**.
Αν οι βάσεις ενός πρίσματος είναι τρίγωνα, τετράγωνα, πεντάπλευρα, …, ν – γωνα, τότε το πρίσμα λέγεται **τριγωνικό, τετραπλευρικό, πενταγωνικό, …, ν- γωνικό**.

Αν οι παράπλευρες ακμές πρίσματος είναι κάθετες στις βάσεις του, το πρίσμα λέγεται **ορθό** (σχ. α, γ, δ). Αν είναι πλάγιες, τότε λέγεται **πλάγιο**. **Κανονικό** λέγεται κάθε ορθό πρίσμα που οι βάσεις του είναι κανονικά πολύγωνα (σχ. γ ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ τετράγωνα).
Ένα πρίσμα που οι βάσεις του είναι παραλληλόγραμμα ονομάζεται **παραλληλεπίπεδο** (σχ. 1)



σχ. 1



σχ. 2

Ένα παραλληλεπίπεδο που όλες οι έδρες του είναι ορθογώνια λέγεται **ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο** (σχ. 2). Στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο τα μήκη των ακμών του που ξεκινάνε από μία κορυφή του λέγονται **διαστάσεις**. Στο σχήμα 2 οι ΑΒ = α, ΒΓ = β και ΒΒ΄= γ είναι οι διαστάσεις του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Η α ονομάζεται **μήκος**, η β **πλάτος** και η γ **ύψος** ή **πάχος** ή **βάθος**.
Αν οι τρεις διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι ίσες (δηλαδή, όλες οι έδρες του είναι τετράγωνα), τότε το στερεό λέγεται **κύβος**.

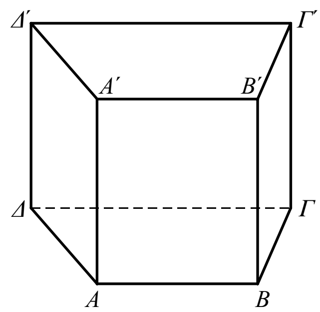
Εμβαδό Επιφάνειας Πρίσματος – Όγκος πρίσματος

Το άθροισμα των εμβαδών των παράπλευρων εδρών του πρίσματος λέγεται **εμβαδό παράπλευρης επιφάνειας** και συμβολίζεται E_π.

Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας ορθού πρίσματος ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου Π_β της βάσης επί το ύψος του υ, δηλαδή:

$$E_\pi = \Pi_\beta \cdot \upsilon$$

Πράγματι, στο ορθό πρίσμα του σχήματος οι παράπλευρες ακμές είναι κάθετες στις βάσεις του και ίσες με το ύψος του πρίσματος, ενώ οι παράπλευρες έδρες του πρίσματος είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Για να βρούμε το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος, προσθέτουμε το εμβαδό των παράπλευρων εδρών του.Έχουμε:



$$\begin{aligned} E_\pi &= (\text{ΑΒΒ΄Α΄}) + (\text{ΒΓΓ΄Β΄}) + (\text{ΓΔΔ΄Γ΄}) + (\text{ΔΑΑ΄Δ΄}) \\ &= (\text{ΑΒ}) \cdot \upsilon + (\text{ΒΓ}) \cdot \upsilon + (\text{ΓΔ}) \cdot \upsilon + (\text{ΔΑ}) \cdot \upsilon \\ &= (\text{ΑΒ} + \text{ΒΓ} + \text{ΓΔ} + \text{ΔΑ}) \cdot \upsilon \\ &= \text{(περίμετρος βάσης)} \cdot \upsilon \end{aligned}$$

Άρα: $\boxed{E_\pi = \Pi_\beta \cdot \upsilon}$

Αν στο εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος προσθέσουμε το εμβαδό των δύο βάσεών του, βρίσκουμε το εμβαδό όλης της επιφάνειας του πρίσματος, το οποίο ονομάζεται **εμβαδό ολικής επιφάνειας** του πρίσματος και συμβολίζεται με $\mathbf{E_{o\lambda}}$. Δηλαδή:

$$\boxed{E_{o\lambda} = E_\pi + 2E_\beta}$$

Ο χώρος που καταλαμβάνει το πρίσμα λέγεται **όγκος** του πρίσματος και συμβολίζεται με **V**.

Στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις α,β,γ το εμβαδό της ολικής επιφάνειας και ο όγκος του δίνονται από τους τύπους:

$$E_{ολ} = 2(αβ + αγ + βγ) \quad \text{και} \quad V = α \cdot β \cdot γ$$

Στον κύβο, όπου οι τρεις διαστάσεις είναι ίσες μεταξύ τους, ισχύει:

$$E_{ολ} = 6α^2 \quad \text{και} \quad V = α^3$$

όπου α το μήκος της ακμής του κύβου.

Επειδή στον τύπο $V = α \cdot β \cdot γ$ του όγκου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, το γινόμενο $α \cdot β$ είναι το εμβαδό της βάσης του και γ το ύψος του, ο τύπος γίνεται:

$$V = E_β \cdot υ$$

Ο τύπος αυτός ισχύει γενικότερα για οποιοδήποτε πρίσμα. Επομένως:

Ο όγκος κάθε πρίσματος, ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος του.

$$V = E_β \cdot υ$$

Παραδείγματα

1. Η ολική επιφάνεια κύβου είναι $24m^2$. Να βρεθεί ο όγκος του.

Λύση

Αν α είναι η ακμή του κύβου, τότε $E_{ολ} = 6α^2$ ή $6α^2 = 24$ ή $α^2 = 4$, άρα α = 2m.

Ο όγκος V του κύβου είναι $V = α^3 = 2^3 = 8m^3$.

2. Οι διαστάσεις δωματίου σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι 4,5 m, 4m και 3m. Να υπολογιστεί το εμβαδό της ολικής του επιφάνειας και ο όγκος του.

Λύση

$$E_{ολ} = 2(4,5 \cdot 4 + 4,5 \cdot 3 + 4 \cdot 3) = 2 \cdot (18 + 13,5 + 12) = 2 \cdot 43,5 = 87m^2$$
$$V = 4,5 \cdot 4 \cdot 3 = 54m^3.$$

3. Ένα ορθό πρίσμα έχει βάση τετράγωνο πλευράς 4cm και ύψος 6 cm. Να βρεθεί το εμβαδό της ολικής του επιφάνειας και ο όγκος του.

Λύση

$$E_{π} = Π_{β} \cdot υ = 4 \cdot 4 \cdot 6 = 96cm^2$$
$$E_{ολ} = E_{π} + 2E_{β} = 96 + 2 \cdot 4^2 = 96 + 32 = 128cm^2$$
$$V = E_{β} \cdot υ = 4^2 \cdot 6 = 96cm^3.$$

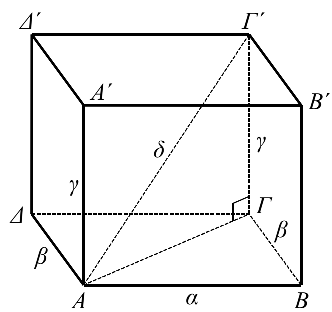
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. α) Αν α,β,γ είναι οι διαστάσεις ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και δ η διαγώνιός του, να αποδειχτεί ότι είναι $δ = \sqrt{α^2 + β^2 + γ^2}$.

