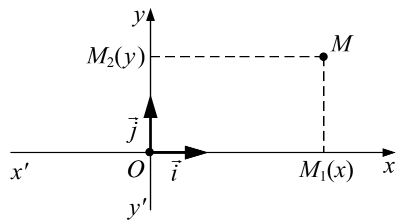
Καρτεσιανό επίπεδο – Συντεταγμένες σημείου

Σ' ένα επίπεδο παίρνουμε δύο κάθετους άξονες x΄x και y΄y με κοινή αρχή O και μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντίστοιχα, που έχουν το ίδιο μήκος. Οι δύο



αυτοί άξονες λέμε ότι ορίζουν ένα **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.** Το σύστημα αυτό το συμβολίζουμε $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ή Oxy. Ο άξονας x΄x λέγεται **άξονας των τετμημένων** και ο άξονας y΄y λέγεται **άξονας των τεταγμένων**.

Έστω τώρα σημείο Μ του επιπέδου. Από το Μ φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τους άξονες, οι οποίες τους τέμνουν στα σημεία M_1 και M_2.

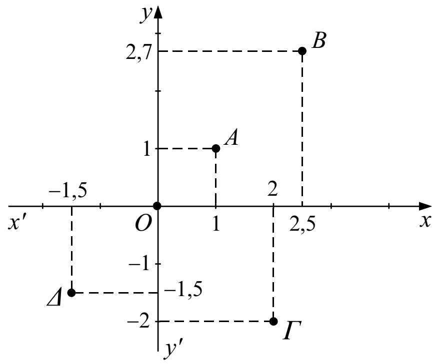
Αν συμβολίσουμε με x και y τους μοναδικούς αριθμούς που αντιστοιχούν στα σημεία M_1 και M_2 αντίστοιχα, τότε :

- Ο αριθμός x λέγεται **τετμημένη** του σημείου Μ,
- ο αριθμός y λέγεται **τεταγμένη** του σημείου Μ.

Η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου Μ λέγονται **συντεταγμένες** του Μ. Με τη διαδικασία που περιγράψαμε πιο πάνω, σε κάθε σημείο Μ του επιπέδου αντιστοιχεί ακριβώς ένα διατεταγμένο ζεύγος (x,y) συντεταγμένων. Αλλά και αντιστρόφως, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο Μ του επιπέδου που έχει τετμημένη x και τεταγμένη y. Αυτό το σημείο το ορίζουμε ως εξής: Πάνω στους άξονες x΄x και y΄y παίρνουμε τα σημεία M_1 και M_2 τα οποία έχουν τετμημένη x και τεταγμένη y αντίστοιχα. Από τα σημεία αυτά φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τους άξονες. Το σημείο τομής αυτών των ευθειών είναι το ζητούμενο σημείο Μ. Ένα σημείο Μ που έχει τετμημένη x και τεταγμένη y συμβολίζεται με Μ(x,y).

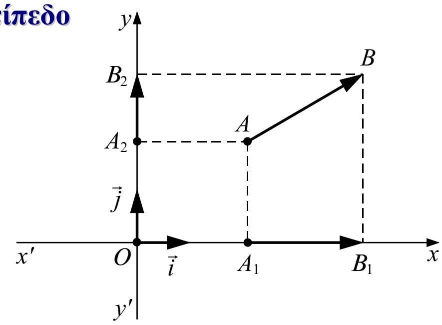
Παράδειγμα:

Στο διπλανό σχήμα είναι:
Α(1,1) , Β(2,5 , 2,7) Γ(2, -2)
Δ(-1,5, -1,5).



Συντεταγμένες διανύσματος στο επίπεδο

Έστω $\overrightarrow{AB}$ ένα διάνυσμα του επιπέδου. Από τα Α και Β φέρουμε τις κάθετες προς τους δύο άξονες. Κατ' αυτό τον τρόπο πάνω στον x΄x ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{A_1B_1}$ και στον y΄y ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{A_2B_2}$.



