ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

5.1 Φανταστικοί Αριθμοί

Όπως είναι γνωστό, το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι ένας αριθμός θετικός ή μηδέν. Έτσι, η εξίσωση $x^2+1=0$, η οποία γράφεται ισοδύναμα $x^2=-1$, δεν έχει λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η αντιμετώπιση εξισώσεων αυτής της μορφής χρειάζεται μια άλλη κατηγορία αριθμών, δηλαδή το σύνολο των αριθμών των οποίων τα τετράγωνα είναι αρνητικοί αριθμοί. Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **φανταστικοί αριθμοί**.

Την τετραγωνική ρίζα του -1 τη συμβολίζουμε με i, δηλαδή $\sqrt{-1}=i$ ή ισοδύναμα $i^2=-1$. Αυτός ο νέος αριθμός i λέγεται **φανταστική μονάδα**.

Ώστε: $i^2=-1$

Παραδείγματα:

- $\sqrt{-4}=\sqrt{(-1)\cdot 4}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{4}=i\cdot 2=2i$.
- $-\sqrt{-9}=-(3i)=-3i$.
- $\sqrt{-\frac{5}{2}}=i\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Μεταξύ των φανταστικών αριθμών γίνονται οι γνωστές, από τους πραγματικούς αριθμούς, πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, κλπ.). Έτσι:

1) $2i+7i=(2+7)i=9i$.
2) $\sqrt{7}\ i-2i=(\sqrt{7}-2)i$.
3) $(2i)\cdot(-3i)=-6\cdot i^2=-6(-1)=6$.
4) $i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot i=-i$, $i^{10}=(i^2)^5=(-1)^5=-1$.
5) $\frac{3i^3}{5i^5}=\frac{3}{5i^2}=-\frac{3}{5}$.

5.2 Μιγαδικοί Αριθμοί

Οι αριθμοί που έχουν τη μορφή α + βi, όπου α,β πραγματικοί αριθμοί, λέγονται μιγαδικοί αριθμοί .Για παράδειγμα, $2+3i$, $3-7i$, $-4+i$

- Αν α=0, τότε έχουμε αριθμούς της μορφής $0+\beta i=\beta i$, δηλαδή φανταστικούς.
- Αν β=0, τότε έχουμε αριθμούς της μορφής $\alpha+0i=\alpha$, δηλαδή πραγματικούς.

Ώστε, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών το οποίο συμβολίζουμε με **C** ανήκουν και οι πραγματικοί και οι φανταστικοί αριθμοί.

Ισότητα Μιγαδικών Αριθμών

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν α = γ και β = δ, δηλαδή:

$$\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \iff \alpha=\gamma \text{ και } \beta=\delta$$

Έτσι, με βάση τον παραπάνω ορισμό θα έχουμε και:

$$\alpha+\beta i=0 \iff \alpha=0 \text{ και } \beta=0$$

Σημείωση

Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, που ισχύουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών **R** εξακολουθούν να ισχύουν και στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών **C**. Όμως, η διάταξη και οι ιδιότητές της στο R δεν ισχύουν στο C. Έτσι, δεν έχει νόημα να λέμε ότι ο μιγαδικός $\alpha+\beta i$ είναι μεγαλύτερος (ή μικρότερος) από τον $\gamma+\delta i$.

5.3 Πράξεις στο Σύνολο C των Μιγαδικών Αριθμών

- Για την **πρόσθεση** δύο μιγαδικών αριθμών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$$

Για παράδειγμα, $(2+3i)+(7-5i)=(2+7)+(3-5)i=9-2i$.

- Για την **αφαίρεση** του μιγαδικού αριθμού $\gamma+\delta i$ από τον $\alpha+\beta i$, επειδή ο αντίθετος του $\gamma+\delta i$ είναι ο $-\gamma-\delta i$, έχουμε:

$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha+\beta i)+(-\gamma-\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i,$$

δηλαδή: $\boxed{(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i}$

Για παράδειγμα, $(2+8i)-(4-6i)=(2-4)+[8-(-6)]i=-2+14i$.

- Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών αριθμών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma+\delta i)&=\alpha(\gamma+\delta i)+\beta i(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+(\beta i)(\delta i)=\\&=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta=\\&=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i,\end{aligned}$$

δηλαδή, $\boxed{(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i}$

Για παράδειγμα,
$$\begin{aligned}(2+3i)(6-5i)&=2(6-5i)+3i(6-5i)=12-10i+18i-15i^2=\\&=12-10i+18i+15=(12+15)+(18-10)i=\\&=27+8i.\end{aligned}$$

Οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής $\alpha+\beta i$ και $\alpha-\beta i$ λέγονται **συζυγείς μιγαδικοί**. Για παράδειγμα, οι $2-3i$ και $2+3i$ είναι συζυγείς όπως και οι $-2+3i$, $-2-3i$. Για το γινόμενό τους ισχύει:

$$(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2-\beta^2 i^2=\alpha^2-\beta^2(-1)=\alpha^2+\beta^2$$

δηλαδή το γινόμενο δύο συζυγών μιγαδικών είναι πραγματικός αριθμός
για παράδειγμα $(-2+3i)\cdot(-2-3i)=(-2)^2+3^2=4+9=13$.

Το συζυγή ενός μιγαδικού αριθμού z τον συμβολίζουμε με $\bar{z}$.

- Τέλος, για να εκφράσουμε το **πηλίκο** δύο μιγαδικών στη μορφή $\alpha+\beta i$, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή. Για παράδειγμα,

$$\frac{2+3i}{4-5i}=\frac{(2+3i)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)}=\frac{8+10i+12i+15i^2}{4^2+5^2}=\frac{8+22i-15}{16+25}=\frac{-7+22i}{41}=$$
$$=\frac{-7}{41}+\frac{22}{41}i.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β, ώστε οι μιγαδικοί $z_1=(\alpha-3)+2i$ και $z_2=(2\alpha-\beta-1)+(\alpha+\beta)i$ να είναι ίσοι.

Λύση

Οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι ίσοι, αν και μόνο αν :

$$\begin{Bmatrix}\alpha-3=2\alpha-\beta-1\\ \alpha+\beta=2\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\beta-\alpha=2\\ \alpha+\beta=2\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}2\beta=4\\ \alpha+\beta=2\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\beta=2\\ \alpha=0\end{Bmatrix}$$

Άρα, β = 2 και α = 0.Πράγματι αν α=0 και β=2 είναι $z_1=z_2=-3+2i$.

2. Να λυθεί η εξίσωση $x^2-3x+3=0$.

Λύση

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:
$\Delta=\beta^2-4\gamma=(-3)^2-4\cdot1\cdot3=9-12=-3<0$

Με αντικατάσταση στους γνωστούς μας τύπους $x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ έχουμε:

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{-3}}{2\cdot1}=\frac{3\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Επομένως, οι λύσεις είναι $x=\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ή $x=\dfrac{3-i\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κάνετε τις πράξεις που σημειώνονται και να γράψετε το αποτέλεσμα στη μορφή $\alpha + \beta i$:

i) (2+3i) + (-2+3i)
ii) (2-5i) - (7+6i)
iii) (3-2i)+(-4-6i)-(2+4i)
iv) (2+5i)(3-2i)
v) 5i(4+i)
vi) i(2-i)(4-3i) .

2. Να βρείτε τους συζυγείς των μιγαδικών :

i) 5+7i   iv) -8
ii) –3-4i   v) -i
iii) –3i   iv) 0 .

3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β, έτσι ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

i) (α-β)+βi = 1+2i   ii) (α+3β-5)+(5-4β)i=0 .

4. Αν $z_1 = 2 - i$ και $z_2 = 3 + 2i$, να βρείτε τους μιγαδικούς $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_1^2}{z_2^2}$.

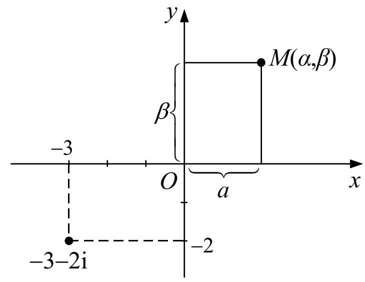
5. Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z, για τον οποίο ισχύει $2iz - 3\overline{z} = -7 + 4i$.