β) Αν δ είναι η διαγώνιος κύβου με ακμή α, τότε $δ = α\sqrt{3}$. Ποιος είναι ο όγκος του κύβου, όταν είναι γνωστή η διαγώνιος;

Λύση

α) Επειδή η ακμή ΓΓ΄είναι κάθετη στο επίπεδο της βάσης ΑΒΓΔ, θα ισχύει ΓΓ΄⊥ ΒΔ. Τότε το τρίγωνο ΑΓΓ΄είναι ορθογώνιο και



$A\Gamma' = \Gamma'\Gamma^2 + A\Gamma^2 = \gamma^2 + A\Gamma^2$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma(\hat{B} = 90^o)$ έχουμε:

$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$, οπότε

$\delta^2 = A\Gamma'^2 = \gamma^2 + A\Gamma^2 = \gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2$, δηλαδή:

$$\boxed{\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

β) Στον κύβο ακμής α ισχύει α= β= γ . Άρα η διαγώνιός του δ είναι:

$$\delta = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2} = \sqrt{3\alpha^2} \quad ή \quad \boxed{\delta = \alpha\sqrt{3}}$$

Γνωρίζουμε ότι ο όγκος κύβου V είναι: $V = \alpha^3$. Από τον προηγούμενο τύπο $\delta = \alpha\sqrt{3}$ θα έχουμε $\alpha = \dfrac{\delta}{\sqrt{3}}$. Άρα, ο όγκος V του κύβου θα είναι:

$$V = \left(\frac{\delta}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{\delta^3}{3\sqrt{3}} = \frac{\delta^3 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\delta^3\sqrt{3}}{9}.$$

2. Ανοιχτή κυβική δεξαμενή έχει διαγώνιο 15m. Πόσο θα στοιχίσει το επίχρισμά της με τσιμεντοκονίαμα, αν το τετραγωνικό μέτρο στοιχίζει 350 δρχ;

Λύση

Θα επιχριστούν με τσιμεντοκονίαμα 5 έδρες της δεξαμενής που θα έχουν εμβαδό $E = 5 \cdot \alpha^2$. Η διαγώνιος του κύβου $\delta = \alpha\sqrt{3}$, άρα $\delta^2 = 3\alpha^2$ ή $15^2 = 3\alpha^2$ ή $225 = 3\alpha^2$ ή $\alpha^2 = 225 : 3 = 75m^2$.

Το εμβαδό $E = 5 \cdot \alpha^2$, άρα $E = 5 \cdot 75 = 375m^2$.

Επομένως, το επίχρισμα της δεξαμενής θα στοιχίσει $375 \cdot 350 = 131.250$ δρχ.

3. Η βάση ενός ορθού πρίσματος είναι τραπέζιο. Οι παράλληλες πλευρές του τραπεζίου είναι 7cm και 5cm αντίστοιχα και η απόστασή τους 4 cm. Αν το ύψος του πρίσματος είναι 12cm, να βρεθεί ο όγκος του.

Λύση

Ο όγκος V του πρίσματος είναι:

$$V = E_\beta \cdot \upsilon$$

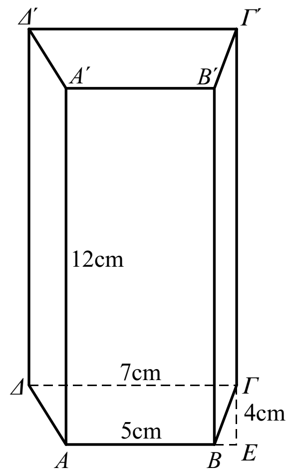
Αφού η βάση του πρίσματος είναι τραπέζιο, το $E_\beta = \dfrac{AB + \Delta\Gamma}{2} \cdot E\Gamma$,

δηλαδή:

$$E_\beta = \frac{7+5}{2} \cdot 4 = 24\text{cm}^2.$$

Άρα, ο όγκος V του πρίσματος είναι:

$$V = 24\text{cm}^2 \cdot 12\text{cm} = 288\text{cm}^3$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Το ύψος της τριγωνικής βάσης κανονικού πρίσματος είναι $2{,}5\sqrt{3}$ cm και η διαγώνιος μιας παράπλευρης έδρας του 13 cm. Να βρεθεί το ύψος του πρίσματος.

2. Η πλευρά της βάσης κανονικού τετραγωνικού πρίσματος είναι διπλάσια από το ύψος του και μία διαγώνιός του είναι 18 cm. Να υπολογιστεί καθεμία από τις ακμές του.

3. Ένα κουτί σχήματος ορθού πρίσματος με βάση τετράγωνο έχει συνολικό εμβαδό 686cm^2. Αν η παράπλευρη ακμή του πρίσματος είναι τριπλάσια από την πλευρά της βάσης, να βρεθούν η πλευρά της βάσης, το ύψος του κουτιού και ο όγκος του κουτιού.

4. Το δάπεδο σ' ένα δωμάτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει διαστάσεις 4,5m και 4m. Αν η διαγώνιος του δωματίου είναι 6,73m, να βρεθεί το εμβαδό της ολικής επιφάνειας και ο όγκος του δωματίου.

5. Μία αντλία ανλεί 6 εκατόλιτρα νερό στο λεπτό. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί, για να αντλήσει το νερό που έχει ανέβει στο 1,5m μέσα σε ένα υπόγειο, το πάτωμα του οποίου είναι ορθογώνιο με διαστάσεις 15,90m και 7m;

6. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο διαστάσεων 11cm, 9cm και 7cm είναι κατασκευασμένο από μέταλλο. Να βρεθεί το βάρος του αν $1cm^3$ του μετάλλου ζυγίζει 4,18gr.

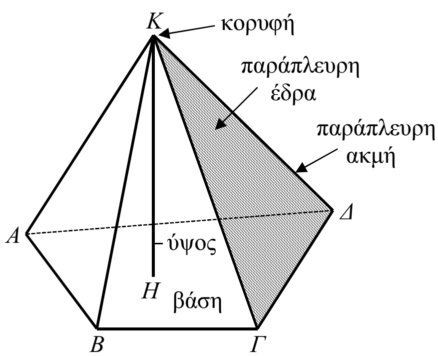
7. Ένας κορμός δένδρου που είχε όγκο $640dm^3$ μετατράπηκε σε δοκάρι με διαστάσεις 4m μήκος και 30cm πλάτος. Ποιο είναι το πάχος του δοκαριού, αν στη μετατροπή χάθηκε το $\frac{1}{4}$ του όγκου του κορμού;

8. Μια στέρνα σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου έχει διαστάσεις 8,5m, 4,60m και 2,10m. Θέλουμε να χωρέσει 30 εκατόλιτρα περισσότερο νερό αυξάνοντας μόνο το μήκος της. Πόσο θα χρειαστεί να το αυξήσουμε;

9. Επιστρώσαμε με τσιμέντο τα τοιχώματα μιας οκταγωνικής στέρνας που έχει πλευρά βάσης 1,40m και βάθος 3,20m. Πόσα χρήματα θα χρειαστούν, αν το τετραγωνικό μέτρο στοιχίζει 350δρχ;

6.2 Πυραμίδα

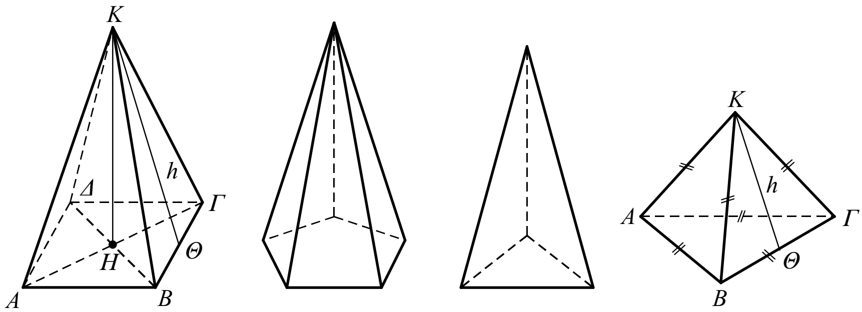
Πυραμίδα λέγεται το πολύεδρο που η μία έδρα του είναι πολύγωνο και οι άλλες έδρες του τρίγωνα με κοινή κορυφή ένα σημείο.



Το πολύγωνο λέγεται **βάση** της πυραμίδας, ενώ η κοινή κορυφή λέγεται κορυφή της πυραμίδας. Στο σχήμα το πολύγωνο ΑΒΓΔ είναι η βάση της πυραμίδας και το σημείο Κ η κορυφή της. Τα τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΑΔ λέγονται **παράπλευρες έδρες**, ενώ οι πλευρές τους ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ **παράπλευρες ακμές**. Η απόσταση ΚΗ της κορυφής Κ από το επίπεδο της βάσης λέγεται **ύψος** της πυραμίδας και συμβολίζεται με υ.