(Στην περίπτωση που είχαμε το $\overrightarrow{BA}$, θα ορίζονταν στους άξονες με την παρακάτω διαδικασία τα $\overrightarrow{B_1A_1}$ και $\overrightarrow{B_2A_2}$).

Επειδή $\overrightarrow{A_1B_1} // \vec{i}$ και $\overrightarrow{A_2B_2} // \vec{j}$ θα έχουμε: $\overrightarrow{A_1B_1} = x \cdot \vec{i}$ και $\overrightarrow{A_2B_2} = y \cdot \vec{j}$. Όμως $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2}$ (κανόνας παραλληλογράμμου), έτσι

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$.

Ο x λέγεται **τετμημένη** του $\overrightarrow{AB}$ και ο y **τεταγμένη** του $\overrightarrow{AB}$. Και οι δύο αποτελούν τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{AB}$ και γράφουμε $\overrightarrow{AB}$(x,y) ή $\overrightarrow{AB}$=(x,y). Έτσι, αν $\overrightarrow{AB}$=(5,-2), αυτό σημαίνει ότι $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$.

Τα διανύσματα $x\vec{i}$ και $y\vec{j}$ λέγονται **συνιστώσες** του $\overrightarrow{AB}$ κατά τη διεύθυνση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντίστοιχα.

Αποδεικνύεται ότι:

> Σε κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ αντιστοιχεί ένα και μόνο ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y), οι συντεταγμένες του και ισχύει $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $x, y \in R$.

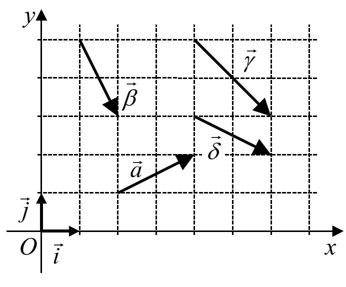
Έτσι, **δύο διανύσματα του επιπέδου είναι ίσα, αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες.**

Αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες του αθροίσματος $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, του γινομένου $\lambda\vec{\alpha}$, $\lambda \in R$, αλλά και κάθε γραμμικού συνδυασμού $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}, \lambda, \mu \in R$ αυτών των διανυσμάτων. Πράγματι, αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2 y_2)$, τότε:

- $\vec{\alpha}+\vec{\beta} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$,
  δηλαδή οι συντεταγμένες του αθροίσματος δύο διανυσμάτων είναι ίσες με το άθροισμα των αντίστοιχων συντεταγμένων τους.
- $\lambda\vec{\alpha} = \lambda(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = \lambda x_1\vec{i} + \lambda y_1\vec{j}$,
  δηλαδή οι συντεταγμένες του διανύσματος $\lambda\vec{\alpha}$ είναι ίσες με το γινόμενο του λ επί τις αντίστοιχες συντεταγμένες του $\vec{\alpha}$.
- Εργαζόμενοι ανάλογα βρίσκουμε και τις συντεταγμένες του διανύσματος $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}, \lambda, \mu \in R$.
  Είναι: $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \lambda(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + \mu(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = (\lambda x_1 + \mu x_2)\vec{i} + (\lambda y_1 + \mu y_2)\vec{j}$,
  δηλαδή $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$.

Σημείωση: Είναι φανερό ότι, αν η τετμημένη ενός διανύσματος $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ είναι μηδέν τότε $\vec{\alpha}$ // y΄y, ενώ, αν η τεταγμένη του είναι μηδέν, τότε $\vec{\alpha}$ // x΄x.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ



Στο διπλανό σχήμα:

1) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$, $-\vec{\alpha}$, $-\vec{\beta}$, $-\vec{\gamma}$, $-\vec{\delta}$, καθώς και των διανυσμάατων $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\vec{\gamma} - 3\vec{\delta}$.
2) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