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

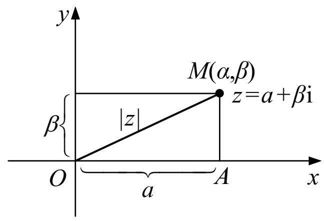
i) $x^2 - 3x + 1 = 0$ ii) $x^2 - 6x + 10 = 0$.

5.4 Γεωμετρική παράσταση – Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού

Σε κάθε μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το σημείο Μ με συντεταγμένες (α,β) ενός καρτεσιανού επιπέδου και αντίστροφα. Το σημείο Μ λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού α + βi. Ο οριζόντιος άξονας λέγεται **πραγματικός άξονας** και ο κατακόρυφος λέγεται **φανταστικός άξονας**.



Η απόσταση του σημείου Μ (α,β), που είναι η εικόνα του μιγαδικού $z = \alpha + \beta i$, από την αρχή Ο(0,0) λέγεται **μέτρο** του μιγαδικού z, συμβολίζεται με $|z|$ και ισούται με $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ όπως προκύπτει από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ.



Δηλαδή $|z| = |\alpha + \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Για παράδειγμα,

αν $z_1 = 2 - 3i$, τότε $|z_1| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

ενώ αν $z_2 = -5i$, τότε $|z_2| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Για το μέτρο μιγαδικού αριθμού ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

Αν $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ και $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$, τότε:

I) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

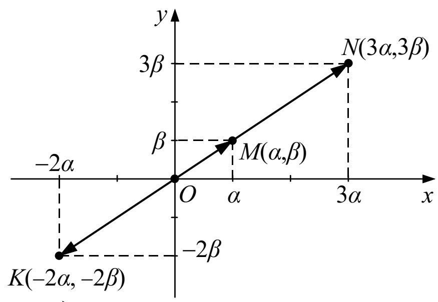
II) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$

III) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ και $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z. Να παραστήσετε στο επίπεδο τους μιγαδικούς 3z και –2z.

Λύση



Έστω $z = \alpha + \beta i$, M (α,β) η εικόνα του μιγαδικού z και $\overrightarrow{OM}(\alpha,\beta)$ το διάνυσμα θέσης του σημείου M. Τότε $3z = 3(\alpha + \beta i) = 3\alpha + 3\beta i$. Αν N(3α, 3β) η εικόνα του 3z, τότε το διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{ON}$ του N θα έχει συντεταγμένες (3α, 3β) και, συνεπώς, $\overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{OM}$ δηλαδή τα σημεία O, M, N είναι συνευθειακά. Όμοια η εικόνα K(-2α, -2β) του μιγαδικού –2z θα βρίσκεται στην ίδια ευθεία με τα σημεία N και M.

2. Σ' ένα κύκλωμα RLC, η σύνθετη αντίσταση z του κυκλώματος δίδεται από τον τύπο $z = R + \left(L\omega - \dfrac{1}{c\omega}\right)i$. Να βρεθεί το μέτρο της σύνθετης αντίστασης του κυκλώματος, αν R = 100Ω, $c = 5 \cdot 10^{-6}$ μF, L = 0,4mH και ω =100π Hz.

Λύση

Το μέτρο της σύνθετης αντίστασης z του κυκλώματος ισούται με:

$|z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{c\omega}\right)^2}$. Με αντικατάσταση στον παραπάνω τύπο θα έχουμε:

$$|z| = \sqrt{100^2 + \left(0{,}4 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{5 \cdot 100\pi}\right)^2} = 521{,}03\,\Omega.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τις εικόνες των μιγαδικών:
i) 2+3i iv) –2-3i
ii) 2-3i v) -i
iii) –2+3i vi) –4.

2. Αν $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 3+4i$, να βρείτε τις εικόνες των μιγαδικών $z_1 + z_2$ και $z_1 - z_2$.

3. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών:
i) 1+i ii) 1-i iii) –2i
iv)-5 v) $\dfrac{2+i}{2-i}$ vi) $(3-i)(2+i)$.

4. Αν $z = 2+3xi$, $x \in R$ και $|z| = \sqrt{13}$, να βρεθεί ο αριθμός x.

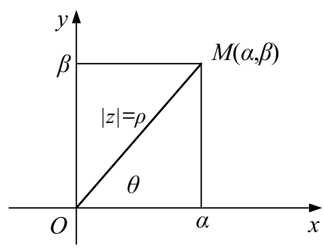
5. Να δείξετε ότι $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

6. Αν $z = x+iy$ και ο αριθμός $\kappa = (z-1)(\bar{z}-1)$ είναι πραγματικός, να βρείτε τους αριθμούς x,y.

5.5 Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Για να εργαζόμαστε αποτελεσματικότερα με δυνάμεις μιγαδικών, αλλά και για να πολλαπλασιάζουμε ή να διαιρούμε μιγαδικούς αριθμούς, είναι χρήσιμο να γράφουμε τους μιγαδικούς αριθμούς στη λεγόμενη **τριγωνομετρική μορφή**.

Έστω ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i \neq 0$, α,β πραγματικοί αριθμοί και Μ η εικόνα του. Κάθε γωνία θ με αρχική πλευρά την Οx και τελική πλευρά την ΟΜ ονομάζεται **όρισμα** του μιγαδικού αριθμού z. Αν $0 \le \theta < 2\pi$ η γωνία θ ονομάζεται **πρωτεύον** όρισμα του μιγαδικού z.



Αν $\rho = |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ το μέτρο του, τότε από τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών σε ορθοκανονικό σύστημα θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\alpha}{\rho} \\ \eta\mu\theta = \dfrac{\beta}{\rho} \end{array}\right\} \quad \acute{\eta} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha = \rho\sigma\upsilon\nu\theta \\ \beta = \rho\eta\mu\theta \end{array}\right\}.$$

Έτσι, ο μιγαδικός αριθμός z μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$z = \alpha + \beta i = \rho\ \sigma\upsilon\nu\theta + \rho\ \eta\mu\theta i,$$

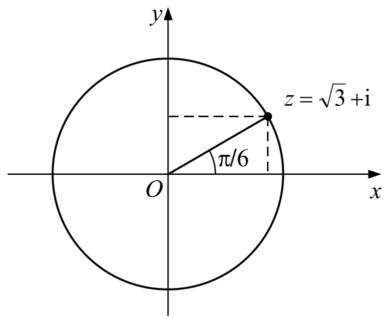
δηλαδή: $\boxed{\mathbf{z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\ \eta\mu\theta)}}$

Ο τρόπος αυτός γραφής ενός μιγαδικού z λέγεται **τριγωνομετρική μορφή του z**.

Για παράδειγμα, αν $z = \sqrt{3} + i$, τότε $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ και για τη γωνία θ έχουμε:

$\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $\eta\mu\theta = \dfrac{1}{2}$. Επειδή συνθ>0 και ημθ>0, η γωνία θ είναι οξεία και μάλιστα $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Άρα, $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6} + i\eta\mu\theta\dfrac{\pi}{6}\right)$.



Η τριγωνομετρική μορφή διευκολύνει στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση μιγαδικών. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τους μιγαδικούς $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$, τότε:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \cdot \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)\cdot(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2) = \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2[(\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2 - \eta\mu\theta_1\eta\mu\theta_2) + i(\sigma\upsilon\nu\theta_1\eta\mu\theta_2 + \sigma\upsilon\nu\theta_2\eta\mu\theta_1)] \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2[\sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2) + i\eta\mu(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

Εργαζόμενοι ανάλογα για το πηλίκο $\dfrac{z_1}{z_2}$ βρίσκουμε ότι:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\sigma\upsilon\nu(\theta_1 - \theta_2) + i\eta\mu(\theta_1 - \theta_2)].$$

Ώστε:

