ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μεθοδοι Επιλυσης Συνθετων Ωμικων Κυκλωματων

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται και αναλύονται διεξοδικά τεχνικές επίλυσης γραμμικών ωμικών κυκλωμάτων (Μέθοδος Βρόχων (Μ.Α.Β), Μέθοδος Κόμβων (Μ.Κ)) και λύνονται προβλήματα για κάθε περίπτωση, με σκοπό την πλήρη κατανόηση των μεθόδων αυτών.

Επίσης, περιγράφονται και αναλύονται διεξοδικά μέθοδοι με χρήση ειδικών τρόπων, γνωστών με το όνομα θεωρήματα κυκλωμάτων (θεωρήματα Thevenin και Norton, θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος, θεώρημα επαλληλίας, συμμετρικά κυκλώματα).

*Σκοπός του κεφαλαίου είναι, να **αναπτύξουν** οι μαθητές κριτική ικανότητα σχετικά με τις διάφορες μεθόδους επίλυσης των προβλημάτων που αποτελούν αντικείμενο του κεφαλαίου αυτού ώστε να είναι σε θέση να τα **επιλύουν** κάθε φορά με τον πιο κατάλληλο τρόπο.*

Γενικά

Η επίλυση ενός κυκλώματος οδηγεί πάντα στην εύρεση του ρεύματος σε κάθε κλάδο αυτού και κατά συνέπεια και των τάσεων όλων των κλάτων (με εφαρμογή του νόμου του Ohm για κάθε κλάδο).

Επομένως, εάν ένα κύκλωμα έχει **b** κλάδους, οι άγνωστοι του προβλήματος είναι στην πραγματικότητα **b** και ως εκ τούτου απαιτούνται **b** ανεξάρτητες εξισώσεις (Μία εξίσωση είναι ανεξάρτητη από τις άλλες, εάν περιέχει ένα ή περισσότερα στοιχεία (πηγές, αντιστάσεις, ρεύματα) που δεν περιέχονται σε όλες τις άλλες εξισώσεις).

Με την εφαρμογή όμως των νόμων Kirchhoff (N.T.K., N.P.K) προκύπτουν περισσότερες από **b** εξισώσεις. Πως όμως διασφαλίζεται το γεγονός ότι, αυτές που πάρθηκαν είναι ανεξάρτητες ώστε να λυθεί το πρόβλημα;

Η δυσκολία λοιπόν για την επίλυση ενός κυκλώματος δεν είναι να βρεθούν b εξισώσεις, αλλά να βρεθούν b ανεξάρτητες εξισώσεις.

Αυτή η δυσκολία άρθηκε μέσα από θεωρήματα που διασφάλισαν τη συστηματική αναζήτηση ανεξάρτητων εξισώσεων, ικανών να επιλύσουν οποιοδήποτε ηλεκτρικό κύκλωμα.

Τα θεωρήματα αυτά είναι:

α) Ο αριθμός των απλών βρόχων (βλέπε παρ. 3-1) ενός κυκλώματος με **b** κλάδους και **n** κόμβους είναι **b–n+1** και το πλήθος των εξισώσεων που προκύπτουν με εφαρμογή του N.T.K σε κάθε απλό βρόχο είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

β) Σε ένα κύκλωμα με **n** κόμβους η εφαρμογή του N.P.K. σε **n–1** κόμβους δίνει ένα σύνολο ανεξάρτητων εξισώσεων.

4-1. Μέθοδος των Απλών Βρόχων (Μ.Α.Β)

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στο θεώρημα **α)** και είναι κατάλληλη για μεγάλο πλήθος ηλεκτρικών κυκλωμάτων, ιδίως εάν οι περισσότερες πηγές τους είναι πηγές τάσης.

Για την καλύτερη κατανόηση της Μ.Α.Β η ανάλυση θα περιοριστεί για κυκλώματα τα οποία έχουν δύο (2) μόνο απλούς βρόχους, με την πεποίθηση ότι η γενίκευσή της για περισσότερους βρόχους θα είναι πλέον εύκολη.

Η ανάπτυξη και η πορεία της Μ.Α.Β εξαρτάται και από το είδος των πηγών που υπάρχουν στο κύκλωμα. Έτσι, διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

α) Κύκλωμα με ανεξάρτητες πηγές τάσης και ρεύματος.

Εάν το κύκλωμα περιέχει μόνο ανεξάρτητες πηγές τάσης και ρεύματος, η ανάπτυξη και η πορεία της Μ.Α.Β έχει ως εξής:

α.1) Εάν όλες οι πηγές ρεύματος μετατρέπονται σε πηγές τάσης (παρ. 3-4.5, β), τότε αυτές μετατρέπονται και στο ισοδύναμο κύκλωμα που περιέχει πλέον μόνο ανεξάρτητες πηγές τάσης, εκτελούνται τα εξής βήματα:

i) Στους δύο (2) (απλούς βρόχους ορίζονται τα ρεύματα βρόχων I_1, I_2 ομόστροφα (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα) για λόγους συμμετρίας.

ii) Γράφονται οι εξισώσεις των Α.Β ως εξής:

$$\begin{aligned} R_{11} \cdot I_1 + R_{12} \cdot I_2 &= \Sigma V_1 \\ R_{21} \cdot I_1 + R_{22} \cdot I_2 &= \Sigma V_2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

όπου: R_{11}, ονομάζεται **ιδία αντίσταση** του $(A.B)_1$ και ισούται με το άθροισμα όλων των αντιστάσεων του βρόχου αυτού.

Το ίδιο ισχύει και για την R_{22} του $(A.B)_2$.

$R_{12} = R_{21}$, ονομάζεται **αμοιβαία αντίσταση** των $(A.B)_1$ και $(A.B)_2$ και ισούται με το άθροισμα των αντιστάσεων που συναντώνται στους κοινούς κλάδους των βρόχων αυτών. Το πρόσημα αυτής είναι "+", εάν οι φορές των ρευμάτων των βρόχων πάνω στους κοινούς κλάδους συμπίπτουν, αλλιώς είναι "–".

ΣV_1, παριστάνει το αλγεβρικό άθροισμα των πηγών τάσης του $(A.B)_1$.

Θετικές λαμβάνονται εκείνες που το ρεύμα βρόχου τις διαπερνά από τον αρνητικό πόλο προς το θετικό, ενώ στην αντίθετη περίπτωση λαμβάνονται αρνητικές.

Το ίδιο ισχύει και για το ΣV_2 του $(A.B)_2$.

iii) Το γραμμικό σύστημα 2 x 2 (δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους) που προκύπτει λύνεται με τη μέθοδο Gramer, (βλέπε παράρτημα Α) και τα ρεύματα I_1, I_2 είναι πλέον γνωστά.

iv) Τα ρεύματα όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των βροχικών ρευμάτων και κατά συνέπεια οι τάσεις όλων των στοιχείων είναι γνωστές (με εφαρμογή του νόμου του Ohm).

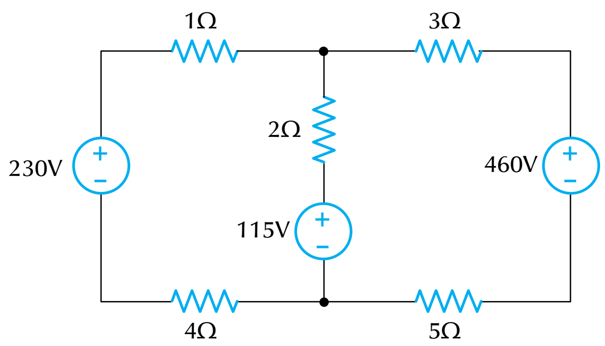
Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

☞ *Παρατήρηση*

- Εφόσον τα ρεύματα των βρόχων λαμβάνονται ομόστροφα,το πρόσημο των R_{12}, R_{21} είναι πάντα "–", αφού στους κοινούς κλάδους των βρόχων τα ρεύματα I_1, I_2 είναι πάντα αντίρροπα.

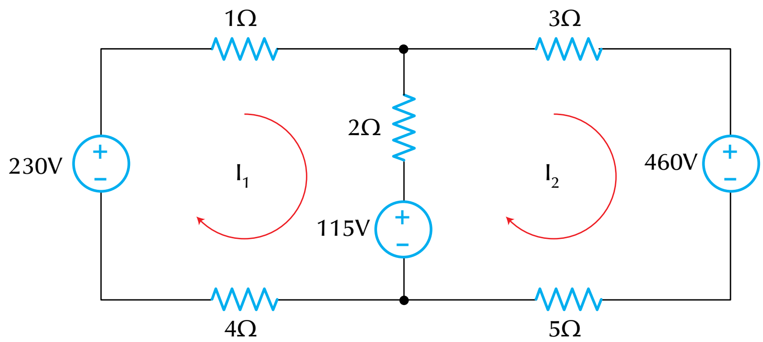
➢ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας τη Μ.Α.Β, υπολογίστε τα ρεύματα όλων των κλάδων (μέτρο και φορά) και στη συνέχεια δείξτε ότι, η ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα είναι ίση με την ισχύ που καταναλίσκεται.



