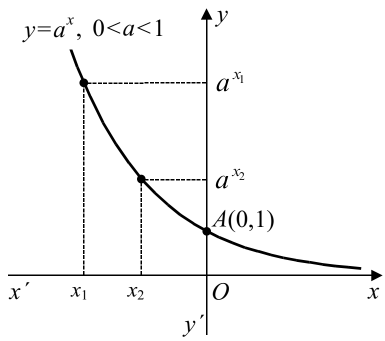
$\ldots > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{0} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2} > \ldots$, δηλαδή μικραίνουν αντίστοιχα και οι τιμές της συνάρτησης $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$.

Πιο απλά, όταν μεγαλώνουν οι τιμές του x, η καμπύλη «κατεβαίνει».

Τότε, όπως είναι γνωστό, λέμε ότι η $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

- Η C_g τέμνει τον άξονα y ΄y στο σημείο A (0, 1) , γιατί για x = 0 $g(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$.

Γενικά, η γραφική παράσταση της $g: R \to R$ με $g(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha < 1$ έχει την παρακάτω μορφή.



Τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε από τη μελέτη της $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ γενικεύονται για την $g(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha < 1$. Έτσι, έχουμε:

Η $g(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha < 1$

- Έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών R.
- Έχει σύνολο τιμών το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών.
- Είναι γνωσίως φθίνουσα, δηλαδή για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$.
- Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο A (0, 1).

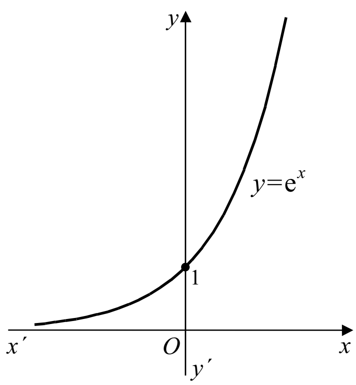
- Η γραφική της παράσταση, όσο οι τιμές του x μεγαλώνουν, «πλησιάζει» όλο και πιο πολύ τον ημιάξονα των θετικών αριθμών Ox, χωρίς να τον συναντά. Γι' αυτό λέμε ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha^x$ με 0 < α < 1 έχει «οριζόντια ασύμπτωτο» το θετικό ημιάξονα των τετμημένων.

Μία εκθετική συνάρτηση που συναντάμε σε πολλές εφαρμογές είναι η εκθετική συνάρτηση με βάση τον αριθμό e.

Ο e, που είναι άρρητος αριθμός, είναι πολύ σημαντικός στα Μαθηματικά και με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων είναι $e \approx 2{,}718$.

Η εκθετική συνάρτηση με βάση τον αριθμό e λέγεται απλώς εκθετική και έχει τύπο $f(x) = e^x$.

Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η μελέτη της εκθετικής συνάρτησης είναι ίδια με τη μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$ με α > 1, που έχει γίνει σε προηγούμενη παράγραφο.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $2^x = 32$ ii) $27^{4x} = 9^{x+1}$ iii) $3^{x^2-8x+11} = 27$ iv) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2x}$

v) $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$.

Λύση

i) Έχουμε:

$$2^x = 32 \Leftrightarrow 2^x = 2^5 \Leftrightarrow x = 5$$

ii) Έχουμε:

$$27^{4x} = 9^{x+1} \Leftrightarrow (3^3)^{4x} = (3^2)^{x+1} \Leftrightarrow 3^{12x} = 3^{2x+2} \Leftrightarrow 12x = 2x + 2 \Leftrightarrow 12x - 2x = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

iii) $3^{x^2-8x+12} = 27 \Leftrightarrow 3^{x^2-8x+12} = 3^3 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow$
$(x = -1 \text{ ή } x = 9)$.

iv) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = \left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}\right]^{2x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2x} \Leftrightarrow x - 2 = -2x$
$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$

v) $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0 \Leftrightarrow$
$(2^2)^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0 \Leftrightarrow$
$(2^x)^2 - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$.