Λύση

1) $\vec{\alpha}$=(2,1), άρα $-\vec{\alpha}$=(-2,-1), $\vec{\beta}$=(1,-2) , $-\vec{\beta}$=(-1,2) , $\vec{\gamma}$=(2,-2), $-\vec{\gamma}$ =(2,-2) ,
$\vec{\delta}$=(2,-1) , $-\vec{\delta}$=(-2,1).
$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$ = (2, 1)+(-1, 2)=(2 -1, 1+2) = (1, 3).
2$\vec{\alpha}$ +3$\vec{\beta}$=2 (2 , 1) + 3(1 ,-2) = (4 , 2) + (3 ,-6) = (4+3 , 2-6) = (7 , -4).
$\vec{\gamma}$ -3$\vec{\delta}$= $\vec{\gamma}$+(-3$\vec{\delta}$)=(2 , -2) + [-3 (2) , -3 (-1)] = (2 ,-2) +(-6,3) = (2-6 , -2+3) =
= (-4,1).

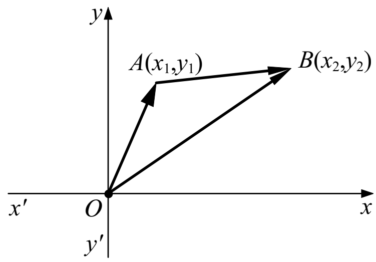
2) Το διάνυσμα $\vec{\beta}$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$, όταν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ,λ και ισχύει $\vec{\beta}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\gamma}$. (1)
Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τους αριθμούς κ και λ.
Από το πρώτο ερώτημα βρήκαμε ότι:
$\vec{\alpha}$=(2 , 1) , $\vec{\beta}$= (1, -2) και $\vec{\gamma}$= (2 , -2).
Έτσι, κ$\vec{\alpha}$ =κ(2 , 1) = (2κ , k) και λ$\vec{\beta}$=λ (1,-2) = (λ,-2λ),
άρα κ$\vec{\alpha}$ +λ$\vec{\beta}$= (2κ , 1) + (λ , -2λ) = (2κ +λ , 1-2λ).
Επομένως η (1) γράφεται:

(1,-2) = (2κ +λ , 1-2λ) ή
2κ + λ = 1 **(α)** και 1-2λ = -2 **(β)**.

Από τη **(β)** βρίσκουμε ότι $\lambda=\frac{3}{2}$ και από την **(α)** θα έχουμε $2\kappa+\frac{3}{2}=1$
$\Leftrightarrow\ 2\kappa=1-\frac{3}{2}\ \Leftrightarrow\ 2\kappa=-\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow \kappa=-\frac{1}{4}$. Άρα $\vec{\beta}=-\frac{1}{4}\vec{\alpha}+\frac{3}{2}\vec{\gamma}$.

Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι με τη βοήθεια δύο μη συγγραμμικών διανυσμάτων μπορεί να εκφραστεί κατά τρόπο **μοναδικό** ένα οποιοδήποτε διάνυσμα του επιπέδου που ορίζουν αυτά.

Συντεταγμένες διανύσματος του οποίου γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των άκρων του.



Έστω διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, του οποίου τα άκρα έχουν συντεταγμένες $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Τότε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ **(1)**. Όμως $\overrightarrow{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ και $\overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$. Έτσι,από τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$\overrightarrow{AB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) =$$
$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}.$$

Επομένως, για τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ θα έχουμε:

τετμημένη $\overrightarrow{AB}$ = τετμημένη Β - τετμημένη Α

τεταγμένη $\overrightarrow{AB}$ = τεταγμένη Β - τεταγμένη Α

Παράδειγμα

Αν A(2 , -3) και B(-2,8), τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχει συντεταγμένες:

$$x = x_B - x_A = -2 - 2 = -4,$$
$$y = y_B - y_A = 8 - (-3) = 8 + 3 = 11,$$

δηλαδή $\overrightarrow{AB}$ = (-4, 11). Το $\overrightarrow{BA}$ έχει συντεταγμένες :

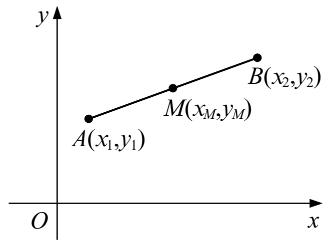
$$x' = x_A - x_B = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$$
$$y' = y_A - y_B = -3 - 8 = -11$$

δηλαδή $\overrightarrow{BA}$ = (4, -11), κάτι που αναμενόταν, αφού τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BA}$ είναι αντίθετα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Μ ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, αν είναι γνωστές οι συντεταγμένες των άκρων του.