Αν $z_1=\rho_1(\sigmaυν\theta_1+i\etaμ\theta_1)$ και $z_2=\rho_2(\sigmaυν\theta_2+i\etaμ\theta_2)$ είναι δύο μιγαδικοί σε τριγωνομετρική μορφή, τότε:

$$z_1\cdot z_2=\rho_1\cdot\rho_2[\sigmaυν(\theta_1+\theta_2)+i\etaμ(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\sigmaυν(\theta_1-\theta_2)+i\etaμ(\theta_1-\theta_2)].$$

Για παράδειγμα, αν $z_1=3\left(\sigmaυν\frac{\pi}{3}+i\etaμ\frac{\pi}{3}\right)$ και $z_2=4\left(\sigmaυν\frac{\pi}{6}+i\etaμ\frac{\pi}{6}\right)$, τότε

$$z_1\cdot z_2=3\cdot4\left[\sigmaυν\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\etaμ\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]=12\left(\sigmaυν\frac{\pi}{2}+i\etaμ\frac{\pi}{2}\right)=12(0+i)=12i$$

και

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3}{4}\left[\sigmaυν\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+i\etaμ\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{3}{4}\left(\sigmaυν\frac{\pi}{6}+i\etaμ\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{3}{8}i.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το μιγαδικό z σε τριγωνομετρική μορφή δηλαδή $z=\rho(\sigmaυν\theta+i\etaμ\theta)$, και ας υπολογίσουμε τις δυνάμεις z^2, z^3, z^4. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, θα έχουμε :

$$z^2=z\cdot z=\rho(\sigmaυν\theta+i\etaμ\theta)\cdot\rho(\sigmaυν\theta+i\etaμ\theta)=\rho^2\left[\sigmaυν(\theta+\theta)+i\etaμ(\theta+\theta)\right]=$$

$$=\rho^2(\sigmaυν2\theta+i\etaμ2\theta).$$

$$z^3=z^2\cdot z=\rho^2(\sigmaυν2\theta+i\etaμ2\theta)\cdot\rho(\sigmaυν\theta+i\etaμ\theta)=\rho^3(\sigmaυν3\theta+i\etaμ3\theta).$$

Ομοίως, βρίσκουμε ότι

$$z^4=\rho^4(\sigmaυν4\theta+i\etaμ4\theta).$$

Επαγωγικά οδηγούμαστε σ' ένα γενικό αποτέλεσμα το οποίο είναι γνωστό ως **Θεώρημα του De Moivre**.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$ είναι ένα μιγαδικός σε τριγωνομετρική μορφή και ν ένας θετικός ακέραιος, τότε:

$$z^{\nu}=\rho^{\nu}[\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)+i\eta\mu(\nu\theta)]$$

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε τη δύναμη $(\sqrt{3}+i)^{30}$, εργαζόμαστε ως εξής:

Γράφουμε πρώτα το μιγαδικό $\sqrt{3}+i$ σε τριγωνομετρική μορφή. Έχουμε βρει ότι $\sqrt{3}+i=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}+i\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)$, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα του De Moivre, θα έχουμε: $\left(\sqrt{3}+i\right)^{30}=\left[2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}+i\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)\right]^{30}=2^{30}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{30\pi}{6}+i\eta\mu\frac{30\pi}{6}\right)=$

$$=2^{30}(\sigma\upsilon\nu5\pi+i\eta\mu5\pi)=2^{30}\left[\sigma\upsilon\nu(4\pi+\pi)+i\eta\mu(4\pi+\pi)\right]=$$

$$=2^{30}(\sigma\upsilon\nu\pi+i\eta\mu\pi)=2^{30}(-1+0)=-2^{30}\ .$$

Σημείωση

Το θεώρημα του De Moivre ισχύει και όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός ακέραιος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν $z_1=1+i$ και $z_2=1-\sqrt{3}i$, να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς:

i) z_1z_2 ii) $\frac{z_2}{z_1}$ iii) $\frac{{z_2}^3}{{z_1}^4}$.

Λύση

Έχουμε $|z_1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\eta\mu\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα $\theta=\frac{\pi}{4}$. Επομένως $z_1=\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+i\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)$.