Λύση

Ορίζοντας τα ρεύματα βρόχων δεξιόστροφα, το κύκλωμα γίνεται



Οι εξισώσεις των Α.Β είναι:

$$\begin{aligned} R_{11} \cdot I_1 + R_{12} \cdot I_2 &= \Sigma V_1 \\ R_{21} \cdot I_1 + R_{22} \cdot I_2 &= \Sigma V_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

όπου $R_{11} = 1 + 2 + 4 = 7$, $R_{22} = 3 + 5 + 2 = 10$, $R_{12} = R_{21} = -2$

$$\Sigma V_1 = 230 - 115 = 115, \quad \Sigma V_2 = 115 - 460 = -345$$

Επομένως, οι εξισώσεις της σχέσης (1) παίρνουν την μορφή:

$$\begin{aligned} 7 \cdot I_1 - 2 \cdot I_2 &= 115 \\ -2 \cdot I_1 + 10 \cdot I_2 &= -345 \end{aligned} \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα (2) με τη μέθοδο Cramer, προκύπτουν:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 115 & -2 \\ -345 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{115 \cdot 10 - (-2) \cdot (-345)}{7 \cdot 10 - (-2) \cdot (-2)} = \frac{460}{66} \Rightarrow I_1 = 6{,}97 \text{ (A)}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 115 \\ -2 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & -345 \end{vmatrix}} = \frac{7 \cdot (-345) - 115 \cdot (-2)}{7 \cdot 10 - (-2) \cdot (-2)} = \frac{-2185}{66} \Rightarrow I_2 = -33{,}11 \text{ (A)}$$

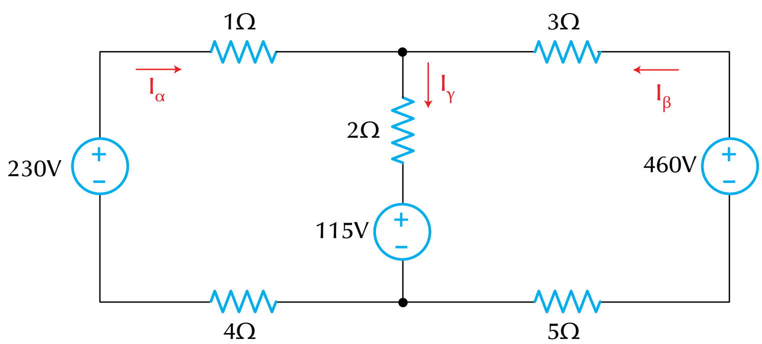
Για τα ρεύματα των κλάδων, προκύπτει:

Κλάδος που περιέχει τις αντιστάσεις 1Ω, 4Ω: Ρεύμα $I_\alpha = I_1 = 6{,}97$ (A)

Κλάδος που περιέχει τις αντιστάσεις 3Ω,5Ω: Ρεύμα $I_\beta = -I_2 = 33{,}11$ (A)

Κλάδος που περιέχει τις αντιστάσεις 2Ω: Ρεύμα $I_\gamma = -I_1 - I_2 = 40{,}8$ (A)

Οι φορές των ρευμάτων των κλάδων φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί



Η καταναλισκώμενη ισχύς στις αντιστάσεις είναι:

$$P_{ANT} = I_\alpha^2 \cdot 1 + I_\alpha^2 \cdot 4 + I_\beta^2 \cdot 3 + I_\beta^2 \cdot 5 + I_\gamma^2 \cdot 2 =$$

$$= 6{,}97^2 \cdot 1 + 6{,}97^2 \cdot 4 + 33{,}11^2 \cdot 3 + 33{,}11^2 \cdot 5 + 40{,}08^2 \cdot 2 = 12.225{,}89 \text{ (W)}$$

Η πηγή των 115(V) καταναλίσκει ενέργεια (φορτίζεται) διότι το ρεύμα κινείται από το (+) στο (–).

$$P_{(115V)} = 115 \cdot I_\gamma = 115 \cdot 40{,}08 = 4609{,}2 \text{ (W)}$$

Επομένως:

$$P_{KATAN.} = P_{ANT.} + P_{(115V)} = 12225{,}89 + 4609{,}2 = 16.835{,}09 \text{ (W)}$$

Η ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα είναι:

$$P_{\Pi APEX.} = P_{(230V)} + R_{(460V)} = 230 \cdot I_\alpha + 460 \cdot I_\beta =$$

$$= 230 \cdot 6{,}97 + 460 \cdot 33{,}11 = 16834 \text{ (W)}$$

Άρα

$$P_{\Pi APEX.} = P_{KATAN.} \simeq 16{,}835 \text{ (KW)}$$

Σχόλιο: Η μικρή απόκλιση των ισχύων οφείλεται στις πράξεις λόγω ύπαρξης δεκαδικών ψηφίων

α.2) Εάν μια πηγή ρεύματος δεν μεταρέπεται σε πηγή τάσης (ή είναι δύσκολη η σύλληψη της μετατροπής), εκτελούνται τα εξής βήματα:

i) Στη θέση της πηγής ρεύματος που παρουσιάζεται το πρόβλημα της μη μετατροπής σε πηγή τάσης, θεωρούμε “εικονικά” πηγή τάση με τιμή ίση με την αντίστοιχη τιμή που επικρατεί στα άκρα της μη μετατρέψιμης πηγής ρεύματος.

ii) Στους δύο (2) απλούς βρόχους ορίζονται τα ρεύματα βρόχων I_1, I_2 ομόστροφα (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα) για λόγους συμμετρίας.

iii) Γράφονται οι εξισώσεις των Α.Β όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

iv) Για την “εικονική” πηγή τάσης γράφεται μία εξίσωση που περιγράφει την αντίστοιχη πηγή ρεύματος με τα ρεύματα βρόχων και φτιάχνεται ένα καινούργιο σύστημα εξισώσεων με πρώτη εξίσωση αυτήν και δεύτερη όποια από τις αρχικές δύο βολεύει (να μην περιέχει την εικονική τάση). Υπάρχει περίπτωση καμμία από τις δύο να μη βολεύει, οπότε προσθέτουμε ή αφαιρούμε αυτές με στόχο την εξαφάνιση της εικονικής τάσης που εμφανίστηκε στην αρχή.

v) Το γραμμικό σύστημα 2 x 2 (δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους) που προκύπτει λύνεται πάλι με τη μέθοδο Cramer και τα ρεύματα I_1, I_2 είναι πλέον γνωστά.

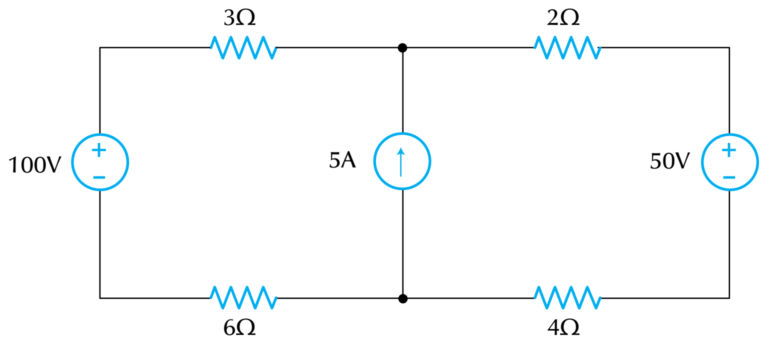
vi) Τα ρεύματα όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των βροχικών ρευμάτων και κατά συνέπεια οι τάσεις όλων των στοιχείων είναι γνωστές (με εφαρμογή του νόμου του Ohm).
Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

☞ *Παρατήρηση*

• Ο υπολογισμός της τάσης που επικρατεί στη μη μετατρέψιμη πηγή ρεύματος, γίνεται από την εξίσωση που αφαιρέθηκε από την αρχική μορφή του συστήματος, αφού πλέον τα ρεύματα βρόχων είναι γνωστά.

➢ Παράδειγμα

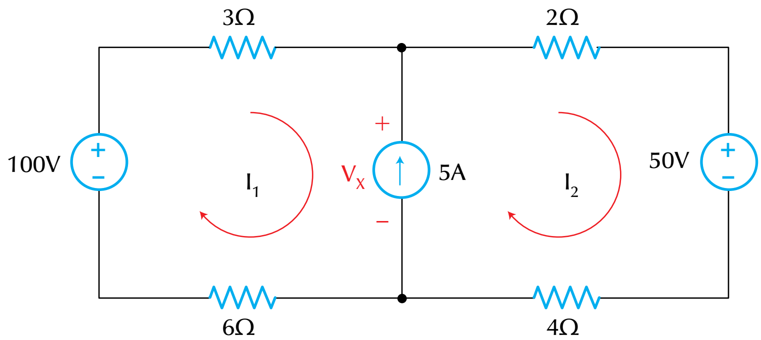
Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας τη Μ.Α.Β, υπολογίστε τα ρεύματα όλων των κλάδων (μέτρο και φορά) και στη συνέχεια δείξτε ότι, η ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα είναι ίση με την ισχύ που καταναλίσκεται.



Λύση

Παρατηρείστε ότι η πηγή των 5(A) δεν μετατρέπεται σε πηγή τάσης διότι δεν υπάρχει αντίσταση παράλληλη σ' αυτήν. Επομένως, θεωρούμε ότι στη θέση της υπάρχει μία εικονική πηγή τάσης με τιμή V_x ίση με την τάση που επικρατεί στα άκρα αυτής.