Αν η βάση μιας πυραμίδας είναι τρίγωνο, τετράπλευρο, …, ν- γωνο, τότε η πυραμίδα λέγεται τριγωνική, τετραπλευρική, …, ν- γωνική. Οι τριγωνικές πυραμίδες έχουν συνολικά τέσσερις έδρες (τρίγωνα), γι’ αυτό λέγονται και **τετράεδρα** και οποιαδήποτε έδρα τους μπορεί να θεωρηθεί ως βάση.

Μία πυραμίδα λέγεται **κανονική**, όταν η βάση της είναι κανονικό πολύγωνο και η κορυφή της προβάλλεται στο κέντρο της βάσης.



Οι παράπλευρες έδρες μιας κανονικής πυραμίδας είναι ίσα ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν ίσα ύψη από την κορυφή της πυραμίδας. Καθένα από τα ίσα αυτά ύψη λέγεται **παράπλευρο ύψος** της πυραμίδας και συμβολίζεται με **h**.

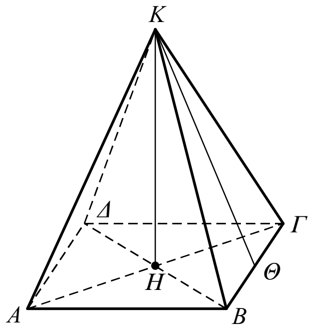
Μία κανονική πυραμίδα στην οποία οι παράπλευρες έδρες είναι ισόπλευρα τρίγωνα λέγεται **κανονικό τετράεδρο**.

Δηλαδή, στο κανονικό τετράεδρο και οι τέσσερις έδρες του είναι ίσα ισόπλευρα τρίγωνα.

Εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας μιας πυραμίδας λέγεται το άθροισμα των εμβαδών των παράπλευρων εδρών της και το συμβολίζουμε με E_π.

Ας θεωρήσουμε μια κανονική τετραπλευρική πυραμίδα (συνήθως λέγεται και τετραγωνική). Οι παράπλευρες έδρες της είναι τα ίσα ισοσκελή τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ και ΚΑΔ, με ίσα ύψη h από την κορυφή Κ. Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας θα ισούται με το άθροισμα των εμβαδών αυτών. Δηλαδή:

$$E_\pi = (KAB) + (KB\Gamma) + (K\Gamma\Delta) + (KA\Delta)$$
$$= \frac{1}{2}(AB)h + \frac{1}{2}(B\Gamma)h + \frac{1}{2}(\Gamma\Delta)h + \frac{1}{2}(\Delta A)h =$$
$$= \frac{1}{2}(AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A)h = \frac{1}{2}\Pi_\beta h\ ,$$



όπου Π_β συμβολίζουμε την περίμετρο της βάσης.

Γενικά:

Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας μιας κανονικής πυραμίδας ισούται με το ημιγινόμενο της περιμέτρου της βάσης επί το παράπλευρο ύψος, δηλαδή:

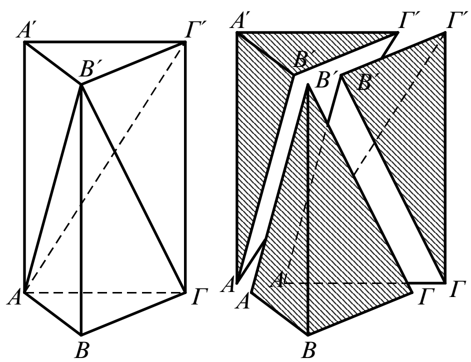
$$E_\pi = \frac{1}{2}\Pi_\beta h$$

Παρατήρηση: Ο παραπάνω τύπος ισχύει μόνο στις κανονικές πυραμίδες.

Για να βρούμε το εμβαδό όλης της επιφάνειας τη πυραμίδας, προσθέτουμε στο εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας το εμβαδό E_β της βάσης της.Έτσι έχουμε τον τύπο:

$$E_{\pi\lambda} = E_\pi + E_\beta$$

Αν χωρίσουμε ένα οποιοδήποτε τριγωνικό πρίσμα ΑΒΓΑ΄Β΄Γ΄σε τρεις πυραμίδες, αποδεικνύεται ότι αυτές έχουν ίσους όγκους. Συνεπώς, καθεμιά απ' αυτές έχει όγκο ίσο με το $\frac{1}{3}$ του όγκου του τριγωνικού πρίσματος. Όμως η πυραμίδα Β΄ΑΒΓ έχει την ίδια βάση ΑΒΓ και το ίδιο ύψος υ με το πρίσμα.



Αν λοιπόν E_β είναι το εμβαδό της βάσης της πυραμίδας και υ το ύψος της, τότε ο όγκος της θα είναι ίσος με $\frac{1}{3}E_\beta \cdot \upsilon$.

Γενικά:

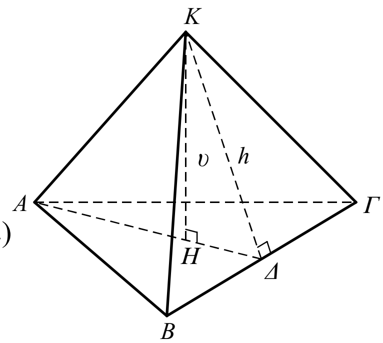
Ο όγκος μιας πυραμίδας είναι ίσος με το $\frac{1}{3}$ του γινομένου του εμβαδού της βάσης επί το ύψος, δηλαδή:

$$V = \frac{1}{3}E_\beta \cdot \upsilon$$

Παράδειγμα

Κανονική τριγωνική πυραμίδα έχει ύψος υ = 8cm και ακμή βάσης α = 6cm. Να υπολογιστεί το εμβαδό της ολικής επιφάνειάς της και ο όγκος της.

Λύση



Το εμβαδό της ολικής επιφάνειας είναι $E_{o\lambda} = E_\pi + E_\beta$. (1)

Επειδή η βάση είναι ισόπλευρο τρίγωνο, το $E_\beta = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \cong 9 \cdot 1{,}73 = 15{,}57\text{cm}^2$. (2)

Για να υπολογίσουμε το E_π, πρέπει να βρούμε το παράπλευρο ύψος h.

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΚΗΔ, όπου ΚΗ = υ = 8cm και $H\Delta = \frac{A\Delta}{3}$. Όμως, $A\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, οπότε $H\Delta = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ cm.

Επομένως: $K\Delta^2 = KH^2 + H\Delta^2 = 8^2 + (\sqrt{3})^2 = 64 + 3 = 67$.

Άρα, $K\Delta = h = \sqrt{67} \cong 8{,}18$ cm.

Επειδή $\Pi_\beta = 3\alpha = 3 \cdot 6 = 18$ cm, θα είναι $E_\pi = \frac{1}{2}\Pi_\beta h = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 8{,}18 = 73{,}62$ cm.

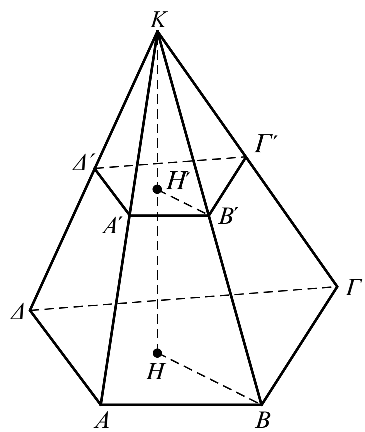
Η σχέση (1) από τις (2) και (3) γίνεται: $E_{ολ} = 73{,}62 + 15{,}57 = 89{,}19\text{cm}^2$.

Ο όγκος της πυραμίδας $V = \frac{1}{3} E_{β} \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 15{,}57 \cdot 8 = 41{,}52\text{cm}^2$.

Αν φέρουμε ένα επίπεδο παράλληλο προς τη βάση μιας πυραμίδας που τέμνει την πυραμίδα, τότε ισχύουν τα εξής:

1. Οι παράπλευρες ακμές και το ύψος της πυραμίδας τέμνονται σε μέρη ανάλογα .
2. Το πολύγωνο της τομής είναι όμοιο με το πολύγωνο της βάσης.
3. Ο λόγος του εμβαδού της βάσης προς το εμβαδό του πολυγώνου της τομής είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου των αποστάσεων της βάσης και του πολυγώνου της τομής από την κορυφή της πυραμίδας.