Θέτουμε $2^x = y$, y >0 και προκύπτει μια νέα εξίσωση : $y^2 - 7y - 8 = 0$ που μας δίνει τις λύσεις y = 8 ή y = -1.
Από αυτές μόνον η y = 8 είναι δεκτή, γιατί y >0.
Στην σχέση $2^x = y$ αντικαθιστούμε το y με την τιμή 8 και έχουμε $2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$.

Οι παραπάνω εξισώσεις που έχουν άγνωστο στον εκθέτη λέγονται εκθετικές εξισώσεις.

2. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{Bmatrix} 2^{3x+y} = 32 \\ 3^{2x-y} = 1 \end{Bmatrix}$ ii) $\begin{Bmatrix} 2^x - 3^y = 1 \\ 4^x + 9^y = 5 \end{Bmatrix}$ **(εκθετικά συστήματα)**

Λύση

i) $\left.\begin{cases}2^{3x+y}=32\\3^{2x-y}=1\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}2^{3x+y}=2^5\\3^{2x-y}=3^0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}3x+y=5\\2x-y=0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}y=5-3x\\2x-(5-3x)=0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow$

$\left.\begin{cases}y=5-3x\\5x=5\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}y=5-3x\\x=1\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\right\}.$

Η λύση του συσττήματος είναι : x = 1 και y = 2.

ii) $\left.\begin{cases}2^x-3^y=1\\4^x+9^y=5\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}2^x-3^y=1\\(2^2)^x+(3^2)^y=5\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}2^x-3^y=1\\(2^x)^2+(3^y)^2=5\end{cases}\right\}.$

Θέτουμε $2^x=\omega>0$ και $3^y=\varphi>0$ και προκύπτει ένα νέο σύστημα:

$\left.\begin{matrix}\omega-\varphi=1\\\omega^2+\varphi^2=5\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}\omega=\varphi+1\\(\varphi+1)^2+\varphi^2=5\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}\omega=\varphi+1\\\varphi^2+\varphi-2=0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix}\omega=\varphi+1\\\varphi=-2 \quad \text{ή } \varphi=1\end{matrix}$

- Αν φ = -2, τότε ω = -1.
- Αν φ = 1, τότε ω = 2.

Έτσι, οι λύσεις του συστήματος είναι (ω,φ) = (-1 , -2) ή (ω,φ) = (2 ,1).

Η λύση ω = -1 και φ = -2 απορρίπτεται, γιατί ω = $2^x>0$ και φ = $3^y>0$.

Αντικαθιστούμε τις τιμές των ω = 2 και φ = 1 στις σχέσεις $2^x=\omega$ και $3^y=\varphi$ και

έχουμε $\left.\begin{cases}2^x=2\\\text{και}\\3^y=1\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}2^x=2^1\\\text{και}\\3^y=3^0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}x=1\\\text{και}\\y=0\end{cases}\right\}$, που είναι η λύση του αρχικού συστήματος.

Ο ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Πολλά φυσικά μεγέθη μεταβάλλονται με το χρόνο και η τιμή τους κάθε χρονική στιγμή t, που συμβολίζεται με Q(t), δίνεται από τη συνάρτηση με τύπο $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$.

Αυτή είναι μία ακόμα εκθετική συνάρτηση με βάση το e και είναι γνωστή ως νόμος της εκθετικής μεταβολής.

Στον παραπάνω τύπο:

Q_0 : είναι η τιμή που είχε το μέγεθος τη στιγμή που αρχίσαμε να το μετράμε (t = 0) και λέγεται **αρχική τιμή του μεγέθους**.

C: είναι μία σταθερά που

- αν είναι θετικός αριθμός, το μέγεθος Q αυξάνεται όσο περνάει ο χρόνος και ο παραπάνω τύπος εκφράζει το νόμο της εκθετικής αύξησης.
- αν είναι αρνητικός αριθμός, το μέγεθος Q μειώνεται όσο περνάει ο χρόνος και ο παραπάνω τύπος εκφράζει το νόμο της εκθετικής απόσβεσης.