Ορίζοντας στη συνέχεια τα ρεύματα βρόχων δεξιόστροφα, το κύκλωμα γίνεται:



Οι εξισώσεις των Α.Β είναι:

$$R_{11} \cdot I_1 + R_{12} \cdot I_2 = \Sigma V_1$$
$$R_{21} \cdot I_1 + R_{22} \cdot I_2 = \Sigma V_2 \qquad (1)$$

όπου $$R_{11} = 3 + 6 = 9,\ R_{22} = 2 + 4 = 6,\ R_{12} = R_{21} = 0$$

$$\Sigma V_1 = 100 - V_x,\ \Sigma V_2 = V_x - 50$$

Επομένως, οι εξισώσεις της σχέσης (1) παίρνουν τη μορφή:

$$9 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 = 100 - V_x$$
$$0 \cdot I_1 + 6 \cdot I_2 = V_x - 50 \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την 1η γραμμή της σχέσης (2) με την εξίσωση $I_2 - I_1 = 5(A)$ που χαρακτηρίζει την πηγή ρεύματος, και τη 2η γραμμή με το άθροισμα της 1ης και 2ης γραμμής της σχέσης (2), προκύπτει το σύστημα

$$-1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 = 5$$
$$9 \cdot I_1 + 6 \cdot I_2 = 50 \qquad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα (3) με τη μέθοδο Cramer, προκύπτει:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 50 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{5 \cdot 6 - 1 \cdot 50}{(-1) \cdot 6 - 1 \cdot 9} = \frac{-20}{-15} \Rightarrow I_1 = 1{,}33\ (A)$$

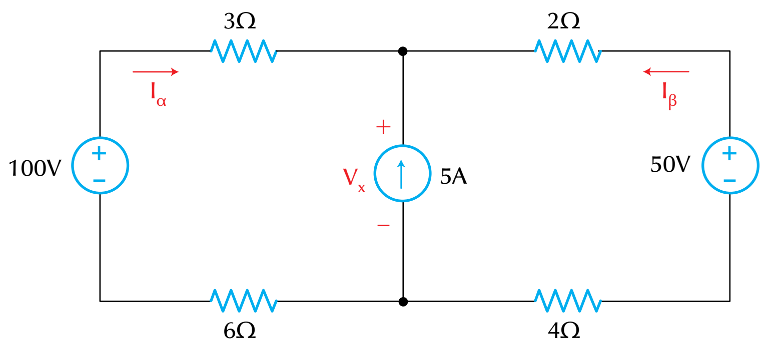
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 9 & 50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{(-1)\cdot 50 - 5\cdot 9}{(-1)\cdot 6 - 1\cdot 9} = \frac{-95}{-15} \Rightarrow I_2 = 6{,}33\ (A)$$

Για τα ρεύματα των κλάδων προκύπτει:

Κλάδος που περιέχει τις αντιστάσεις 3Ω,6Ω: $I_\alpha = I_1 = 1{,}33$ (A)

Κλάδος που περιέχει τις αντιστάσεις 2Ω,4Ω: $I_\beta = I_2 = 6{,}33$ (A)

Οι φορές των ρευμάτων των κλάδων φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Η τάση Vx της πηγής ρεύματος προκύπτει από την 1η ή 2η εξίσωση της σχέσης (2)

$$9\cdot I_1 + 0\cdot I_2 = 100 - V_x \Rightarrow 9\cdot 1{,}33 + 0 = 100 - V_x \Rightarrow V_x = 88{,}03\ (V)$$

Η καταναλισκόμενη ισχύς στο κύκλωμα είναι:

$$P_{KATAN.} = P_{ANT.} + P_{(50V)} = I_\alpha^2\cdot 3 + I_\alpha^2\cdot 6 + I_\beta^2\cdot 2 + I_\beta^2\cdot 4 + 50\cdot I_\beta =$$

$$= 1{,}33^2\cdot 3 + 1{,}33^2\cdot 6 + 6{,}33^2\cdot 2 + 6{,}33^2\cdot 4 + 50\cdot 6{,}33 = 572{,}83\ (W) \cong 573\ (W)$$

Η παρεχόμενη στο κύκλωμα ισχύς είναι:

$$P_{\Pi APEX.} = P_{(100V)} + P_{(5A)} = 100\cdot I_\alpha + 5\cdot V_x = 100\cdot 1{,}33 + 5\cdot 88{,}03 = 573\ (W)$$

Άρα

$$P_{\Pi APEX.} = P_{KATAN.} = 573\ (W)$$

β) Κύκλωμα με ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές τάσης και ρεύματος

Εάν το κύκλωμα περιέχει ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές τάσης και ρεύματος, η ανάπτυξη και η πορεία της Μ.Α.Β έχει ως εξής:

β.1) Εάν όλες οι πηγές ρεύματος (ανεξάρτητες και εξαρτημένες) μετατρέπονται σε πηγές τάσης (ανεξάρτητες και εξαρτημένες αντίστοιχα), τότε αυτές ματατρέπονται και στο ισοδύναμο κύκλωμα που περιέχει πλέον μόνο πηγές τάσης, εκτελούνται τα εξής βήματα:

i) Στους δύο (2) απλούς βρόχους ορίζονται τα ρεύματα βρόχων I_1, I_2 ομόστροφα (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα) για λόγους συμμετρίας.

ii) Γράφονται οι εξισώσεις των Α.Β όπως και στην περίπτωση α)

iii) Τα εξαρτώμενα μεγέθη που εμφανίζονται στο 2ο μέλος των εξισώσεων εκφράζονται με αγνώστους του προβλήματος, δηλαδή με τα ρεύματα βρόχων. Αυτό όμως έχει σαν αποτέλεσμα να εμφανίζονται άγνωστοι και στο 2ο μέλος των εξισώσεων.

iv) Ανακατατάσσουμε τις εξισώσεις ώστε οι άγνωστοι να εμφανίζονται μόνο στο πρώτο μέλος αυτών.

v) Το γραμμικό σύστημα 2 x 2 (δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους) που προκύπτει λύνεται πάλι με τη μέθοδο Cramer και τα ρεύματα I_1, I_2 είναι πλέον γνωστά.

vi) Τα ρεύματα όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των βροχικών ρευμάτων και κατά συνέπεια οι τάσεις όλων των στοιχείων είναι γνωστές (με εφαρμογή του νόμου του Ohm).

Με άλλα λόγα ολοκληρώνεται η επίλυση των ηλεκτρικού κυκλώματος.

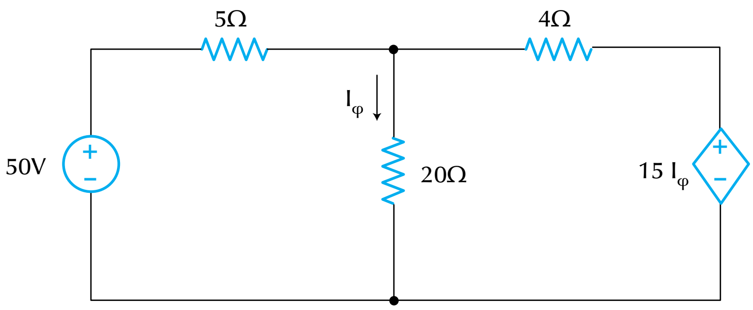
☞ *Παρατηρήσεις*

• Μια εξαρτημένη πηγή ρεύματος θεωρείται μετατρέψιμη σε εξαρτημένη πηγή τάσης όταν υπάρχει παράλληλα κάποια αντίσταση και ταυτόχρονα το εξαρτώμενο μέγεθος αυτής δεν βρίσκεται στην παράλληλη αυτή αντίσταση.

• Μια ανεξάρτητη πηγή ρεύματος θεωρείται μετατρέψιμη σε ανεξάρτητη πηγή τάσης, όταν υπάρχει παράλληλα κάποια αντίσταση και ταυτόχρονα δεν εμφανίζεται στην αντίσταση αυτή ή στην πηγή εξαρτώμενο μέγεθος κάποιας εξαρτημένης πηγής ρεύματος ή τάσης.

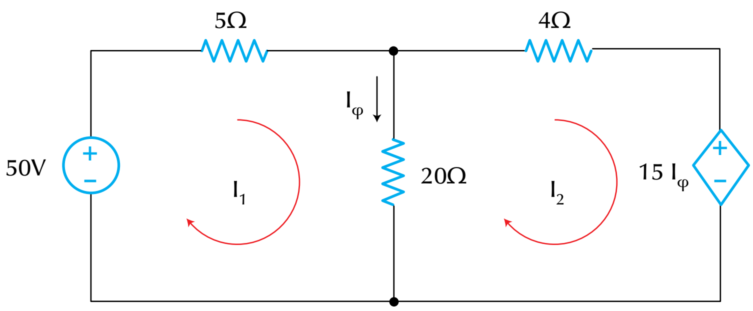
➢ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας της Μ.Α.Β, υπολογίστε τα ρεύματα όλων των κλάδων (μέτρο και φορά) και στη συνέχεια δείξτε ότι, η ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα είναι ίση με την ισχύ που καταναλίσκεται.