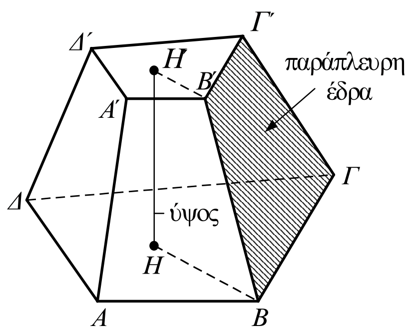
Δηλαδή, στο σχήμα έχουμε:



1. $\frac{KA}{KA'} = \frac{KB}{KB'} = \frac{KΓ}{KΓ'} = \frac{KΔ}{KΔ'} = \frac{KH}{KH'} = λ$

2. $ΑΒΓΔ \approx Α'Β'Γ'Δ'$

3. $\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α'Β'Γ'Δ')} = \left(\frac{KH}{K'H'}\right)^2 = λ^2$



Το παράλληλο επίπεδο που φέραμε προς την βάση της πυραμίδα, χωρίζει την πυραμίδα σε δύο πολύεδρα. Το ένα είναι πυραμίδα, ενώ το δεύτερο λέγεται **κόλουρη πυραμίδα**.

Ώστε:

Κόλουρη πυραμίδα λέγεται το πολύεδρο που βρίσκεται μεταξύ της βάσης μιας πυραμίδας και μιας επίπεδης τομής της, παράλληλης προς τη βάση.

Η βάση της αρχικής πυραμίδας και η τομή της πυραμίδας είναι όμοια πολύγωνα και λέγονται **βάσεις** της κόλουρης πυραμίδας.

Για την κόλουρη πυραμίδα ισχύει:

Αν E_1, E_2 είναι τα εμβαδά των βάσεων μιας κόλουρης πυραμίδας και υ η απόσταση των δύο βάσεων, ο όγκος της είναι:

$$V = \frac{1}{3}(E_1 + \sqrt{E_1 E_2} + E_2) \cdot υ$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

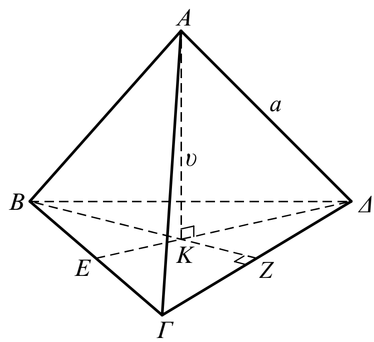
1. Να βρεθεί ο όγκος κανονικού τετραέδρου με ακμή α.

Λύση

Είναι $V = \frac{1}{3} E_β \cdot υ$ και $E_β = \frac{α^2\sqrt{3}}{4}$.

Αρκεί να υπολογίσουμε το ύψος ΑΚ = υ. Η πυραμίδα ΑΒΓΔ είναι κανονική και, επομένως, το ύψος περνάει από το κέντρο της βάσης ΒΓΔ, που είναι το σημείο τομής των διαμέσω της. Έχουμε:

$$ΔK = \frac{2}{3}ΔE = \frac{2}{3}\frac{α\sqrt{3}}{2} = \frac{α\sqrt{3}}{3}$$



Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΔ ($\hat{K} = 90^o$) παίρνουμε:

$$AK^2 = AΔ^2 - KΔ^2 \quad ή \quad υ^2 = α^2 - \left(\frac{α\sqrt{3}}{3}\right)^2 \quad ή \quad υ = \sqrt{α^2 - \left(\frac{α\sqrt{3}}{3}\right)^2} \quad ή$$

$$υ = \sqrt{\frac{9α^2}{9} - \frac{3α^2}{9}} = \sqrt{\frac{6α^2}{9}} = \frac{α\sqrt{6}}{3}.$$

Άρα $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{α^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{α\sqrt{6}}{3} = \frac{α^3\sqrt{2}}{12}$.

2. Μία ξύλινη πυραμίδα ζυγίζει 1,575kp και έχει βάση τετράγωνο πλευράς 15cm. Να βρείτε το ύψος της, αν το ξύλο έχει ειδικό βάρος $0{,}84\text{p}/\text{cm}^3$.

Λύση

Το ειδικό βάρος είναι ίσο με $\varepsilon = \dfrac{B}{V}$, άρα $V = \dfrac{B}{\varepsilon} = \dfrac{1575}{0{,}84}\text{cm}^3$ ή $V = 1875\,\text{cm}^3$.

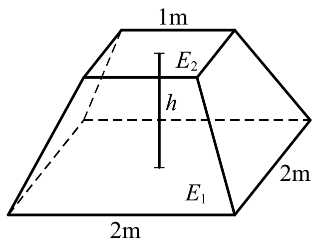
Ο όγκος V της πυραμίδας είναι $V = \dfrac{1}{3}E_\beta \cdot \upsilon$. Επομένως:

$$1875 = \frac{1}{3}\cdot 15^2 \cdot \upsilon$$
$$225\upsilon = 3\cdot 1875$$
$$\upsilon = \frac{5625}{225}$$
$$\upsilon = 25\text{cm}.$$

3. Το πλέγμα κολόνας οικοδομής έχει σχήμα κόλουρης πυραμίδας με βάσεις τετράγωνα πλευρών 2m και 1m. Το ύψος της κόλουρης πυρμαμίδας είναι 1m. Ο εργολάβος υπολόγισε τον όγκο χρησιμοποιώντας τον πρακτικό τύπο $V = \dfrac{1}{2}(E_1 + E_2)\cdot \upsilon$, όπου E_1, E_2 τα εμβαδά των βάσεων. Αδίκησε ή όχι τον ιδιοκτήτη και πόσο;

Λύση

Θα βρούμε τη διαφορά $\Delta = V' - V$ του όγκου V', που υπολόγισε ο εργολάβος, από τον πραγματικό όγκο που υπολογίζεται με τον τύπο $V = \dfrac{1}{3}(E_1 + \sqrt{E_1 + E_2} + E_2)\cdot \upsilon$.



Είναι:

$$\Delta = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)\cdot \upsilon - \frac{1}{3}(E_1 + \sqrt{E_1 + E_2} + E_2)\cdot \upsilon$$
$$= \frac{\upsilon}{6}\cdot\left[3(E_1 + E_2) - 2\left(E_1 + \sqrt{E_1 + E_2} + E_2\right)\right]$$
$$= \frac{\upsilon}{6}\cdot\left(\left(E_1 + -2\sqrt{E_1 + E_2} + E_2\right)\right) = \frac{\upsilon}{6}(\sqrt{E_1} - \sqrt{E_2})^2.$$

Άρα ο εργολάβος αδίκησε τον ιδιοκτήτη κατά

$$\frac{\upsilon}{6}(\sqrt{E_1}-\sqrt{E_2})^2=\frac{1}{6}\left(\sqrt{2^2}-\sqrt{1^2}\right)^2=\frac{1}{6}(2-1)^2=\frac{1}{6}=0{,}166\text{m}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

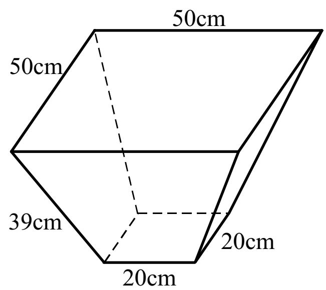
1. Κανονική πυραμίδα έχει βάση εξάγωνο πλευράς 8m και μία παράπλευρη ακμή της είναι 17m. Να βρεθεί η ολική της επιφάνεια και ο όγκος της.

2. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει παράπλευρες έδρες ισόπλευρα τρίγωνα. Αν η πλευρά α της βάσης έχει μήκος 10cm, να υπολογιστεί ο όγκος της.