Λύση



Έστω (x_1, y_1) και (x_2, y_2) οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β αντίστοιχα και (x_M, y_M) οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ. Έχουμε:

Συντεταγμένες $\overrightarrow{AM}$: $x = x_M - x_A = x_M - x_1$,
$y = y_M - y_A = y_M - y_1$.

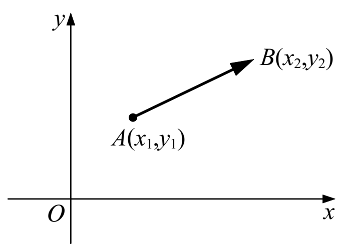
Συντεταγμένες $\overrightarrow{MB}$: $x' = x_B - x_M = x_2 - x_M$,
$y' = y_B - y_M = y_2 - y_M$.

Επειδή $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ τότε $(x_M - x_1, y_M - y_1) = (x_2 - x_M, y_2 - y_M)$

ή $\begin{cases} x_M - x_1 = x_2 - x_M \\ y_M - y_1 = y_2 - y_M \end{cases}$ ή $\begin{cases} 2x_M = x_1 + x_2 \\ 2y_M = y_1 + y_2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$

Ώστε : $\boxed{x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}}$

Μέτρο διανύσματος



Έστω ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ τα άκρα του οποίου Α,Β έχουν συντεταγμένες (x_1, y_1) και (x_2, y_2) αντίστοιχα. Τότε οι συντεταγμένες (x, y) του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι : $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$.

Όπως μας είναι γνωστό από προηγούμενη τάξη, η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, που συμβολίζουμε με (ΑΒ), δίνεται από τον τύπο :

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \textbf{(1)}$$

Επειδή όμως (ΑΒ) = $|\overrightarrow{AB}|$, $x_2 - x_1 = x$ και $y_2 - y_1 = y$, όπου (x, y) οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, ο παραπάνω τύπος παίρνει τη μορφή:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Ώστε:

Το μέτρο ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$ με συντεταγμένες (x, y) ισούται με την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των συντεταγμένων του, δηλαδή $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ με Α(-1 , -2) και Β (2, -3) .

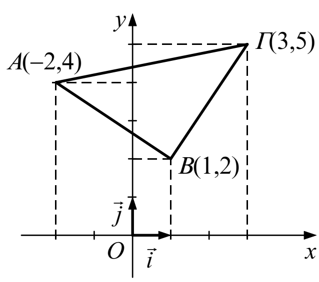
Λύση

Θα βρούμε πρώτα τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τον τύπο **(2)** . Οι συντεταγμένες (x, y) του $\overrightarrow{AB}$ είναι :

$x = x_B - x_A = 2 - (-1) = 3$ και $y = y_B - y_A = -3 - (-2) = -1$, δηλαδή $\overrightarrow{AB}$ = (3, -1), άρα $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.

2. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με Α (-2, 4) , Β(1, 2) και Γ (3, 5) είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Λύση



Αρχικά θα υπολογίσουμε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου και στη συνέχεια θα κάνουμε τις ανάλογες συγκρίσεις.

Έχουμε από τον τύπο **(1)** :

$$(AB)=\sqrt{(1-(-2))^2+(2-4)^2}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$
$$(A\Gamma)=\sqrt{(3-(-2))^2+(5-4)^2}=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$$
$$(B\Gamma)=\sqrt{(3-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\,.$$

- Αφού (ΑΒ) = (ΒΓ), το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
- Είναι $(A\Gamma)^2=(\sqrt{26})^2=26$

  $(AB)^2+(B\Gamma)^2=(\sqrt{13})^2+(\sqrt{13})^2=13+13=26$

Δηλαδή, $(A\Gamma)^2=(AB)^2+(B\Gamma)^2$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και μάλιστα $\hat{B}=90^o$.