Πολλές φορές στη Φυσική, για να περιγράψουμε διάφορα φαινόμενα, χρησιμοποιούμε το νόμο της εκθετικής μεταβολής. Ο νόμος αυτός εφαρμόζεται και σε άλλες επιστήμες, όπως είναι η Βιολογία και η Στατιστική.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου ενός δοχείου με βραστό νερό, όταν το αφήσουμε στο χιόνι, μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση : $\theta(t) = 100\,e^{-0{,}1t}$, όπου t ο χρόνος σε λεπτά.

i) Να βρείτε την αρχική θερμοκρασία του νερού και τη θερμοκρασία του μετά από 10, 20, 30, 40, 50, 60 λεπτά.

ii) Να δείξετε με τη βοήθεια γραφικής παράστασης σε βαθμολογημένους άξονες τη μείωση της θερμοκρασίας του νερού σε σχέση με το χρόνο.

Λύση

i)

Αρχικά η θερμοκρασία του νερού είναι $\theta(0) = 100 \cdot e^{-0,1\cdot 0} = 100 \cdot 1 = 100$ βαθμοί.

Μετά από 10 λεπτά είναι $\theta(10) = 100 \cdot e^{-0,1\cdot 10} = 36,8$ βαθμοί.

Μετά από 20 λεπτά είναι $\theta(20) = 100 \cdot e^{-0,1\cdot 20} = 13,5$ βαθμοί.

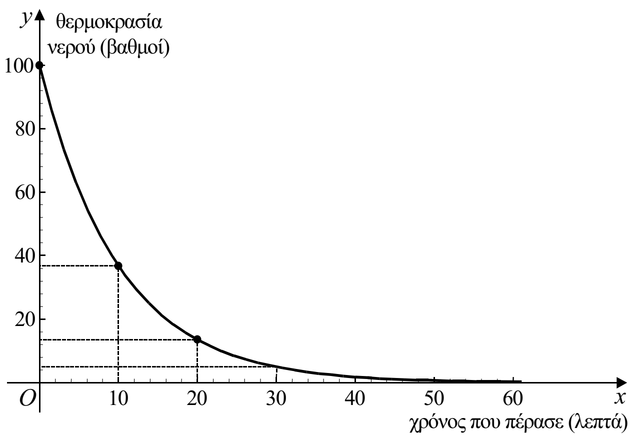
Μετά από 30 λεπτά είναι $\theta(30) = 100 \cdot e^{-0,1\cdot 30} = 5,0$ βαθμοί.

Μετά από 40 λεπτά είναι $\theta(40) = 100 \cdot e^{-0,1\cdot 40} = 1,8$ βαθμοί.

Μετά από 50 λεπτά είναι $\theta(50) = 100 \cdot e^{-0,1\cdot 50} = 0,7$ βαθμοί.

Μετά από 60 λεπτά είναι $\theta(60) = 100 \cdot e^{-0,1\cdot 60} = 0,2$ βαθμοί.

ii)



2. Ο εισαγωγέας ενός απορρυπαντικού, για να αυξήσει τις πωλήσεις του, σκέφτηκε να πουλάει το προϊόν του σε πελάτες και να προσφέρει χρηματική αμοιβή σε όποιον απ' αυτούς φέρνει μέσα σ' ένα μήνα τρεις νέους πελάτες.

Στην αρχή πούλησε το προϊόν σε είκοσι πελάτες. Ο καθένας απ' αυτούς έφερε τρεις νέους πελάτες μέσα σ' ένα μήνα. Η διαδικασία αυτή συνεχίστηκε και για τους νέους πελάτες με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

Να βρείτε:

i) Τη συνάρτηση Q(t) που δίνει πόσοι πελάτες αγόρασαν το προϊόν t μήνες από τη στιγμή που άρχισε να πουλιέται.

ii) Πόσοι πελάτες αγόρασαν το απορρυπαντικό ύστερα από 2 μήνες, 4 μήνες, 8 μήνες;

iii) Μετά από πόσους μήνες ο αριθμός των πελατών θα ξεπεράσει τους 1.000.000;

iv) Να δείξετε με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης πώς αυξάνεται ο αριθμός των πελατών μέσα στους 10 πρώτους μήνες.