3. Σε ποια απόσταση από την κορυφή μιας πυραμίδας, που έχει ύψος 24cm και βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις 12cm και 15cm , πρέπει να φέρουμε επίπεδο παράλληλο προς τη βάση της, ώστε η τομή του με την πυραμίδα να έχει εμβαδό 2000mm^2 ;

4. Η στέγη ενός σπιτιού έχει σχήμα κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας με πλευρά βάσης 8m. Το ύψος της στέγης είναι 3m. Πόσα κεραμίδια θα χρειαστούμε για να σκεπάσουμε τη στέγη, αν κάθε κεραμίδι είναι τετράγωνο με πλευρά 40cm;

5. Ένα δοχείο έχει σχήμα κόλουρης πυραμίδας με βάσεις τετράγωνα πλευρών 20cm και 50cm και ακμή 39cm. Αν για την κατασκευή του χρησιμοποιούμε λαμαρίνα και οι απώλειες είναι 5%, να υπολογιστεί πόση λαμαρίνα χρειαζόμαστε.



6. Μία σκηνή έχει σχήμα κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, που οι ακμές της είναι 1,8m καθεμιά και το απόστημα 0,765m. Πόσο πανί χρειάζεται, για να κατασκευαστεί μια τέτοια σκηνή, και πόσα κυβικά μέτρα αέρα περιέχονται στη σκηνή;

7. Ένα μνημείο έχει σχήμα κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας με πλευρά βάσης 1,3m και ύψος 4,8m και είναι κατασκευασμένο από γρανίτη. Να βρεθεί το βάρος του μνημείου, αν είναι γνωστό ότι το βάρος του γρανίτη είναι 2.750 κιλά ανά m^3.

8. Μία κανονική τετραπλευρική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 233m και ύψος 146m.

α) Να υπολογιστεί ο όγκος της πυραμίδας.

β)Αν οι εσωτερικοί χώροι καταλαμβάνουν το $1/1000$ του όγκου της πυραμίδας, να υπολογιστεί ο όγκος της πέτρας που χρειάστηκε για την κατασκευή της.

γ) Αν 1 m^3 πέτρα ζυγίζει 2tn, να υπολογιστεί η μάζα της πυραμίδας.

9. Τριγωνική πυραμίδα ΚΑΒΓ έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90^o$) και οι παράπλευρες ακμές της ΚΑ, ΚΒ και ΚΓ είναι ίσες. Αν ΑΒ = 6cm, ΑΓ = 8cm και ΚΑ = 13cm, να υπολογίσετε το εμβαδό της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.

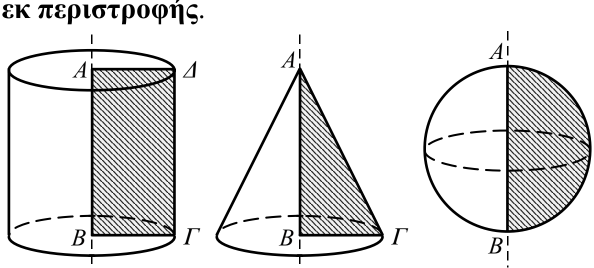
10. Μια δεξαμενή έχει σχήμα κανονικής κόλουρης πυραμίδας με βάσεις τετράγωνα πλευρών 5m και 3m. Η απόσταση των δύο βάσεων είναι 2,5m και η απόσταση δύο πλευρών των βάσεων 3m. Θέλουμε να επενδύσουμε τη δεξαμενή με τετράγωνα πλακάκια πλευράς 10cm.

α) Να βρείτε πόσα πλακάκια θα χρειαστούμε.

β) Να βρείτε με πόσα λίτρα νερού γεμίζει η δεξαμενή.

Στερεά εκ περιστροφής

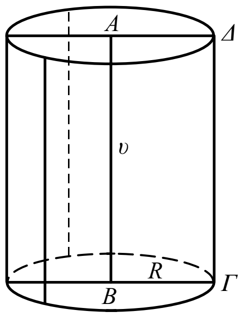
Αν ένα κλειστό επίπεδο σχήμα περιστραφεί γύρω από έναν άξονα, δημιουργείται ένα στερεό που, ανάλογα με το σχήμα που περιστρέφεται και τη θέση του άξονα περιστοφής, μπορεί να είναι **κύλινδρος**, **κώνος**, **σφαίρα** ή άλλο στερεό ή συνδυασμός δύο ή περισσοτέρων απλών στερεών. Τέτοια στερεά λέγονται **στερεά εκ περιστροφής**.



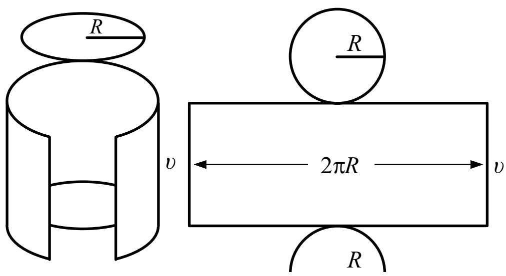
6.3 Κύλινδρος

Ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν το περιστρέψουμε κατά μία ολόκληρη στροφή γύρω από την πλευρά του ΑΒ που μένει ακίνητη δημιουργείται ένα στερεό, που λέγεται κύλινδρος. Άρα:

Ορθός κύλινδρος ή απλώς **κύλινδρος** ονομάζεται το στερεό που δημιουργείται από την πλήρη περιστροφή ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου γύρω από τις πλευρές του.



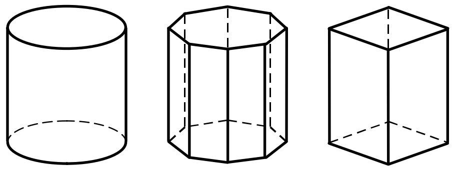
Κατά την περιστροφή του ορθογωνίου παραλληλογράμμου γύρω από την ΑΒ, οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ δημιουργούν ίσους και παράλληλους κυκλικούς δίσκους, καθέτους στην ΑΒ, που λέγονται **βάσεις** του κυλίνδρου. Επίσης, η πλευρά ΓΔ δημιουργεί την **παράπλευρη** επιφάνεια του κυλίνδρου που λέγεται και **κυρτή επιφάνεια**
του κυλίνδρου. Η ΓΔ σε οποιαδήποτε θέση της λέγεται **γενέτειρα** του κυλίνδρου. Η ακίνητη πλευρά ΑΒ λέγεται **ύψος** του κυλίνδρου και ο φορέας της ΑΒ **άξονας** του κυλίνδρου.



Το ανάπτυγμα της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι ορθογώνιο με διαστάσεις την περίμετρο της βάσης του κυλίνδρου (2πR) και το ύψος της βάσης του υ. Ολική επιφάνεια του κυλίνδρου είναι η κυρτή μαζί με τις δύο βάσεις. Επομένως:

Το εμβαδό $E_κ$ της κυρτής επιφάνειας και το εμβαδό $E_{ολ}$ της ολικής επιφάνειας ενός κυλίνδρου με ακτίνα βάσης R και ύψος υ είναι :

$$E_κ = 2πRυ \quad \text{και} \quad E_{ολ} = 2πRυ + 2πR^2$$



Το πρίσμα του σχήματος έχει βάση κανονικό πολύγωνο. Αν διπλασιάζουμε συνεχώς τον αριθμό των πλευρών της βάσης του πρίσματος, παρατηρούμε ότι το πολύγωνο της βάσης τείνει να γίνει κύκλος και έτσι το πρίσμα παίρνει τη μορφή κυλίνδρου. Ο όγκος λοιπόν του κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο του πρίσματος $V = E_\beta \cdot \upsilon$. Άρα:

Ο όγκος V ενός κυλίνδρου με ακτίνα βάσης r και ύψος υ είναι $V = \pi \cdot R^2 \cdot \upsilon$

Παραδείγματα

1. Σε κύλινδρο η κυρτή επιφάνειά του είναι τετραπλάσια από την επιφάνεια της βάσης. Αν η ακτίνα της βάσης είναι 4cm, να βρεθεί ο όγκος του κυλίνδρου.

