2.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Ο αριθμός 16 μπορεί να γραφεί $16 = 2^4$. Ο εκθέτης 4 λέγεται λογάριθμος του 16 με βάση το 2 και συμβολίζεται $4 = \log_2 16$.

- Ο αριθμός 16 μπορεί να γραφεί και σαν δύναμη του 4, δηλαδή $16 = 4^2$. Ο εκθέτης 2 λέγεται λογάριθμος του 16 με βάση το 4 και συμβολίζεται $2 = \log_4 16$.
- Ο αριθμός $\frac{1}{125}$ μπορεί να γραφεί $\frac{1}{125} = 5^{-3}$. Ο εκθέτης –3 λέγεται λογάριθμος του $\frac{1}{125}$ με βάση το 5 και συμβολίζεται $-3 = \log_5 \frac{1}{125}$.

Δηλαδή

Λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ με βάση το θετικό αριθμό α, με α ≠ 1, είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε τον θ.

$$\log_\alpha \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta$$

Αποδεικνύεται ότι αν έχω έναν οποιονδήποτε θετικό αριθμό θ και ένα θετικό αριθμό α, με α ≠ 1, υπάρχει ένας μόνο εκθέτης x (ρητός ή άρρητος) τέτοιος ώστε $\theta = \alpha^x$ (ή $\log_\alpha \theta = x$).

Αυτό σημαίνει ότι **υπάρχει πάντοτε ο λογάριθμος** του θετικού αριθμού θ με βάση τον α, α > 0 και α ≠ 1, και είναι **μοναδικός** .

Παραδείγματα

Αφού $8 = 2^3$ τότε $\log_2 8 = 3$

Αφού $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$ τότε $\log_{1/4} 16 = -2$

Αφού $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{0} = 1$ τότε $\log_{1/\sqrt{3}} 1 = 0$

Αφού $10^{-2} = 0{,}01$ τότε $\log_{10} 0{,}01 = -2$

$\log_{10} 1000 = 3$ γιατί $10^3 = 1000$

$\log_{0,6} 0{,}36 = 2$ γιατί $0{,}6^2 = 0{,}36$

$\log_9 3 = \frac{1}{2}$ γιατί $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

$\log_7 \left(\frac{1}{49}\right) = -2$ γιατί $(7)^{-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$

Παρατήρηση

Στον ορισμό του λογάριθμου ενός οποιουδήποτε θετικού αριθμού θ λέμε ότι $\alpha \neq 1$, γιατί για κάθε x, $1^x = 1 \neq \theta$.

Από τον ορισμό του λογάριθμου προκύπτουν

- $\log_\alpha 1 = 0$, γιατί $\alpha^0 = 1$
- $\log_\alpha \alpha = 1$, γιατί $\alpha^1 = \alpha$
- $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$
- $\log_\alpha \alpha^x = x$

2.3 ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ – ΦΥΣΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Από τους λογάριθμους ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι λογάριθμοι που έχουν βάση το 10 και οι λογάριθμοι με βάση το e. Για τους λογάριθμους αυτούς χρησιμοποιούνται ειδικοί συμβολισμοί και ονομασίες.

Δεκαδικοί λογάριθμοι

Ο λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ με βάση το 10 λέγεται δεκαδικός λογάριθμος του θ και συμβολίζεται με $\log\theta$ αντί $\log_{10}\theta$.

Δηλαδή ο λογάριθμος του θετικού αριθμού θ είναι ο εκθέτης x στον οποίο πρέπει να υψώσουμε το 10 για να βρούμε το θ

$$\log\theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$$

Παραδείγματα

αφού $100 = 10^2$ τότε $\log 100 = 2$

αφού $0{,}001 = 10^{-3}$ τότε $\log 0{,}001 = -3$

$\log 10.000 = 4$ γιατί $10^4 = 10.000$

$\log\frac{1}{100} = -2$ γιατί $10^{-2} = \frac{1}{100}$

Οι δεκαδικοί λογάριθμοι υπολογίζονται εύκολα με τη βοήθεια της υπολογιστικής μηχανής. Με το πλήκτρο log προσδιορίζουμε κατά προσέγγιση το δεκαδικό λογάριθμο οποιουδήποτε θετικού αριθμού. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του log2 : πατάμε το πλήκτρο με τον αριθμό 2, μετά το πλήκτρο με το σύμβολο log και εμφανίζεται στην οθόνη το αποτέλεσμα.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ	**ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (σειρά που πατάμε τα πλήκτρα)**	**ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ**
log2	2 log	0,30103

Φυσικοί ή νεπέρειοι λογάριθμοι

Οι φυσικοί ή νεπέρειοι λογάριθμοι χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στη Φυσική και στις άλλες θετικές επιστήμες.