Λύση

i) Όταν άρχισε να πουλιέται το προϊόν (δηλ. $t = 0$), οι πελάτες ήταν $Q = 20$.

Μετά από 1 μήνα οι πελάτες ήταν $Q(1) = 20 \cdot 3$.

Μετά από 2 μήνες οι πελάτες ήταν $Q(2) = (20 \cdot 3) \cdot 3 = 20 \cdot 3^2$.

Μετά από 3 μήνες οι πελάτες ήταν $Q(3) = (20 \cdot 3^2) \cdot 3 = 20 \cdot 3^3$.

………………

Μετά από t μήνες οι πελάτες είναι $Q(t) = 20 \cdot 3^t$.

ii) Μετά από 2 μήνες ($t = 2$) έχουμε $Q(2) = 20 \cdot 3$ =180 πελάτες.

Μετά από 4 μήνες ($t = 4$) έχουμε $Q(4) = 20 \cdot 3^4$ =1.620 πελάτες.

Μετά από 8 μήνες ($t = 8$) έχουμε $Q(8) = 20 \cdot 3^8$ =131.220 πελάτες.

iii) Βρήκαμε ότι μετά από 8 μήνες έχουμε $Q(8) = 131.220$ πελάτες.

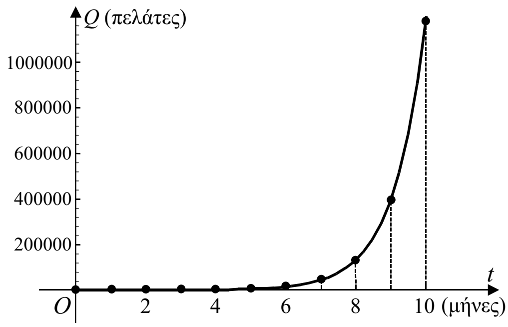
Με τον ίδιο τρόπο:

Μετά από 9 μήνες ($t = 9$) έχουμε $Q(9) = 20 \cdot 3^9$ =393.660 πελάτες.

Μετά από 10 μήνες ($t = 10$) έχουμε $Q(10) = 20 \cdot 3^{10}$ =1.180.980 πελάτες.

Δηλαδή, μετά από 10 μήνες ο αριθμός των πελατών ξεπερνάει τους 1.000.000.

iv)



t (μήνες)	Q (πελάτες)
0	20
1	60
2	180
3	540
4	1.620
5	4.860
6	14.580
7	43.740
8	131.220
9	393.660
10	1.180.980

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν η βάση α μιας δύναμης α^x είναι θετικός αριθμός, τότε:

- ο Η δύναμη είναι αρνητική, αν ο εκθέτης x είναι αρνητικός αριθμός.
- ο Η δύναμη είναι θετική, μόνο, όταν ο εκθέτης x είναι θετικός.
- ο Η δύναμη είναι θετική, ανεξάρτητα αν ο εκθέτης είναι θετικός, αρνητικός ή μηδέν.

2. Η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$:

- ο Έχει πεδίο ορισμού το R και πεδίο τιμών το R.
- ο Έχει πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών.
- ο Έχει πεδίο ορισμού το R και πεδίο τιμών το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών.

3. α) Εκθετική συνάρτηση με βάση α >0 ονομάζεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$.

Σ ο   Λ ο

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

β) Η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.   Σ ο   Λ ο

γ) Η συνάρτηση $f(x)=e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.   Σ ο   Λ ο

4. α) Η εξίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -\frac{1}{2}$ έχει λύση:

ο $x = -\frac{1}{2}$, ο x = -1, ο είναι αδύνατη.

β) Η εξίσωση $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ έχει λύση:

ο $x = \frac{1}{3}$, ο x = -1, ο είναι αδύνατη.