Λύση

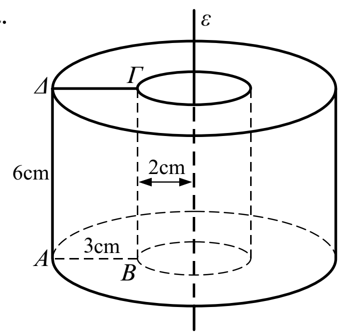
Έχουμε $E_\kappa = 4E_\beta$ ή

$$2\pi R\upsilon = 4\pi R^2 \text{ ή}$$
$$\upsilon = 2R = 8\text{cm}.$$

Άρα: $V = E_\beta \cdot \upsilon$ ή

$$V = \pi R^2 \cdot \upsilon \text{ ή}$$
$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8, \quad \text{δηλαδή} \quad V = 128\pi \text{ cm}^3$$

2. Ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές ΑΒ = 3cm και ΑΔ = 6cm στρέφεται γύρω από μία ευθεία ε που είναι παράλληλη προς την ΓΒ σε απόσταση 2cm. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται.



Λύση

Ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι η διαφορά των όγκων δύο κυλίνδρων, που έχουν το ίδιο ύψος υ = 6cm και ακτίνες R= 5cm και r = 2cm αντίστοιχα. Έτσι έχουμε:

$$V = \pi R^2 \upsilon - \pi \kappa^2 \upsilon = \pi(R^2 - \kappa^2) \cdot \upsilon = \pi(5^2 - 2^2) \cdot 6 = 126\pi \cong 395{,}64 cm^3 .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ο κύλινδρος ενός οδοστρωτήρα έχει διάμετρο 1,22m και μήκος 2,2m. Να βρείτε πόση επιφάνεια καλύπτει σε μια πλήρη στροφή.

2. Μια σιταποθήκη έχει σχήμα κυλινδρικό με διάμετρο 7m και ύψος 8m. Να βρείτε πόσα κιλά σιτάρι χωράει, αν $1\, m^3$ σιταριού ζυγίζει 1550 κιλά.

3. Η εξωτερική διάμετρος του σωλήνα ενός πυροβόλου είναι 30cm, το πάχος του 5cm και το μήκος του 2,5m. Να βρείτε το εμβαδό της εσωτερικής και εξωτερικής του επιφάνειας.

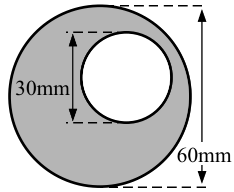
4. Από συμπαγή μεταλλικό κύλινδρο ακτίνας 2cm και ύψους 5cm αφαιρέσαμε ομόκεντρο κύλινδρο ακτίνας 1,5cm. Αν το ειδικό βάρος του μετάλλου είναι $7{,}4 p / cm^3$, να βρείτε το βάρος του υπόλοιπου στερεού και το εμβαδό της επιφάνειάς του.

5. Σ' ένα κιβώτιο διαστάσεων 25cm, 30cm και 35cm τοποθετούμε ένα κυλινδρικό δοχείο διαμέτρου 24cm και ύψους 35cm. Να βρεθεί ο χώρος του κιβωτίου που μένει ελεύθερος.

6. Κυλινδρικός αγωγός νερού σε υδροηλεκτρικό σταθμό έχει μήκος 300m. Να βρεθεί πόσα κυβικά μπετόν χρειάστηκαν για την κατασκευή του αν η εξωτερική του διάμετρος είναι 2m και η εσωτερική διάμετρός του είναι ίση με τα ¾ της εξωτερικής.

7. Μία κυλινδρική δεξαμενή πετρελαίου το πετρέλαιο που έχει μέσα η δεξαμενή φτάνει σε ύψος 4m. Να βρεθεί πόσα κιλά πετρέλαιο έχει μέσα η δεξαμενή αν είναι γνωστό ότι το ειδικό βάρος του πετρελαίου είναι 0,84. Αν βγάλουμε 105.504 κιλά πετρέλαιο από τη δεξαμενή, πόσο θα κατέβει η στάθμη του πετρελαίου;

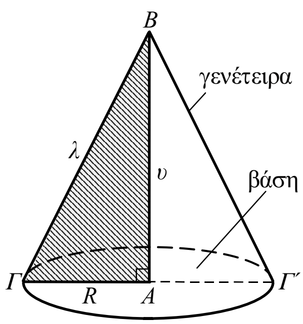
8. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η διατομή ενός χαλύβδινου μηχανικού εξαρτήματος. Αν είναι γνωστό ότι το πάχος του είναι 28mm και το ειδικό βάρος του χάλυβα $7{,}86\text{p}/\text{cm}^3$, να βρείτε το βάρος του εξαρτήματος και το εμβαδό της ολικής τους επιφάνειας.



6.4 Κώνος

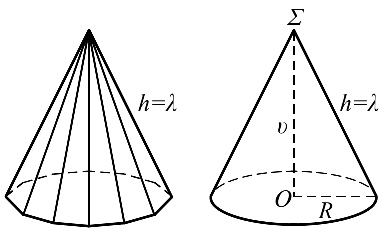
Ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^{o}$ και ε φορέα της κάθετης πλευράς του ΑΒ. Το στερεό που δημιουργείται, αν το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ περιστραφεί ολόκληρο γύρω από την κάθετη πλευρά του ΑΒ, που παραμένει ακίνητη, λέγεται **κώνος**. Άρα:

Ορθός κώνος ή απλά **κώνος** λέγεται το στερεό που δημιουργείται από την περιστροφή ορθογώνιου τριγώνου γύρω από μία από τις κάθετες πλευρές του.



Κατά την περιστροφή του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ γύρω την ΑΒ, η πλευρά ΑΓ δημιουργεί κυκλικό δίσκο κάθετο στην ΑΒ, που λέγεται **βάση** του κώνου. Επίσης, η υποτείνουσα ΒΓ δημιουργεί την παράπλευρη επιφάνεια του κώνου, που λέγεται και **κυρτή επιφάνεια** του κώνου. Η πλευρά ΒΓ σε οποιαδήποτε θέση της λέγεται **γενέτειρα** ή **πλευρά** του κώνου. Η ακίνητη πλευρά ΑΒ λέγεται **ύψος** του κώνου, ο φορέας της **άξονας** του κώνου και το σημείο Β **κορυφή** του κώνου.

Αν σε μία πυραμίδα που έχει βάση κανονικό πολύγωνο διπλασιάζουμε συνεχώς τον αριθμό των πλευρών της βάσης της, παρατηρούμε ότι το πολύγωνο τείνει να γίνει κύκλος και η πυραμίδα τείνει να γίνει κώνος. Έτσι, αν λάβουμε υπόψη ότι η βάση του κώνου είναι κύκλος ακτίνας R και το παράπλευρο ύψος της



πυραμίδας h ταυτίζεται με τη γενέτειρα λ του κώνου, το εμβαδό $E_κ$ της κυρτής επιφάνειας του κώνου και ο όγκος του V δίνονται από τους τύπους του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας $E_π$ και του όγκου της πυραμίδας. Άρα:

Το εμβαδό $E_κ$ της κυρτής επιφάνειας, το εμβαδό $E_{ολ}$ της ολικής επιφάνειας και ο όγκος V ενός κώνου με ακτίνα βάσης R, το ύψος υ και γενέτειρα λ είναι:

$$E_κ = πRλ \quad , \quad E_{ολ} = πRλ + πR^2 \quad , \quad V = \frac{1}{3}πR^2 \cdot υ$$

Παράδειγμα

Ένα κωνικό ηχείο έχει ύψος 15cm και γενέτειρα 17cm. Να υπολογιστεί η επιφάνεια του υλικού που χρειάζεται για να κατασκυαστεί και ο όγκος του.

Λύση

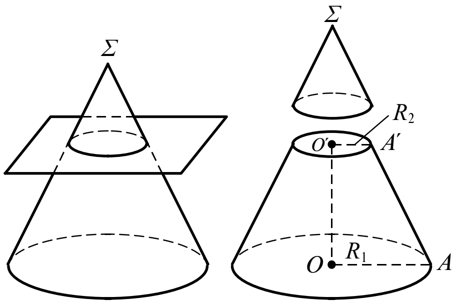
Από τη σχέση $λ^2 = R^2 + υ^2$ έχουμε $R^2 = λ^2 - υ^2$ και, επομένως,
$R = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64} = 8cm$. Άρα:

$$E_{ολ} = πRλ + πR^2 = π \cdot 8 \cdot 17 + π \cdot 8^2 = 136π + 64π = 200π \ cm^2 \quad ή$$
$$E_{ολ} \cong 628cm^2.$$

$$V = \frac{1}{3}πR^2 \cdot υ = \frac{1}{3}π \cdot 8^2 \cdot 15 = 320π \cong 1004{,}8cm^3.$$

Κόλουρος Κώνος

Αν σ' ένα κώνο φέρουμε ένα επίπεδο παράλληλο προς τη βάση του, ο κώνος χωρίζεται σε δύο γεωμετρικά στερεά. Το ένα είναι πάλι κώνος, ενώ το δεύτερο λέγεται **κόλουρος κώνος**.