Ο λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ με βάση τον άρρητο αριθμό e ($e \cong 2{,}718$) λέγεται φυσικός ή νεπέρειος λογάριθμος του θ και συμβολίζεται με lnθ αντί $\log_e \theta$.

Δηλαδή, ο φυσικός λογάριθμος του θετικού αριθμού θ είναι ο εκθέτης x στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον e για να βρούμε το θ.

$\ln\theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$

Παραδείγματα

$\ln 1 = 0$ γιατί $e^0 = 1$

$\ln e = 1$ γιατί $e^1 = e$

$\ln\frac{1}{e} = -1$ γιατί $e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\ln e^2 = 2$

Οι νεπέρειοι λογάριθμοι υπολογίζονται εύκολα με τη βοήθεια της υπολογιστικής μηχανής.

Με το πλήκτρο ln μιας υπολογιστικής μηχανής υπολογίζουμε με προσέγγιση το νεπέρειο λογάριθμο οποιουδήποτε θετικού αριθμού.

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του ln2: πατάμε το πλήκτρο με τον αριθμό 2, μετά το πλήκτρο με το σύμβολο ln και εμφανίζεται στην οθόνη το αποτέλεσμα.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ	**ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (σειρά που πατάμε τα πλήκτρα)**	**ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ**
Ln2	2 ln	0,69315

ΤΟΝΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ

Μπορούμε να υπολογίσουμε μόνο λογάριθμους θετικών αριθμών . Λογάριθμοι μη θετικών αριθμών δεν ορίζονται.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) Αν θ θετικός, α > 0 και α ≠ 1 τότε $\log_\alpha \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta$ Σ ο Λ ο

β) $\log_\alpha 1 = \alpha$ Σ ο Λ ο

γ) $\log_\alpha \alpha = 1$ Σ ο Λ ο

δ) $\ln e^2 = 2$ Σ ο Λ ο

ε) $\ln 1 = 0$ Σ ο Λ ο

2. Να συνδέσετε κάθε ισότητα της πρώτης στήλης με την τιμή του x που την επαληθεύει από τη δεύτερη στήλη

▪ $\log_x 5 = \frac{1}{2}$	▪ $x = -1$
▪ $\log_3\left(\frac{1}{3}\right) = x$	▪ $x = 10$
▪ $\log_x 1000 = 3$	▪ $x = 0{,}1$
▪ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = x$	▪ $x = \frac{1}{2}$
	▪ $x = 25$
	▪ $x = 2$

3. Εφαρμόζοντας τον ορισμό του λογάριθμου ενός θετικού αριθμού να συμπληρώσετε τις ισοδυναμίες.

α. $\log_2 64 = 6 \Leftrightarrow$	η. $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2 \Leftrightarrow$ ....
β. $10.000 = 10^4 \Leftrightarrow$ .... …	θ. $81 = 3^4 \Leftrightarrow$ ...... ….
γ. $\log 100.000 = 5 \Leftrightarrow$	ι. $\log_2 \frac{1}{32} = -5 \Leftrightarrow$ ....
δ. $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow$	κ. $\frac{1}{1000} = 10^{-3} \Leftrightarrow$ ......
ε. $\log_3 \frac{1}{27} = -3 \Leftrightarrow$	λ. $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ ......
στ. $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4 \Leftrightarrow$	μ. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{16}{9} \Leftrightarrow$ ......
ζ. $1 = e^0 \Leftrightarrow$	

4. Να βρείτε το x από τις παρακάτω ισότητες:

α) $\log_x 81 = 2$ δ) $\log_2 \left(\frac{1}{3}\right) = x$ ζ) $\log 10^5 = x$

β) $\log_x 25 = \frac{2}{3}$ ε) $\log x = -2$ η) $\log_\alpha \alpha^5 = x$

γ) $\log_x \left(\frac{16}{81}\right) = 4$ στ) $\log_{0,3} x = 1$ θ) $\log_{\sqrt{\alpha}} \alpha = x$

5. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{\log_2 16 - \log_3 9}{\log_\alpha \alpha^5 - \log_\beta \beta^3}$ α,β θετικοί αριθμοί

β) $\dfrac{\log 10.000 - \log 0,0001}{\log 10 + \log 100}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

Αν α > 0 και α ≠ 1, τότε για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς θ, θ_1, θ_2 ισχύουν:

1. $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$
2. $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$
3. $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_\alpha \theta, \kappa \in R$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστεί ο $\log_3 36$ αν γνωρίζουμε ότι $\log_3 2 = 0{,}63$.

Λύση

Έχω $\log_3 36 = \log_3(4 \cdot 9) = \log_3 4 + \log_3 9 = \log_3 2^2 + \log_3 3^2 =$

$= 2 \cdot \log_3 2 + 2 \cdot \log_3 3 = 2 \cdot 0{,}63 + 2 \cdot 1 = 1{,}26 + 2 = 3{,}26$.