γ) Η εξίσωση $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4x-5}$ έχει λύση:

ο $x = \frac{5}{4}$, ο $x = \frac{4}{5}$, ο x = 1 , ο x = 3 , ο είναι αδύνατη.

5. α) Η εξίσωση $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$ είναι εκθετική εξίσωση. Σ ο Λ ο

β) Η εξίσωση $5^x - 7 \cdot \sqrt{5^x} + 6 = 0$ έχει λύση τη x = 0. Σ ο Λ ο

γ) Η εξίσωση $2^{x^2-4x+3} = \frac{1}{8}$ έχει δύο λύσεις στο R. Σ ο Λ ο

6. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α) $f_1(x) = 3^x$ και $f_2(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$,

β) $f_1(x) = e^x$ και $f_2(x) = e^{-x}$.

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3^{x+4} = 27$ δ) $\left(\frac{2}{7}\right)^{x+1} = \frac{49}{4}$ ζ) $(2^{x-4})^{x+1} = \frac{1}{2^6}$

β) $2^{x-1} = 8^{x+3}$ ε) $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} = \left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3}$ η) $3^{x^2-4x-3} = 9$

γ) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{3}$ στ) $2^{x^2-2x} = 8^{x-2}$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2^{x+2} + 2^{x-1} = 36$

β) $2^{x+3} - 2^{x-2} + 2^{x+1} = 48$
γ) $e^{2x} - 3 \cdot e^{x} + 2 = 0$.

9. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 2^{x} \cdot 2^{y-3} = 64 \\ 5^{2x-1} \cdot 5^{y-4} = 25 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2^{x} \cdot 4^{x+2y} = 32 \\ 5^{x-3y-1} = \dfrac{1}{25} \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2^{x} + 3^{y} = 11 \\ 2^{x} + 3^{y+1} = 29 \end{cases}$

10. Υποθέτουμε ότι κάθε φορά που πλένουμε τα χέρια μας με σαπούνι ξοδεύουμε το 3% της μάζας του. Αν το σαπούνι στην αρχή είχε μάζα 100 gr, να βρείτε:
α) Τη συνάρτησηη οποία δίνει τη μάζα του σαπουνιού που έχει μείνει ύστερα από x πλυσίματα.
β) Πόση μάζα σαπουνιού έχει μείνει μετά από 80 πλυσίματα;

11. Πυκνωτής έχει χωρητικότητα $C = 10^{-2}F$ και αρχίζει να εκφορτίζεται μέσα από αντίσταση R = 200Ω τη στιγμή t = 0. Το αρχικό του φορτίο Q_0 ήταν 5Cb. Το φορτίο του σε σχέση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση $Q = Q_0 e^{-t/RC}$.
Να βρείτε:
α) Πόσο είναι το φορτίο του τις στιγμές 0 sec, 2 sec, 4 sec, 10 sec, 12 sec.
β) Να δείξετε με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης σε βαθμολογημένους άξονες τη μείωση του φορτίου σε σχέση με το χρόνο.
γ) Από τη γραφική παράσταση να εκτιμήσετε πόσο χρόνο διαρκεί (πρακτικά) η εκφόρτιση του πυκνωτή.

12. Σε μια φθίνουσα ταλάντωση το πλάτος μειώνεται σύμφωνα με την εκθετική σχέση $α(t) = α_0 \cdot e^{-0,25t}$, όπου $α_0$ το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης και t ο χρόνος σε sec.
α) Αν είναι $α_0$ = 20cm, να βρείτε το πλάτος της μετά από 4sec, 8 sec, 12 sec, 20 sec.
β) Η συνολική ενέργεια Ε της ταλάντωσης είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του πλάτους α (δηλαδή, $E = C \cdot α^2$, όπου C σταθερά). Αν η αρχική συνολική ενέργεια ήταν E_0 = 4 Joule, να βρείτε την συνάρτηση E(t) που δίνει την συνολική ενέργεια μετά από χρόνο t sec. Να βρείτε επίσης την τιμή της συνολικής ενέργειας ύστερα από 2 sec.