Η βάση του αρχικού κώνου και ο κυκλικός δίσκος της τομής από το παράλληλο επίπεδο προς τη βάση λέγονται **βάσεις** του κόλουρου κώνου. **Ύψος** του κόλουρου κώνου είναι η απόσταση μεταξύ των δύο βάσεων. Το τμήμα της γενέτειρας του αρχικού κώνου που περιέχεται μεταξύ των δύο βάσεων λέγεται **γενέτειρα** του κόλουρου κώνου.

Παρατήρηση

Ο κόλουρος κώνος, μπορεί να οριστεί και ως το στερεό που δημιουργείται από την περιστροφή ορθογωνίου τραπεζίου γύρω από την πλευρά του, η οποία είναι και το ύψος του.

Αποδεικνύεται ότι:

Το εμβαδό $E_κ$ της κυρτής επιφάνειας, το εμβαδό $E_{ολ}$ της ολικής επιφάνειας και ο όγκος V κόλουρου κώνου με ακτίνες R_1 και R_2 και με γενέτρειρα λ είναι:

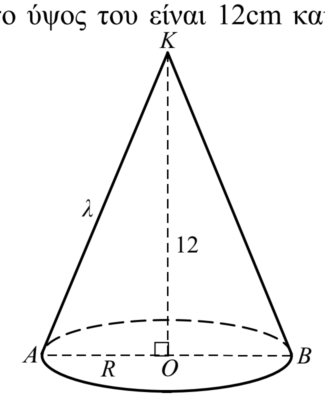
$$E_κ = π(R_1 + R_2)\cdot λ$$

$$E_{ολ} = π(R_1 + R_2)λ + πR_1{}^2 + πR_2{}^2$$

$$V = \frac{1}{3}π(R_1{}^2 + R_1\cdot R_2 + R_2{}^2)\cdot υ\,.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστεί η επιφάνεια ενός κώνου, αν το ύψος του είναι 12cm και ο όγκος του $100π\ cm^3$.



Λύση

Ο όγκος V του κώνου είναι: $V = \frac{1}{3}πR^2υ$. Άρα:

$$\frac{1}{3}πR^2υ = 100π$$

$$R^2υ = 300$$

$R^2 = \dfrac{300}{12} = 25$, επομένως R = 5 cm.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΟΑ $(\hat{O} = 90^o)$,

έχουμε:

$$KA^2 = KO^2 + OA^2$$

$$\lambda^2 = 12^2 + 5^2$$

$$\lambda^2 = 144 + 25 + 169$$. Άρα λ = 13cm.

Επομένως, $E_{ολ} = \pi R^2 + \pi R\lambda = \pi R(R+\lambda) = \pi \cdot 5(5+13) = 90\pi \ \ cm^2$.

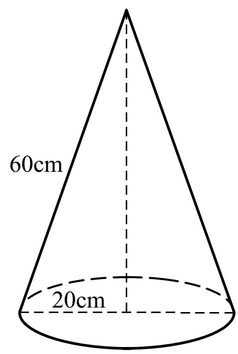
2. Ένας σιδηρουργός θέλει να κατασκευάσει έναν κώνο από λαμαρίνα με πλευρά 60cm και διάμετρο 40cm. Πόσα cm^2 λαμαρίνα θα χρειαστεί;

Λύση

Το εμβαδό της βάσης του κώνου είναι:

$E_\beta = \pi R^2 = 3{,}14 \cdot 20^2 = 3{,}14 \cdot 20 \cdot 60 = 3.768 \ cm^2$.

Άρα $E_{ολ} = 1256 + 3768 = 5.024 \ cm^2$.



3. Ένα δοχείο έχει σχήμα κόλουρου κώνου. Το στόμιό του έχει διάμετρο 12cm και ο πυθμένας του 50m. Αν το βάθος του είναι 20cm, να βρεθεί ο όγκος του.

Λύση

Ο όγκος V του κόλουρου κώνου είναι $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi(R^2 + R \cdot \rho + \rho^2) \cdot \upsilon$

Είναι R = 25cm, ρ = 6cm και υ = 20cm.

Επομένως $V = \dfrac{1}{3}\pi(25^2 + 25 \cdot 6 + 6^2) \cdot 20 = \dfrac{1}{3}\pi(625 + 150 + 36) \cdot 20 \cong$

$\cong 5406{,}66\pi \ cm^3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

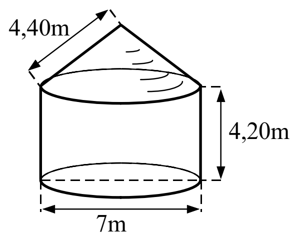
1. Για την κατασκευή μιας κωνικής σκηνής, χρειάζονται $10\,m^2$ ύφασμα χωρίς καμία απώλεια. Η ακτίνα της βάσης της σκηνής είναι 1,2 m. Να υπολογιστεί ο όγκος της.

2. Ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$ με ΑΒ = 12cm και ΑΓ = 35cm περιστρέφεται γύρω από τη ΒΓ πλήρως. Να βρεθεί το εμβαδό και ο όγκος του στερεού που παράγεται.

3. Ένας κώνος με ακτίνα 8cm και ύψος 24cm τέμνεται από επίπεδο παράλληλο προς τη βάση που απέχει απ' αυτήν 6cm. Να υπολογιστούν τα εμβαδά των επιφανειών και οι όγκοι των δύο στερεών που δημιουργήθηκαν.

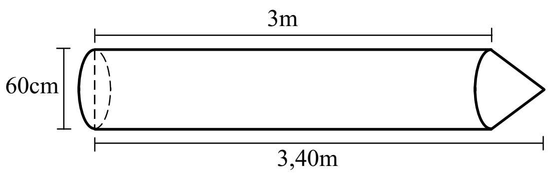
4. Ένας κυκλικός κώνος από αλουμίνιο έχει ύψος 40cm και περιφέρεια βάσης 73,36cm και ζυγίζει 4kp. Να βρεθεί αν ο κώνος είναι κούφιος εσωτερικά (Ειδικό βάρος αλουμινίου $2{,}7kp/m^3$).

5. Ένα πύργος κυλινδρικός έχει διάμετρο βάσης 7m. Το ύψος του τοίχου του είναι 4,20m και η στέγη του είναι κωνική με πλευρά 4,40m. Να βρεθεί το εμβαδό της κυρτής επιφάνειας αυτού του πύργου.



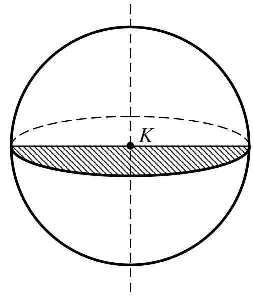
6. Καπνοδόχος από μπετόν έχει σχήμα κόλουρου κώνου με ύψος 24m. Οι εξωτερικές περιφέρειες έχουν μήκος 19m και 9,5m αντίστοιχα. Να βρεθεί ο όγκος της καπνοδόχου αν το πάχος του μπετόν είναι 80cm.

7. Να υπολογιστεί το εμβαδό της επιφάνειας και ο όγκος του παρακάτω σχήματος.



8. Ένας κόλουρος κώνος και ένας κύλινδρος έχουν το ίδιο ύψος υ = 30cm και μια κοινή βάση ακτίνας 2m. Να υπολογιστεί η ακτίνα της δεύτερης βάσης του κόλουρου κώνου ώστε ο όγκος του να είναι ίσος με τα $\frac{2}{5}$ του όγκου του κυλίνδρου.