2. Να δειχθεί ότι log25 + log8 – log20 = 1.

Λύση

Έχω log25 + log8 – log20 =

$$\log(25 \cdot 8) - \log 20 = \log \frac{25 \cdot 8}{20} = \log \frac{200}{20} = \log 10 = 1.$$

3. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης
$A = 3\log_3 2 + 2\log_3 6 - \log_3 32$.

Λύση

$$A = 3\log_3 2 + 2\log_3 6 - \log_3 32 = \log_3 2 + \log_3 6^2 - \log_3 32 =$$
$$= \log_3 8 + \log_3 36 - \log_3 32 =$$
$$= \log_3(8 \cdot 36) - \log_3 32 =$$

$$= \log_3 \frac{8 \cdot 36}{32} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \cdot \log_3 3 =$$
$$= 2 \cdot 1 = 2$$

Αλλαγή βάσης λογαρίθμου

΄Οπως είπαμε παραπάνω τους λογάριθμους αριθμών με βάση 10 ή με βάση e μπορούμε να τους υπολογίσουμε εύκολα με τη βοήθεια της υπολογιστικής μηχανής.

Εάν όμως θέλουμε να υπολογίσουμε λογάριθμους αριθμών με βάση α, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω τύπο, ο οποίος μας δίνει το λογάριθμο ενός αριθμού $\theta > 0$ ως προς βάση α, όταν γνωρίζουμε τους λογάριθμους των αριθμών θ και α ως προς βάση β.

$$\log_\alpha \theta = \frac{\log_\beta \theta}{\log_\beta \alpha}$$

Ο τύπος αυτός βοηθά να μετατρέψουμε το λογάριθμο αριθμού με οποιαδήποτε βάση σε πηλίκο λογάριθμων αριθμών με βάση το 10 ή με βάση το e και μετά να χρησιμοποιήσουμε υπολογιστική μηχανή.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί με υπολογιστική μηχανή ο $\log_3 35$.

Λύση

Σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο για $\beta = 10$

$$\log_3 35 = \frac{\log 35}{\log 3} \cong \frac{1,544}{0,477} \cong 3,237$$

ή για $\beta = e$

$$\log_3 35 = \frac{\ln 35}{\ln 3} \cong \frac{3,555}{1,099} \cong 3,235$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Με τη βοήθεια της υπολογιστικής μηχανής να υπολογίσετε τους λογάριθμους
α) $\log_4 7$ β) $\log_5 37$ γ) $\log_2 10$

2. Χωρίς τη βοήθεια της υπολογιστικής μηχανής να υπολογίσετε τις παραστάσεις
α) $\log_3 7 \cdot \log_7 3$ β) $\log_4 19 \cdot \log_{19} 4$
γ) Ποια είναι η σχέση που έχουν οι αριθμοί $\log_\beta \alpha$ και $\log_\alpha \beta$;

3. α) Αν $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$ τότε $\log(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log\theta_1 \cdot \log\theta_2$ Σ ο Λ ο

β) Αν $\frac{x}{y} > 0$ τότε $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$ Σ ο Λ ο

γ) $\log\left(\frac{1}{\theta}\right) = -\log\theta$, $\theta > 0$ Σ ο Λ ο

δ) $\log(\alpha+\beta) = \log\alpha + \log\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ Σ ο Λ ο

ε) Αν $xy > 0$ τότε $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$ Σ ο Λ ο

στ) Αν $x > 0, y > 0$ τότε $\log x + \log y = \log(xy)$ Σ ο Λ ο

ζ) Αν $x > 0, y > 0$ τότε $\log x - \log y = \log(\frac{x}{y})$ Σ ο Λ ο

η) $\log\theta = \frac{\ln 10}{\ln\theta}$, $\theta > 0$ Σ ο Λ ο

θ) $\ln\theta = \frac{\log\theta}{\log e}$ Σ ο Λ ο

ι) Οι αριθμοί $\log_\beta \alpha$ και $\log_\alpha \beta$ $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ είναι αντίστροφοι Σ ο Λ ο
$\beta > 0$, $\beta \neq 1$

κ) Οι αριθμοί ln10 και loge είναι αντίστροφοι Σ ο Λ ο

4. Να αποδείξετε τις ισότητες
α) $2\log 6 + \log 5 - \log 18 = 1$

β) $\frac{\log 49}{\log 14 - \log 2} = 2$

γ) $\frac{1}{2}\log_\alpha 25 + \frac{1}{3}\log_\alpha 8 + \frac{1}{5}\log_\alpha 32 = 2\log_\alpha 2 + \log_\alpha 5$