Λύση

Ορίζοντας τα ρεύματα των βρόχων, το κύκλωμα γίνεται:



Οι εξισώσεις των Α.Β είναι:

$$\begin{aligned} R_{11}\cdot I_1 + R_{12}\cdot I_2 &= \Sigma V_1 \\ R_{21}\cdot I_1 + R_{22}\cdot I_2 &= \Sigma V_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

όπου $\quad R_{11} = 5 + 20 = 25,\ R_{22} = 24,\ R_{12} = R_{21} = -20$

$$\Sigma V_1 = 50,\ \Sigma V_2 = -15 I_\varphi$$

Επομένως, οι εξισώσεις της σχέσης (1) παίρνουν τη μορφή:

$$\left.\begin{aligned} 25\cdot I_1 - 20\cdot I_2 &= 50 \\ -20\cdot I_1 + 24\cdot I_2 &= -15\cdot I_\varphi \end{aligned}\right\} \xrightarrow{I_\varphi = I_1 - I_2} \left.\begin{aligned} 25\cdot I_1 - 20\cdot I_2 &= 50 \\ -20\cdot I_1 + 24\cdot I_2 &= -15\cdot (I_1 - I_2) \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow[\text{στη 2η εξίσωση}]{\text{ανακατανομή}} \begin{aligned} 25\cdot I_1 - 20\cdot I_2 &= 50 \\ -20\cdot I_1 + 9\cdot I_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα (2) με τη μέθοδο Cramer, προκύπτει:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & -20 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 25 & -20 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{50 \cdot 9 - (-20) \cdot 0}{25 \cdot 9 - (-20) \cdot (-5)} = \frac{450}{125} \Rightarrow I_1 = 3{,}6\ (A)$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 25 & 50 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 25 & -20 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{25 \cdot 0 - 50 \cdot (-5)}{25 \cdot 9 - (-20) \cdot (-5)} = \frac{250}{125} \Rightarrow I_2 = 2\ (A)$$

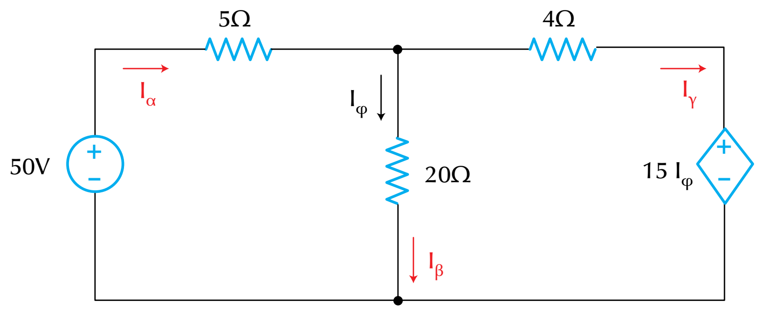
Για τα ρεύματα των κλάδων, προκύπτει:

Κλάδος που περιέχει την αντίσταση 5Ω: Ρεύμα $I_\alpha = I_1 = 3{,}6$ (A)

Κλάδος που περιέχει την αντίσταση 20Ω: Ρεύμα $I_\beta = I_1 - I_2 = 1{,}6$ (A) $= I_\varphi$

Κλάδος που περιέχει την αντίσταση 4Ω: Ρεύμα $I_\gamma = I_2 = 2$ (A)

Οι φορές των ρευμάτων των κλάδων φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Η τάση της εξαρτημένης πηγής είναι: $V_{(15I\varphi)} = 15 \cdot I_\varphi = 15 \cdot 1{,}6 = 24(V)$ και κατά συνέπεια η πολικότητά της είναι αυτή που δόθηκε στην εκφώνηση.

Η καταναλισκόμενη ισχύς στο κύκλωμα είναι:

$$P_{KATAN.} = P_{ANT.} + P_{(15I_\varphi)} = I_\alpha^2 \cdot 5 + I_\beta^2 \cdot 20 + I_\gamma^2 \cdot 4 + I_\gamma^2 \cdot 24 =$$

$$= 3{,}6^2 \cdot 5 + 1{,}6^2 \cdot 20 + 2^2 \cdot 4 + 2 \cdot 24 = 180\ (W)$$

Η παρεχόμενη στο κύκλωμα ισχύς είναι

$$P_{\Pi AP EX.} = P_{(50V)} = 50 \cdot I_\alpha = 50 \cdot 3{,}6 = 180\ (W)$$

Άρα

$$P_{\Pi AP EX.} = P_{KATAN.} = 180\ (W)$$

β.2) Εάν μία πηγή ρεύματος (ανεξάρτητη ή εξαρτημένη) δεν μετατρέπεται σε πηγή τάσης (ή είναι δύσκολη η σύλληψη της μετατροπής, εκτελούνται τα εξής βήματα:

i) Στη θέση της πηγής ρεύματος που παρουσιάζεται το πρόβλημα της μη μετατροπής σε πηγή τάσης, θεωρούμε "εικονικά" πηγή τάση με τιμή ίση με την αντίστοιχη τιμή που επικρατεί στα άκρα της μη μετατρέψιμης πηγή ρεύματος.

ii) Στους δύο (2) απλούς βρόχους ορίζονται τα ρεύματα βρόχων I_1, I_2 ομόστροφα (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα) για λόγους συμμετρίας.

iii) Γράφονται οι εξισώσεις των Α.Β όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

iv) Για την "εικονική" πηγή τάσης γράφεται μία εξίσωση που περιγράφει την αντίστοιχη πηγή ρεύματος με τα ρεύματα βρόχων και φτιάχνεται ένα καινούργιο σύστημα εξισώσεων με πρώτη εξίσωση αυτήν και δεύτερη όποια από τις αρχικές δύο βολεύει (να μην περιέχει την εικονική τάση). Υπάρχει περίπτωση καμμία από τις δύο να μη βολεύει, οπότε προσθέτουμε ή αφαιρούμε αυτές με στόχο την εξαφάνιση της εικονικής τάσης που εμφανίστηκε στην αρχή.

v) Τα εξαρτώμενα μεγέθη που εμφανίζονται στο 2ο μέλος των εξισώσεων εκφράζονται με αγνώστους του προβλήματος, δηλαδή με τα ρεύματα βρόχων. Αυτό όμως έχει σαν αποτέλεσμα να εμφανίζονται άγνωστοι και στο 2ο μέλος των εξισώσεων.

vi) Ανακατατάσσουμε τις εξισώσεις ώστε οι άγνωστοι να εμφανίζονται μόνο στο πρώτο μέλος αυτών.

vii) Το γραμμικό σύστημα 2 x 2 (δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους) που προκύπτει λύνεται πάλι με τη μέθοδο Cramer και τα ρεύματα I_1, I_2 είναι πλέον γνωστά.

viii) Τα ρεύματα όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των βροχικών ρευμάτων και κατά συνέπεια οι τάσεις όλων των στοιχείων είναι γνωστές (με εφαρμογή του νόμου του Ohm).

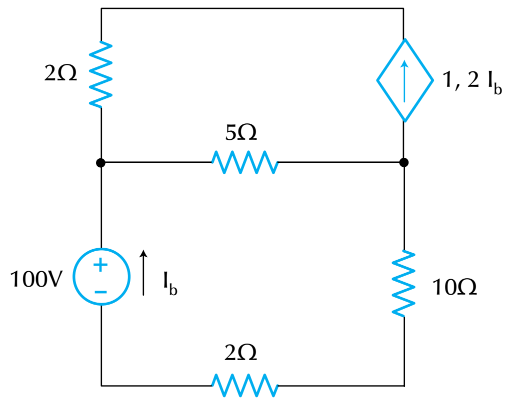
Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

☞ *Παρατήρηση*

Ο υπολογισμός της τάσης που επικρατεί στην μη μετατρέψιμη πηγή ρεύματος (ανεξάρτητη ή εξαρτημένη) γίνεται από την εξίσωση που αφαιρέθηκε από την αρχική μορφή του συστήματος, καθότι τα ρεύματα βρόχων είναι πλέον γνωστά.

➢ Παράδειγμα

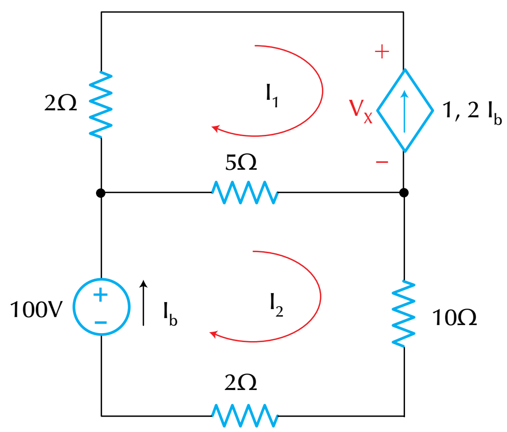
Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας την Μ.Α.Β, υπολογίστε τα ρεύματα όλων των κλάδων (μέτρο και φορά) και στη συνέχεια δείξτε ότι, η ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα είναι ίση με την ισχύ που καταναλίσκεται.



Λύση

Παρατηρείστε ότι, η εξαρτημένη πηγή ρεύματος δεν μετατρέπεται σε πηγή τάσης (τουλάχιστον εύκολα) διότι δεν υπάρχει αντίσταση παράλληλη σ' αυτήν. Επομένως, θεωρούμε ότι στη θέση της υπάρχει μια εικονική πηγή τάσης με τιμή V_x ίση με την τάση που επικρατεί στα άκρα αυτής.