6.5 Σφαίρα



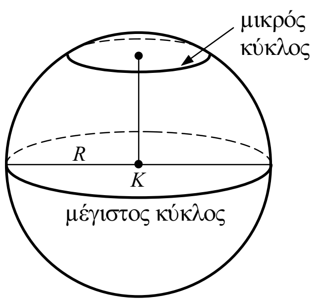
Ο ημικυκλικός δίσκος του διπλανού σχήματος περιστρέφεται γύρω από τη διάμετρό του AB. Το στερεό που δημιουργείται λέγεται **σφαίρα.**

Ώστε:

Σφαίρα λέγεται το γεωμετρικό στερεό που δημιουργείται από την πλήρη στροφή ενός ημικυκλικού δίσκου γύρω από τη διάμετρό του.

Κατά την περιστροφή αυτή το ημικύκλιο γράφει την επιφάνεια της σφαίρας, που λέγεται **σφαιρική επιφάνεια**.

Στη σφαίρα το κέντρο K του ημικυκλίου λέγεται **κέντρο** της σφαίρας, ενώ η ακτίνα R του ημικυκλίου λέγεται **ακτίνα** της σφαίρας. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στην επιφάνεια της σφαίρας και περνάει από το κέντρο της λέγεται **διάμετρος** της σφαίρας. Όλα τα σημεία της επιφάνειας της σφαίρας απέχουν από το κέντρο σταθερή απόσταση ίση με R.



Μία επίπεδη τομή σφαίρας είναι κύκλος. Αν μία επίπεδη τομή σφαίρας περνάει από το κέντρο της, τότε ο κύκλος της τομής έχει ακτίνα ίση με την ακτίνα της σφαίρας και λέγεται **μέγιστος κύκλος**. Η τομή αυτή λέγεται και **κεντρική τομή**. Όλες οι άλλες επίπεδες τομές της σφαίρας είναι κύκλοι με ακτίνα μικρότερη από την ακτίνα της σφαίρας και λέγονται **μικροί κύκλοι** της σφαίρας. Το επίπεδο ενός μέγιστου κύκλου χωρίζει τη σφαίρα σε δύο ίσα μέρη που λέγονται **ημισφαίρια**.

Αποδεικνύεται ότι:

Το εμβαδό Ε της επιφάνειας και ο όγκος V μιας σφαίρας ακτίνας R είναι:

$$E = 4\pi R^2 \quad \text{και} \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Η ακτίνα της γης είναι 6.378 km. Να υπολογισθεί ο όγκος και η επιφάνειά της.

Λύση

Δεχόμαστε ότι το σχήμα της γης είναι σφαίρα, οπότε:

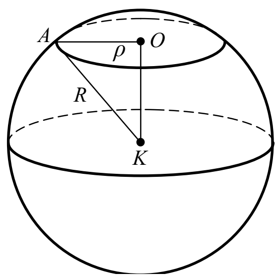
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 6378^3\,\text{km}^3 \quad \text{και} \quad E = 4\pi R^2 = 4\pi\cdot 6378^2\,\text{km}^2 .$$

2. Μια επίπεδη τομή σφαίρας έχει εμβαδό $64\pi\,\text{cm}^2$ και απέχει από το κέντρο της σφαίρας 6cm. Να βρεθούν:

i) Η ακτίνα της σφαίρας,

ii) το εμβαδό και ο όγκος της σφαίρας.

Λύση



i) Αν ρ είναι η ακτίνα του κύκλου της επίπεδης τομής και E_1 το εμβαδό, τότε:

$E_1 = \pi\rho^2$ ή $64\pi = \pi\rho^2$ ή $\rho^2 = 64$, άρα $\rho = 8$cm.

Το ορθογώνιο ΚΟΑ είναι ορθογώνιο με ΚΟ = 6cm και ΟΑ = ρ = 8cm. Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$R^2 = KA^2 = KO^2 + OA^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$,
οπότε $R = 10cm$.

ii) Αντικαθιστούμε στους τύπους και έχουμε:
$E = 4\pi R^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 100 = 1256cm^2$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 10^3 = 4.186{,}66\ cm^3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ένας σφαιρικός θάλαμος για την αποθήκευση αερίου έχει διάμετρο 4m. Πόσο ύφασμα θα χρησιμοποιήσουμε για την κατασκευή του και πόσα lt αέριο χωράει;

2. Ο όγκος μιας σφαίρας είναι $113{,}04\,m^3$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της.

3. Μία μπάλα από ελαστικό έχει εσωτερική διάμετρο 30cm και πάχος ελαστικού 4mm. Να βρεθεί ο όγκος του ελαστικού.

4. Να βρεθεί η επιφάνεια και ο όγκος σφαίρας, αν γνωρίζουμε ότι το μήκος ενός μέγιστου κύκλου της είναι 25,12m.

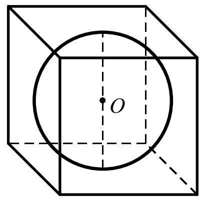
5. Η τομή μιας σφαίρας με επίπεδο που απέχει από το κέντρο της 5cm είναι κύκλος με ακτίνα $\sqrt{11}cm$. Να βρεθούν

i) η ακτίνα R της σφαίρας,
ii) το εμβαδό και ο όγκος της σφαίρας.

6. Μια σφαίρα και ένας κόλουρος κώνος έχουν τους ίδιους όγκους. Αν ο κόλουρος κώνος έχει ύψος $\frac{54}{7}$cm και διαμέτρους βάσεων 16cm και 8cm, να βρεθεί η ακτίνα της σφαίρας.

7. Ο όγκος μιας σφαίρας είναι $2\,m^3$. Να βρεθεί το εμβαδό της επίπεδης τομής της σφαίρας από ένα επίπεδο, το οποίο απέχει από το κέντρο της σφαίρας 0,50m.

8. Μία σφαίρα με ακτίνα 0,5m χωράει ακριβώς σ' ένα κυβικό κιβώτιο. Να βρεθεί το μέρος του όγκου του κιβωτίου που μένει άδειο.



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

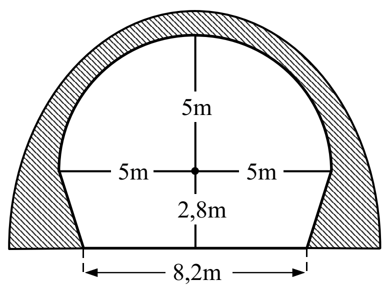
1. Μια οικοδομή έχει ύψος 15m και βάση τετράγωνο πλευράς 18m. Μέσα σ' αυτή και σ' όλο το ύψος της υπάρχει ένας κυλινδρικός φωταγωγός διαμέτρου 2m. Να βρεθεί ο καθαρός όγκος της οικοδομής.

2. Μία κανονική τριγωνική πυραμίδα έχει την κορυφή της στο κέντρο της μικρής βάσης κόλουρου κώνου. Το ισόπλευρο τρίγωνο της βάσης της είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο της μεγάλης βάσης του κόλουρου κώνου. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που απομένει αν αφαιρεθεί η πυραμίδα από τον κόλουρο κώνο. Δίνονται $R_1 = 2cm$, $R_2 = 8cm$ και $\upsilon = 10cm$.

3. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η διατομή μιας σήραγγας (τούνελ). Να βρείτε

α) πόσα m^3 χώματος βγήκαν κατά την κατασκευή της, αν το μήκος της είναι 210m

β) πόσα m^2 είναι η επιφάνειά της χωρίς το δρόμο.



4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) είναι ΑΓ = 16cm. Το Δ είναι μέσο της ΑΓ και το Ε μέσο της ΒΓ. Τα ΓΕΔ και ΑΒΕΔ στρέφονται μια πλήρη στροφή περί την ΑΒ και παράγουν στερεά με όγκους V_1 και V_2 αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι $V_1 = V_2$.

5. Από ένα μεταλλικό κυλινδρικό κομμάτι αφαιρέθηκαν, με τη βοήθεια τόρνου, ένας κώνος και ένα ημισφαίριο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε το εμβαδό της επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που απέμεινε.