Επίσης $|z_2|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$, $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}$ και $\eta\mu\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Επειδή συνθ>0 και ημθ<0, θα είναι $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ και μάλιστα $\theta = \frac{5\pi}{3}$. Άρα, $z_2 = 2\left(\text{συν}\frac{5\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{5\pi}{3}\right)$.

Έχουμε τώρα:

i) $$z_1 z_2 = \sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4} + i\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\text{συν}\frac{5\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{5\pi}{3}\right) =$$
$$= 2\sqrt{2}\left[\text{συν}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3}\right)\right] =$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{23\pi}{12} + i\text{ημ}\frac{23\pi}{12}\right).$$

ii) $$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2\left(\text{συν}\frac{5\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{5\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4} + i\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\text{συν}\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2}\left(\text{συν}\frac{17\pi}{12} + i\text{ημ}\frac{17\pi}{12}\right) = 2\left(\text{συν}\frac{17\pi}{12} + i\text{ημ}\frac{17\pi}{12}\right).$$

iii) Για την εύρεση του $\frac{z_2^{\,3}}{z_1^{\,4}}$, θα βρούμε πρώτα τις δυνάμεις $z_2^{\,3}$ και $z_1^{\,4}$ και στη συνέχεια το πηλίκο τους.

Είναι: $$z_2^{\,3} = \left[2\left(\text{συν}\frac{5\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{5\pi}{3}\right)\right]^3 = 2^3\left(\text{συν}\frac{15\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{15\pi}{3}\right) =$$
$$= 8(\text{συν}5\pi + i\text{ημ}5\pi) \text{ και}$$
$$z_1^{\,4} = \left[\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4} + i\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)\right]^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(\text{συν}\frac{4\pi}{4} + i\text{ημ}\frac{4\pi}{4}\right) =$$
$$= 4(\text{συν}\pi + i\text{ημ}\pi).$$

Άρα: $$\frac{z_2^{\,3}}{z_1^{\,4}} = \frac{8(\text{συν}5\pi + i\text{ημ}5\pi)}{4(\text{συν}\pi + i\text{ημ}\pi)} = \frac{8}{4}\left[\text{συν}(5\pi - \pi) + i\text{ημ}(5\pi - \pi)\right] =$$
$$= 2(\text{συν}4\pi + i\text{ημ}4\pi) = 2(1 + 0\cdot i) = 2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς:

i) 2i ii) –5 iii) 1+i iv) 1-i v) –1+i

2. Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς:

i) (2+i)(3+i) ii) $\dfrac{-1-7i}{3-4i}$

3. Να κάνετε τις πράξεις :

i) $2(\text{συν}15^\circ + i\text{ημ}15^\circ)\cdot 6(\text{συν}30^\circ + i\text{ημ}30^\circ)$

ii) $3(\text{συν}\dfrac{\pi}{8} + i\text{ημ}\dfrac{\pi}{8})\cdot 4(\text{συν}\dfrac{3\pi}{8} + i\text{ημ}\dfrac{3\pi}{8})$

iii) $\dfrac{5(\text{συν}160^\circ + i\text{ημ}160^\circ)}{2(\text{συν}100^\circ + i\text{ημ}100^\circ)}$.

4. Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$ τους μιγαδικούς :

i) $3\left(\text{συν}\dfrac{\pi}{6} + i\text{ημ}\dfrac{\pi}{6}\right)$ ii) $(\text{συν}2\pi + i\text{ημ}2\pi)$ iii) $4\left(\text{συν}\dfrac{3\pi}{2} + i\text{ημ}\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

5. Να βρείτε τις δυνάμεις:

i) $\left[3(\text{συν}20^\circ + i\text{ημ}20^\circ)\right]^3$ ii) $\left[2\left(\text{συν}\dfrac{5\pi}{4} + i\text{ημ}\dfrac{5\pi}{4}\right)\right]^8$.

6. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Να βρεθεί ο z^{150} και ο z^{301}.

7. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = (1+i)^{20} - (1-i)^{20}$.

8. Αν $z = 2 + i$, να βρεθεί ο $(z-1)^8$.