Ορίζοντας στη συνέχεια τα ρεύματα βρόχων δεξιόστροφα, το κύκλωμα γίνεται



Οι εξισώσεις των Α.Β. είναι:

$$\begin{aligned} R_{11} \cdot I_1 + R_{12} \cdot I_2 &= \Sigma V_1 \\ R_{21} \cdot I_1 + R_{22} \cdot I_2 &= \Sigma V_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

όπου $R_{11} = 2 + 5 = 7,\ R_{22} = 5 + 10 + 2 = 17,\ R_{12} = R_{21} = -5$

$$\Sigma V_1 = -V_x,\ \Sigma V_2 = 100$$

Επομένως, οι εξισώσεις της σχέσης (1) παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} 7 \cdot I_1 - 5 \cdot I_2 &= -V_x \\ -5 \cdot I_1 + 17 \cdot I_2 &= 100 \end{aligned} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την 1η εξίσωση της σχέσης (2) με την εξίσωση $-I_1 = 1{,}2\ I_b$ που χαρακτηρίζει την εξαρτημένη πηγή ρεύματος και τη 2η εξίσωση όπως είναι, προκύπτει το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} -1 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 &= 1{,}2 \cdot I_b \\ -5 \cdot I_1 + 17 \cdot I_2 &= 100 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{I_b = I_2} \left.\begin{aligned} -1 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 &= 1{,}2 \cdot I_2 \\ -5 \cdot I_1 + 17 \cdot I_2 &= 100 \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow[\text{1ης εξίσωσης}]{\text{ανακατανομή}} \begin{aligned} -1 \cdot I_1 - 1{,}2 \cdot I_2 &= 0 \\ -5 \cdot I_1 + 17 \cdot I_2 &= 100 \end{aligned} \qquad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα (3) μ τη μέθοδο Cramer, προκύπτει:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1{,}2 \\ 100 & 17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1{,}2 \\ -5 & 17 \end{vmatrix}} = \frac{0 \cdot 17 - (-1{,}2) \cdot 100}{(-1) \cdot 17 - (-1{,}2) \cdot (-5)} = \frac{120}{-23} \Rightarrow I_1 = -5{,}217\ (A)$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 100 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1{,}2 \\ -5 & 17 \end{vmatrix}} = \frac{(-1) \cdot 100 - 0 \cdot (-5)}{(-1) \cdot 17 - (-1{,}2) \cdot (-5)} = \frac{-100}{-23} \Rightarrow I_2 = 4{,}347\ (A)$$

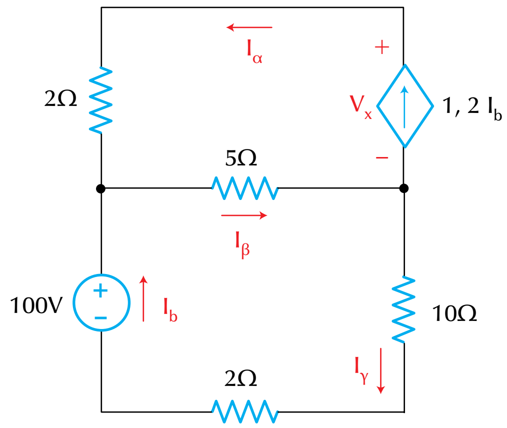
Για τα ρεύματα των κλάδων προκύπτει:

Κλάδος που περιέχει την αντίσταση 2Ω: $I_\alpha = -I_1 = 5{,}217$ (A)

Κλάδος που περιέχει την αντίσταση 5Ω: $I_\beta = I_2 - I_1 = 9{,}564$(A)

Κλάδος που περιέχει τις αντιστάσεις 10Ω, 2Q: $I_\gamma = I_2 = 4{,}347$ (A)

Οι φορές των ρευμάτων των κλάδων φαίνονται στο σχήματα που ακολουθεί



Η τάση V_x της εξαρτημένης πηγής ρεύματος προκύπτει από την πρώτη εξίσωση της σχέσης (1).

$$7 \cdot I_1 - 5 \cdot I_2 = -V_x \Rightarrow 7 \cdot (-5{,}217) - 5 \cdot 4{,}347 = -V_x \Rightarrow V_x = 58{,}254 \text{ (V)}$$

και το ρεύμα της $1{,}2\ I_b = 1{,}2 \cdot I_2 = 5{,}217$ (A)

και επειδή κινείται από το (–) στο (+) η πηγή παρέχει ισχύ στο κύκλωμα.

Η καταναλισκόμενη ισχύς στο κύκλωμα είναι:

$$P_{KATAN.} = P_{ANT.} = I_\alpha^2 \cdot 2 + I_\beta^2 \cdot 5 + I_\gamma^2 \cdot (10 + 2) =$$

$$= 5{,}217^2 \cdot 2 + 9{,}564^2 \cdot 5 + 4{,}347^2 \cdot (10 + 2) = 738{,}5 \text{ (W)}$$

Η παρεχόμενη στο κύκλωμα ισχύς είναι:

$$P_{\Pi APEX.} = P_{(100V)} + P_{(1{,}2I_b)} = 100 \cdot I_\gamma + 1{,}2I_b \cdot V_x =$$
$$= 100 \cdot 4{,}347 + 5{,}217 \cdot 58{,}254 = 738{,}5 \text{ (W)}$$

Άρα $$P_{\Pi APEX.} = P_{KATAN.} = 738{,}5 \text{ (W)}$$

4-2. Μέθοδος των κόμβων (Μ.Κ.)

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στο θεώρημα β) και είναι κατάλληλη για μεγάλο πλήθος κυκλωμάτων, ιδίως εάν οι περισσότερες πηγές τους είναι πηγές ρεύματος.

Για την καλύτερη κατανόηση της Μ.Κ. η ανάλυση θα περιοριστεί για κυκλώματα τα οποία έχουν τρεις (3) μόνο κόμβους, με την πεποίθηση ότι η γενίκευσή της για περισσότερους κόμβους θα είναι πλέον εύκολη.

Η ανάπτυξη και η πορεία της Μ.Κ. εξαρτάται και από το είδος των πηγών που υπάρχουν στο κύκλωμα. Έτσι, διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

α) Κύκλωμα με ανεξάρτητες πηγές ρεύματος και τάσης

Εάν το κύκλωμα περιέχει μόνο ανεξάρτητες πηγές ρεύματος και τάσης, η ανάπτυξη και η πορεία της Μ.Κ. έχει ως εξής:

α.1) Εάν όλες οι πηγές τάσης μεταρέπονται σε πηγές ρεύματος (παρ. 3-4.5,α) τότε αυτές μετατρέπονται και στο ισοδύναμο κύκλωμα που περιέχει πλέον μόνο ανεξάρτητες πηγές ρεύματος, εκτελούνται τα εξής βήματα:

i) Ορίζεται ένας κόμβος ως κόμβος αναφοράς. Παρά το γεγονός ότι αυτός μπορεί να εκλεγεί αυθαίρεται, σκόπιμο είναι να ορίζεται ο κόμβος που συνδέεται με του περισσότερους κλάδους, διότι έτσι προκύπτουν απλούστερες εξισώσεις. Ο κόμβος αναφοράς συμβολίζεται με "$\downarrow$".

ii) Για τους υπόλοιπους δύο (2) κόμβους αφού αριθμηθούν, ορίζονται οι τάσεις τους V1, V2 ως προς τον κόμβο αναφοράς.

iii) Γράφονται οι εξισώσεις των κόμβων ως εξής:

$$\begin{aligned} G_{11} \cdot V_1 + G_{12} \cdot V_2 &= \Sigma I_1 \\ G_{21} \cdot V_1 + G_{22} \cdot V_2 &= \Sigma I_2 \end{aligned} \qquad (4.2)$$

όπου: G_{11} ονομάζεται **ιδία αγωγιμότητα** του κόμβου 1 και ισούται με το άθροισμα όλων των αγωγιμοτήτων που καταλήγουν απ' ευθείας στον κόμβο αυτό.

Το ίδιο ισχύει και για την G_{22} του κόμβου 2.

$G_{12} = G_{21}$, ονομάζεται **αμοιβαία αγωγιμότητα** των κόμβων 1 και 2 και ισούται με το άθροισμα των αγωγιμοτήτων που συνδέουν απ' ευθείας τους κόμβους αυτούς. Το πρόσημα αυτής είναι πάντα"–".

ΣI_1, παριστάνει το αλγεβρικό άθροισμα των πηγών ρεύματος του κόμβου 1. Θετικές λαμβάνονται εκείνες που κατευθύνονται προς τον κόμβο 1 ενώ εκείνες που απομακρύνονται απ' αυτόν λαμβάνονται αρνητικές.

Το ίδιο ισχύει και γιατο ΣI_1 του κόμβου 2.

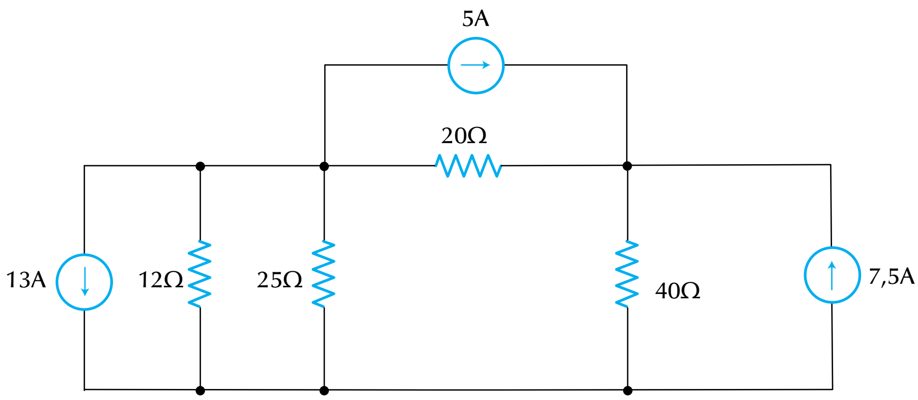
iv) Το γραμμικό σύστημα 2 x 2 (δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους) που προκύπτει λύνεται με τη μέθοδο Cramer (βλέπε παράρτημα Α) και οι τάσεις V_1, V_2 είναι πλέον γνωστές.

v) Οι τάσεις όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των κομβικών τάσεων V_1, V_2 και κατά συνέπεια τα ρεύματα όλων των στοιχείων είναι γνωστά (με εφαρμογή του νόμου του Ohm).

Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

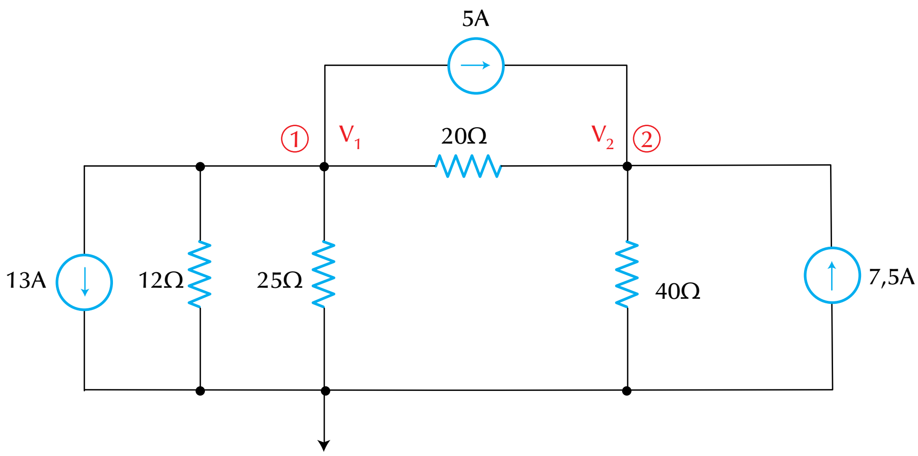
☞ *Παρατήρηση*

• Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας τη Μ.Κ., υπολογίστε τις τάσεις και τα ρεύματα όλων των κλάδων.



Λύση

Ορίζοντας τον κόμβο αναφοράς και αριθμώντας τους υπόλοιπους για τους οποίους ορίζονται οι κομβικές τάσεις V_1, V_2, το κύκλωμα γίνεται



Οι εξισώσεις των κόμβων είναι:

$$\begin{aligned} G_{11} \cdot V_1 + G_{12} \cdot V_2 &= \Sigma I_1 \\ G_{21} \cdot V_1 + G_{22} \cdot V_2 &= \Sigma I_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

όπου

$$G_{11} = \frac{1}{12} + \frac{1}{25} + \frac{1}{20} = 0{,}173, \quad G_{22} = \frac{1}{20} + \frac{1}{40} = 0{,}075$$

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{20} = 0{,}05$$

$$\Sigma I_1 = -5 - 13 = -18, \quad \Sigma I_2 = 5 + 7{,}5 = 12{,}5$$

Επομένως, οι εξισώσεις της σχέσης (1) παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} 0{,}173 \cdot V_1 - 0{,}05 \cdot V_2 &= -18 \\ -0{,}05 \cdot V_1 + 0{,}075 \cdot V_2 &= 12{,}5 \end{aligned} \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα (2) με τη μέθοδο Cramer, προκύπτει:

$$V_1 = -69{,}212\ (V), \quad V_2 = 120{,}525\ (V)$$

Για τις τάσεις των κλάδων, προκύπτει:

Κλάδος πηγής 5A : $V_\alpha = V_2 - V_3 = 189{,}737$ (V), το "–" είναι στον κόμβο (1)

Κλάδος πηγής 20Ω : $V_b = V_\alpha = 189{,}737$ (V), το "–" είναι στον κόμβο (1)

Κλάδος πηγής 13A : $V_c = -V_1 = 69{,}212$ (V), το "–" είναι στον κόμβο (1)

Κλάδος αντίστασης 12Ω : $V_d = V_c = 69{,}212$ (V), το "–" είναι στον κόμβο (1)

Κλάδος αντίστασης 25Ω: $V_e = V_c = 69{,}212$ (V), το "–" είναι στον κόμβο (1)

Κλάδος ανίστασης 40Ω: $V_f = V_2 = 120{,}525$ (V), το "–" είναι στον κόμβο $\downarrow$

Κλάδος πηγής 7,5Ω: $V_g = V_f = 120{,}525$ (V), το "–" είναι στον κόμβο $\downarrow$

Για τα ρεύματα των κλάδων προκύπτει:

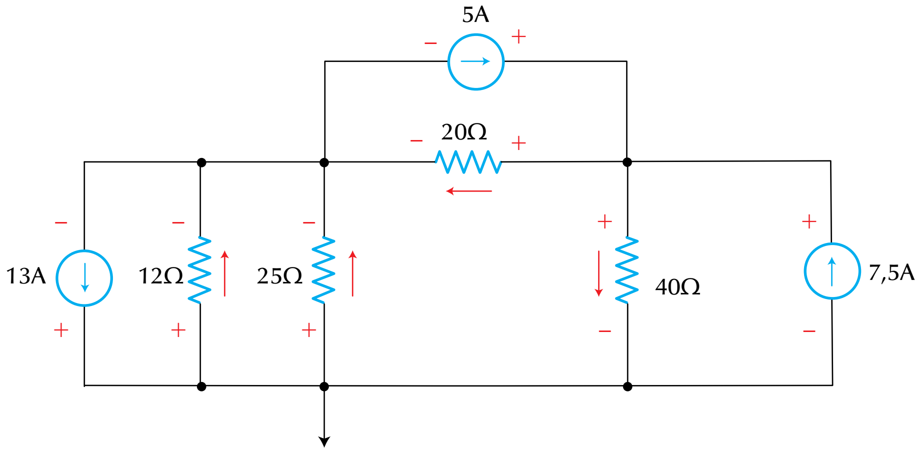
Κλάδος αντίστασης 20Ω : $I_b = \frac{189{,}737}{20} = 9{,}486$ (A), φορά από κόμβο (2) σε κόμβο (1)

Κλάδος αντίστασης 12Ω: $I_d = \frac{69{,}212}{12} = 5{,}767$ (A), φορά από κόμβο $\downarrow$ σε κόμβο (1)

Κλάδος αντίστασης 25Ω: $I_e = \frac{69{,}212}{25} = 2{,}768$ (A), φορά από κόμβο $\downarrow$ σε κόμβο (1)

Κλάδος αντίστασης 40Ω: $I_f = \dfrac{120{,}525}{40} = 3{,}013$ (A), φορά από κόμβο (2) σε κόμβο ⏚

Έτσι, το κύκλωμα με τις τάσεις και τα ρεύματα των κλάδων είναι



Παρατηρείστε ότι όλες οι πηγές παρέχουν ισχύ στο κύκλωμα, διότι το ρεύμα τους κατευθύνεται από το (–) στο (+).

α.2) Εάν μία πηγή τάσης δεν μετατρέπεται σε πηγή ρεύματος (ή είναι δύσκολη η σύλληψη της μετατροπής), εκτελούνται τα εξής βήματα:

i) Στη θέση της πηγής τάσης που παρουσιάζεται το πρόβλημα της μη μετατροπής σε πηγή ρεύματος, θεωρούμε "εικονικά" πηγή ρεύματος με τιμή ίση με το αντίστοιχο ρεύμα του κλάδου που περιέχει τη μη μετατρέψιμη πηγή τάσης.

ii) Ορίζεται ένας κόμβος ως κόμβος αναφοράς. Παρά το γεγονός ότι αυτός μπορεί να εκλεγεί αυθαίρετα, σκόπιμο είναι να ορίζεται ο κόμβος που συνδέεται με τους περισσότερους κλάδους, διότι έτσι προκύπτουν απλούστερες εξισώσεις. Ο κόμβος αναφοράς συμβολίζεται με "⏚".

iii) Για τους υπόλοιπους δύο (2) κόμβους αφού αριθμηθούν, ορίζονται οι τάσεις τους V_1, V_2 ως προς τον κόμβο αναφοράς.

iv) Γράφονται οι εξισώσεις των κόμβων όπως κια στην προηγούμενη περίπτωση.

v) Για την "εικονική" πηγή ρεύματος γράφεται μια εξίσωση που περιγράφει την αντίστοιχη πηγή τάσης με τις κομβικές τάσεις V_1, V_2 και φτιάχνεται ένα καινούργιο σύστημα εξισώσεων με πρώτη εξίσωση αυτήν και δεύτερη όποια από τις αρχικές δύο βολεύει (να μην περιέχει το εικονικό ρεύμα). Υπάρχει περίπτωση καμμία από τις δύο να μη βολεύει, οπότε προστίθενται ή αφαιρούνται αυτές με στόχο την εξαφάνιση του εικονικού ρεύματος που εμφανίστηκε στην αρχή.

vi) Το γραμμικό σύστημα 2 x 2 (δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους) που προκύπτει λύνεται πάλι με τη μέθοδο Cramer και οι τάσεις V_1, V_2 είναι πλέον γνωστές.

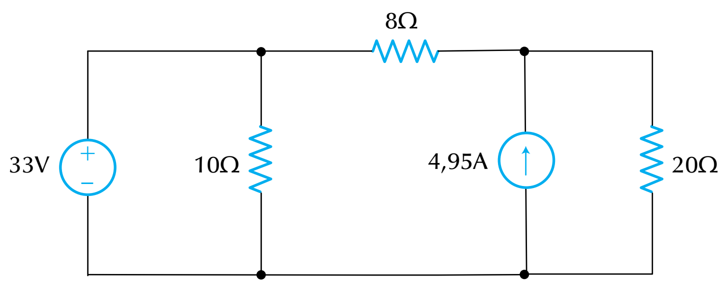
vii) Οι τάσεις όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των κομβικών τάσεων V_1, V_2 και κατά συνέπεια τα ρεύματα όλων των στοιχείων είναι γνωστά (με εφαρμογή του νόμου του Ohm).
Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

☞ *Παρατήρηση*

• Ο υπολογισμός του ρεύματος που διαρρέει τη μη μετατρέψιμη πηγή τάσης, γίνεται από την εξίσωση που αφαιρέθηκε από την αρχική μορφή του συστήματος, αφού πλέον οι τάσεις V_1, V_2 είναι γνωστές.