Συνθήκη παραλληλίας δύο διανυσμάτων

Έστω δυο συγγραμικά διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ με $x_2\neq 0$ και $y_2\neq 0$. Αφού τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά, συνδέονται με τη σχέση $\vec{\alpha}=\kappa\vec{\beta}$, $\kappa\in R$, η οποία γράφεται ισοδύναμα: $(x_1,y_1)=\kappa(x_2,y_2)$ ή $(x_1,y_1)=(\kappa x_2,\kappa y_2)$

ή $\begin{cases} x_1=\kappa x_2 \\ y_1=\kappa y_2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2}=\kappa \\ \dfrac{y_1}{y_2}=\kappa \end{cases}$, άρα $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$ (1) .

Ώστε: $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$, αν και μόνο αν $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$ με $x_2\neq 0$ και $y_2\neq 0$

Δηλαδή, δύο διανύσματα είναι παράλληλα, όταν οι ομώνυμες συντεταγμένες τους είναι ανάλογες.

Παράδειγμα:

- Τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-3)$ και $\vec{\beta}=(-4,\ 6)$ είναι παράλληλα, αφού $\dfrac{2}{-4}=\dfrac{-3}{6}=-\dfrac{1}{2}$,

- ενώ τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,\ 5)$ και $\vec{\beta}=(2,\ -1)$ δεν είναι παράλληλα, αφού $\frac{3}{2}\neq\frac{5}{-1}$.

Αν τα συγγραμικά διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ δεν είναι παράλληλα στον y΄y, δηλαδή, όταν $x_1\neq 0$ και $x_2\neq 0$, τότε η σχέση (1) μπορεί να γραφεί, σύμφωνα με γνωστή ιδιότητα των αναλογιών, και ως εξής: $\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_1}{x_1}$

δηλαδή $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$, αν και μόνο αν $\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_1}{x_1}$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο λόγος $\lambda=\frac{y_1}{x_1}$ της τεταγμένης προς την τετμημένη ενός διανύσματος $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ με $x_1\neq 0$ καθορίζει και τη διεύθυνσή του, αφού, κάθε άλλο διάνυσμα $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ με $\frac{y_2}{x_2}=\lambda$ έχει την ίδια διεύθυνση με το $\vec{\alpha}$. Ο λόγος $\lambda=\frac{y_1}{x_1}$ λέγεται **συντελεστής διεύθυνσης** του διανύσματος $\vec{\alpha}$. Έτσι, η συνθήκη παραλληλίας δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα διατυπώνονται ως εξής:

$\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$, αν και μόνο αν $\lambda_1=\lambda_2$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός μ, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,\ \mu)$ και $\vec{\beta}=(4,\ \mu-1)$ να είναι παράλληλα.

Λύση

Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=\frac{\mu}{2}$ και το $\vec{\beta}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2=\frac{\mu-1}{4}$. Είναι $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$ αν και μόνο αν $\lambda_1=\lambda_2$ $\Leftrightarrow$ $\frac{\mu}{2}=\frac{\mu-1}{4}$ $\Leftrightarrow$ $4\mu=2(\mu-1)$ $\Leftrightarrow$ $4\mu=2\mu-2$ $\Leftrightarrow$ $4\mu-2\mu=-2$ $\Leftrightarrow$ $2\mu=-2$ $\Leftrightarrow$ $\mu=-1$.

2. Να βρεθεί η τιμή του , $\mu \in R$ ώστε τα σημεία Α (1, 0) , Β(μ, 3) και Γ (2μ, -1) να είναι συνευθειακά.

Λύση

Τα σημεία Α, Β, Γ θα είναι συνευθειακά, όταν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι παράλληλα.

Οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{AB}$ είναι $\overrightarrow{AB}$=(μ-1, 3-0) = (μ-1, 3)

και οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι $\overrightarrow{B\Gamma}$=(2μ-μ, -1-3) = (μ,-4).

Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = \dfrac{3}{\mu-1}$, $\mu \neq 1$, ενώ το $\overrightarrow{B\Gamma}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = \dfrac{-4}{\mu}$, $\mu \neq 0$.

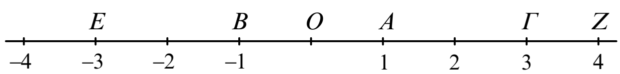
Έτσι, $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{3}{\mu-1} = \dfrac{-4}{\mu} \Leftrightarrow 3\mu = -4(\mu-1) \Leftrightarrow 3\mu = -4\mu + 4 \Leftrightarrow 7\mu = 4$

$$\Leftrightarrow \mu = \frac{4}{7}.$$

Αν μ=1 θα είναι $\overrightarrow{AB}$ // y΄y, ενώ αν μ = 0 θα είναι $\overrightarrow{B\Gamma}$ // y΄y.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν τα μέτρα των διανυσμάτων : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma E}$, $\overrightarrow{EZ}$.



2. Να σημειωθούν σε σύστημα συντεταγμένων τα σημεία Α(2, -1) , Β(0, 4), $\Gamma(-\frac{1}{2}, -3)$, Δ(-5, -2) , Ε (-3, 0) , $Z(-\frac{1}{2}, 0)$.

3. Να παραστήσετε σ' ένα σύστημα αξόνων τα σημεία που έχουν διανύσματα θέσης:

(α) $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 2\vec{j}$ (β) $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ (γ) $\overrightarrow{O\Gamma} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$.

4. Να βρεθούν οι τιμές των λ,μ $\in R$, για τις οποίες τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (μ-1, 4λ) και $\vec{\beta}$ =(3,λ+1) είναι ίσα.

5. Αν $\vec{\alpha} = \vec{i} - 3\vec{j}$ και $\vec{\beta} = 3\vec{i} + \vec{j}$, να βρεθούν τα διανύσματα:

(i) $\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$ (ii) $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ (iii) $3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ (iv) $-2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

6. Αν A(3, -2) , B (-4, 3) και Γ (-3, 0), να βρεθούν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, -3$\overrightarrow{B\Gamma}$.

7. Αν A(5,3) και $\overrightarrow{AB}$=(4,9), να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου B.

8. Το διάνυσμα θέσης του σημείου A είναι $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - \vec{j}$ και το διάνυσμα θέσης του B είναι $\overrightarrow{OB} = \vec{i} - 4\vec{j}$. Να βρεθούν : (i) Το μέτρο του $\overrightarrow{AB}$,
(ii) το διάνυσμα θέσης του μέσου M του AB.

9. Δίνονται τα σημεία A (2,-1) , B (-4, 0) και Γ(-3, 1). Να βρείτε τα μήκη των πλευρών και των διαμέσων του τριγώνου ΑΒΓ.

10. Το σημείο M (-1, 4) είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB. Αν το σημείο A έχει συντεταγμένες (2, 5). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου B;

11. Αν A (4, 5) , B (x, 2) και $|\overrightarrow{AB}| = 4$, να βρείτε τον $x \in R$.

12. Δίνονται τα σημεία A (-3, 1) και B(-1,3) . Να βρεθεί σημείο Γ του άξονα y΄y, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά AB.

13. Δίνονται τα σημεία A (-3, 1) , B (1, 2) , Γ (-1, 3) και Δ (-5,2).
i) Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
ii)Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου.

14. Δίδεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ =(2,-3). Ποια από τα παρακάτω διανύσματα είναι παράλληλα με το $\vec{\alpha}$;

1) $\vec{\beta}$ =(3,-1) 2) $\vec{\gamma}$ = (4,-9) 3) $\vec{\delta}$ = (-4,6) 4) $\vec{\varepsilon}$ =(-2,0) 5) $\vec{\eta}$ =(-6,9)