➢ Παράδειγμα

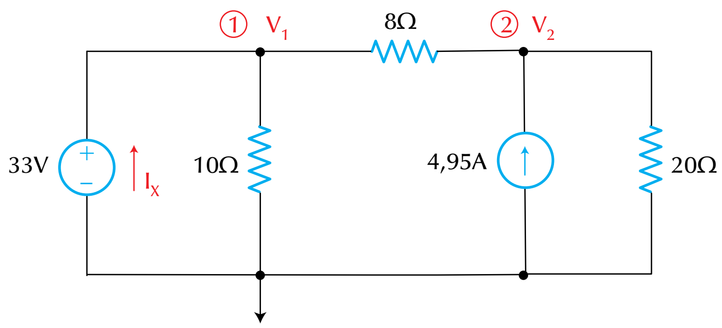
Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματα χρησιμοποιώντας τη Μ.Κ. υπολογίστε τις τάσεις και τα ρεύματα όλων των κλάδων και στη συνέχεια υπολογίστε τις ισχείς των πηγών.



Παρατηρείστε ότι η πηγή των 33 (V) δεν μετατρέπεται σε πηγή ρεύματος διότι δεν υπάρχει αντίσταση σε σειρά με αυτήν.

Θεωρείται λοιπόν, ότι στη θέση της υπάρχει μια εικονική πηγή ρεύματος με τιμή I_X ίσο με το ρεύμα που διαρρέει την πηγή των 33 (V).

Ορίζοντας τον κόμβο αναφοράς και αριθμώντας τους υπόλοιπους για τους οποίους ορίζουμε τις κομβικές τάσεις, το κύκλωμα γίνεται



Οι εξισώσεις των κόμβων είναι:

$$\begin{aligned} G_{11} \cdot V_1 + G_{12} \cdot V_2 &= \Sigma I_1 \\ G_{21} \cdot V_1 + G_{22} \cdot V_2 &= \Sigma I_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

όπου: $G_{11} = \frac{1}{10} + \frac{1}{8} = 0{,}225 \qquad G_{22} = \frac{1}{8} + \frac{1}{20} = 0{,}175$

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{8} = -0{,}125$$

$$\Sigma I_1 = I_x, \ \ \Sigma I_2 = 4{,}95$$

Επομένως, οι εξισώσεις της σχέσης (1) παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} 0{,}225 \cdot V_1 - 0{,}125 \cdot V_2 &= I_x \\ -0{,}125 \cdot V_1 + 0{,}175 \cdot V_2 &= 4{,}95 \end{aligned} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την 1η εξίσωση της σχέσης (2) με την εξίσωση $V_1 = 33$ (V) που χαρακτηρίζει την πηγή τάσης, προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{aligned} 1 \cdot V_1 + 0 \cdot V_2 &= 33 \\ -0{,}125 \cdot V_1 + 0{,}175 \cdot V_2 &= 4{,}95 \end{aligned} \qquad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα (3) με τη μέθοδο Cramer, προκύπτουν:

$$V_1 = 33 \text{ (V)}, \quad V_2 = 51{,}857 \text{ (V)}$$

Το ρεύμα που διαρρέει την πηγή των 33 (V) προκύπτει από την 1η εξίσωση της σχέσης (2).

$$0{,}225 \cdot V_1 - 0{,}125 \cdot V_2 = I_x \rightarrow 0{,}225 \cdot 33 - 0{,}125 \cdot 51{,}857 \Rightarrow I_x = 0{,}942 \text{ (A)}$$

Για τις τάσεις των κλάδων, προκύπτουν:

Κλάδος πηγής 33A : $V_{\alpha} = V_1 = 33$ (V), το "–" είναι στον κόμβο ↓

Κλάδος αντίστασης 10Ω : $V_b = V_1 = 33$ (V), το "–" είναι στον κόμβο ↓

Κλάδος αντίσταση 8Ω : $V_c = V_2 - V_1 = 18{,}857$ (V), το "–" είναι στον κόμβο (1)

Κλάδος πηγής 4,95A : $V_d = V_2 = 51{,}857$ (V), το "–" είναι στον κόμβο ↓

Κλάδος αντίστασης 20Ω : $V_e = V_2 = 51{,}857$ (V), το "–" είναι στον κόμβο ↓

Τα ρεύματα στους κλάδους προκύπτουν:

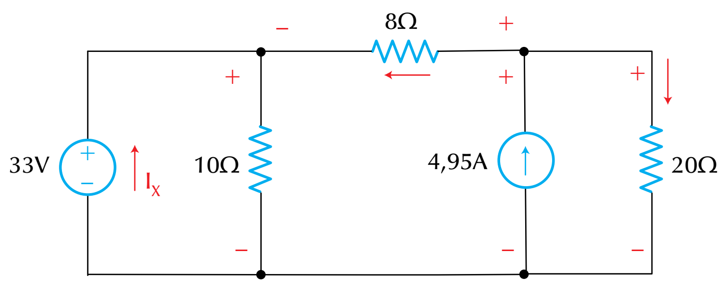
Κλάδος πηγής 33(V) : $I_{\alpha} = I_x = 0{,}942$(A), φορά από κόμβο ↓ σε κόμβο (1)

Κλάδος αντίστασης 10Ω: $I_b = \dfrac{33}{10} = 3{,}3$ (A), φορά από κόμβο (1) σε κόμβο ↓

Κλάδος αντίστασης 8Ω : $I_c = \dfrac{18{,}857}{8} = 2{,}357$ (A), φορά από κόμβο (2) σε κόμβο (1)

Κλάδος αντίστασης 20Ω : $I_e = \dfrac{51{,}857}{20} = 2{,}592$ (A), φορά από κόμβο (2) σε κόμβο ↓

Έτσι, το κύκλωμα με τις τάσεις και με τις φορές των ρευμάτων, γίνεται:



Οι ισχείς των πηγών, προκύπτουν:

$$P_{(33V)} = 33 \cdot I_x = 33 \cdot 0{,}942 \Rightarrow P_{(33V)} = 31{,}086 \text{ (W), παρεχόμενη}$$

$$P_{(4{,}95A)} = 4{,}95 \cdot V_d = 4{,}95 \cdot 51{,}857 = 256{,}69 \text{ (W), παρεχόμενη}$$

β) Κύκλωμα με ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές ρεύματος και τάσης

Εάν το κύκλωμα περιέχει και ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές ρεύματος και τάσης, η ανάπτυξη και η πορεία της Μ.Κ. έχε ως εξής:

β.1) Εάν όλες οι πηγές τάσεις (ανεξάρτητες και εξαρτημένες) μετατρέπονται σε πηγές ρεύματος (ανεξάρτητες και εξαρτημένες αντίστοιχα), τότε μετατρέπονται και στο ισοδύναμο κύκλωμα που περιέχει πλέον μόνο πηγές ρεύματος, εκτελούνται τα εξής βήματα:

i) Ορίζεται ένας κόμβος σαν κόμβος αναφοράς. Παρά το γεγονός ότι αυτός μπορεί να εκλεγεί αυθαίρετα, σκόπιμο είναι να ορίζεται ο κόμβος που συνδέεται με τους περισσότερους κλάδους, διότι έτσι θα προκύψουν απλούστερες εξισώσεις.

ii) Για τους υπόλοιπους δύο (2) κόμβους αφού αριθμηθούν, ορίζονται οι τάσεις V_1, V_2 ως προς τον κόμβο αναφοράς.

iii) Γράφονται οι εξισώσεις κόμβων όπως και στην περίπτωση α).

iv) Τα εξαρτώμενα μεγέθη που εμφανίζονται στις εξισώσεις εκφράζονται με τους αγνώστους του προβλήματος, δηλαδή με τις κομβικές τάσεις.
Αυτό όμως έχει σαν αποτέλεσμα να εμφανίζονται άγνωστοι (κομβικές τάσεις) και στο 2ο μέλος των εξισώσεων.

v) Ανακατατάσσονται τα στοιχεία των εξισώσεων ώστε οι άγνωστοι να εμφανίζονται μόνο στο αριστερό μέλος αυτών.

vi) Το γραμμικό σύστημα 2x2 που προκύπτει λύνεται όπως και στην περίπτωση α) και οι κομβικές τάσεις είναι πλέον γνωστές.

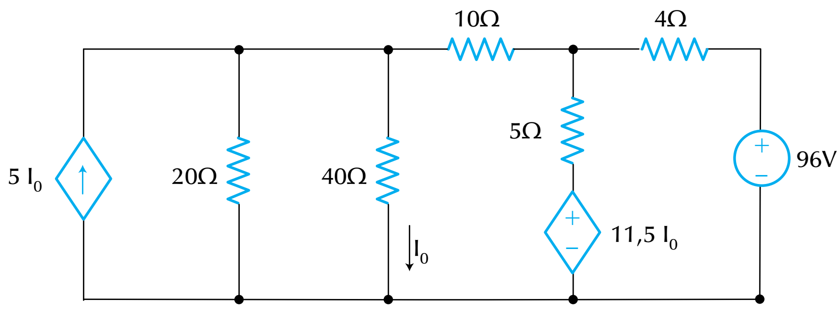
vii) Οι τάσεις όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των κομβικών τάσεων και κατά συνέπεια τα ρεύματα όλων των στοιχείων είναι γνωστά.
Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

☞ *Παρατηρήσεις*

- Μια εξαρτημένη πηγή τάσης θεωρείται μετατρέψιμη σε εξαρτημένη πηγή ρεύματος όταν υπάρχει σε σειρά κάποια αντίσταση και ταυτόχρονα το εξαρτώμενο μέγεθος αυτής δεν βρίσκεται στην αντίσταση αυτή.
- Μια ανεξάρτητη πηγή τάσης θεωρείται μετατρέψιμη σε ανεξάρτητη πηγή ρεύματος όταν υπάρχει σε σειρά κάποια αντίσταση και ταυτόχρονα δεν εμφανίζεται στην αντίσταση αυτή ή στην πηγή εξαρτώμενου μέγεθος κάποιας εξαρτημένης πηγής τάσης ή ρεύματος.

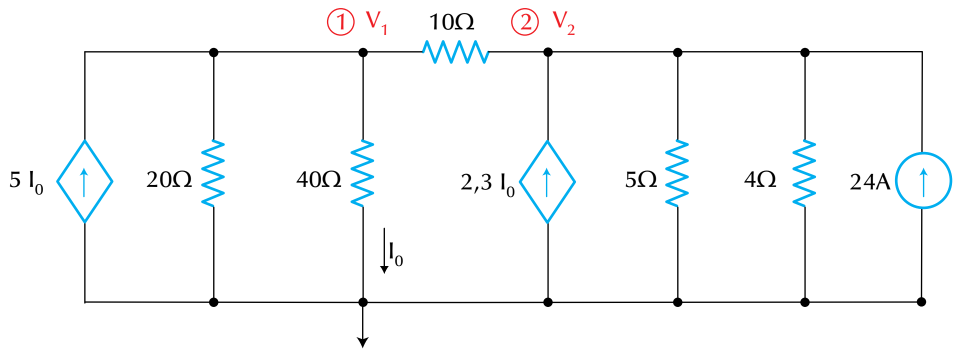
➢ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας τη Μ.Κ., υπολογίστε τις τάσεις όλων των κόμβων.



Λύση

Μετατρέποντας τις πηγές τάσης σε πηγές ρεύματος το κύκλωμα παίρνει τη μορφή



Οι εξισώσεις των κόμβων είναι:

$$\begin{aligned} G_{11}\cdot V_1 + G_{12}\cdot V_2 &= \Sigma I_1 \\ G_{21}\cdot V_1 + G_{22}\cdot V_2 &= \Sigma I_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

όπου: $G_{11} = \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{10} = 0{,}175$ $\quad G_{22} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{4} = 0{,}55,$

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{10} = -0{,}1$$

$$\Sigma I_1 = 5I_0, \;\; \Sigma I_2 = 2{,}3I_0 + 24$$

Επομένως, οι εξισώσεις της σχέσης (1) παίρνουν τη μορφή:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}175\cdot V_1 - 0{,}1\cdot V_2 &= 5I_0 \\ -0{,}1\cdot V_1 + 0{,}55\cdot V_2 &= 2{,}3I_0 + 24 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{I_0 = \frac{V_1}{40}} \left.\begin{aligned} 0{,}175\cdot V_1 - 0{,}1\cdot V_2 &= \frac{5}{40}\, I_0 \\ -0{,}1\cdot V_1 + 0{,}55\cdot V_2 &= \frac{2{,}3}{40} V_1 + 24 \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow[\text{1ης και 2ης εξίσωσης}]{\text{ανακατανομή στοιχείων}} \begin{array}{l} 0{,}05 \cdot V_1 - 0{,}1 \cdot V_2 = 0 \\ -0{,}1575 \cdot V_1 + 0{,}55 \cdot V_2 = 24 \end{array} \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα (2) με τη μέθοδο Cramer, προκύπτει:

$$V_1 = 204{,}25(\text{V}),\;\; V_2 = 102{,}127(\text{V})$$

β.2) Εάν μία πηγή τάσης δεν μετατρέπεται σε πηγή ρεύματος (ή είναι δύσκολη η σύλληψη της μετατροπής), εκτελούνται τα εξής βήματα.

i) Ορίζεται και πάλι ο κόμβος αναφοράς

ii) Για τους υπόλοιπους δύο (2) κόμβους αφού αριθμηθούν, ορίζονται οι τάσεις τους V_1, V_2 ως προς τον κόμβο αναφοράς.

iii) Γράφονται οι εξισώσεις κόμβων όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

iv) Για την "εικονική" πηγή ρεύματος γράφεται μια εξίσωση που περιγράφει την αντίστοιχη πηγή τάσης με τις κομβικές τάσεις V_1, V_2 και φτιάχνεται ένα καινούριο σύστημα εξισώσεων με πρώτη εξίσωση αυτήν και δεύτερη όποια από τις αρχικές δύο βολεύει (να μην περιέχει το εικονικό ρεύμα). Υπάρχει περίπτωση καμμία από τις δύο να μη βολεύει, οπότε προστίθενται ή αφαιρούνται αυτές με στόχο την εξαφάνιση του εικονικού ρεύματος που εμφανίστηκε στην αρχή.

v) Τα εξαρτώμενα μεγέθη που εμφανίζονται στις εξισώσεις εκφράζονται με τους αγνώστους που προβλήματος, δηλαδή με τις κομβικές τάσεις.

vi) Αυτό όμως έχει σαν αποτέλεσμα να εμφανίζονται άγνωστοι (κομβικές τάσεις) και στο 2ο μέλος των εξισώσεων.

vii) Ανακατατάσσονται στοιχεία των εξισώσεων ώστε οι άγνωστοι να εμφανίζονται μόνο στο αριστερό μέλος αυτών.

vii) Το γραμμικό σύστημα 2x2 που προκύπτει λύνεται όπως και στην περίπτωση α) και οι κομβικές τάσεις είναι πλέον γνωστές.

viii) Οι τάσεις όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των κομβικών τάσεων και κατά συνέπεια τα ρεύματα όλων των στοιχείων είναι γνωστά. Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

☞ *Παρατήρηση*

• Ο υπολογισμός του ρεύματος που διαρρέει τη μη μετατρέψιμη πηγή τάσης (ανεξάρτητη ή εξαρτημένη) γίνεται από την εξίσωση που αφαιρέθηκε από την αρχική μορφή του συστήματος, καθότι οι κομβικές τάσεις είναι πλέον γνωστές.

Σχόλιο: ***Σαν παράδειγμα, να λυθεί το προηγούμενο κύκλωμα (περίπτωση β.1) αφαιρώντας την αντίσταση των 4Ω (οπότε, η πηγή των 96V είναι μη μετατρέψιμη).***

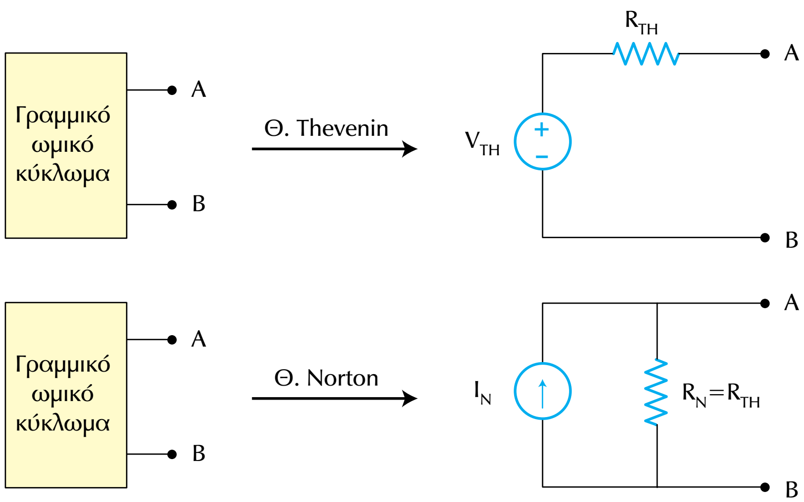
4-3. Θεώρημα Thevenin και Norton

Είναι από τα σπουδαιότερα θεωρήματα των ηλεκτρικών κυκλωμάτων, κυρίως όταν ενδιαφερόμαστε για ένα συγκεκριμένο μέρος του κυκλώματος ή όταν εξετάζουμε προβλήματα προσαρμογής (για μέγιστη μεταφορά ισχύος).

Για τα γραμμικά ωμικά κυκλώματα το θεώρημα Thevenin και Norton διατυπώνεται ως εξής:

❑ Δοθέντος ενός γραμμικού ωμικού κυκλώματος και δύο ανοικτών ακροδεκτών αυτού Α και Β, μπορεί να αντικατασταθεί το κύκλωμα αυτό από μια ανεξάρτητη πηγή τάσης σε σειρά με μία αντίσταση (θεώρημα Thevenin) ή από μια ανεξάρτητη πηγή ρεύματος παράλληλη με την ίδια αντίσταση (θεώρημα Norton).

Σχηματικά το θεώρημα Thevenin και Norton έχει ως εξής:



Σχήμα 4.1. *Θεώρημα Thevenin και Norton*

Η φυσική σχημασία των παραμέτρων που εμφανίζονται στα ισοδύναμα κυκλώματα κατά Thevenin και Norton είναι:

V_{TH}: Είναι η τάση ανοικτοκυκλώσεως του γραμμικού ωμικού κυκλώματος μεταξύ των ακροδεκτών A και B.

I_N: Είναι το ρεύμα βραχυκυκλώσεως του γραμμικού ωμικού κυκλώματος μεταξύ των ακροδεκτών A και B.

$R_{TH}=R_{TH}$: Είναι η αντίσταση του γραμμικού ωμικού κυκλώματος μεταξύ των ακροδεκτών A και B όταν αυτό είναι “ανενεργό”, δηλαδή όταν έχουν μηδενισθεί οι πηγές του.

Οι τρεις αυτές παράμετροι συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση:

$$R_{TH} = R_N = \frac{V_{TH}}{I_N} \tag{4.3}$$

Η ανάλυση και η πορεία της τεχνικής που ακολουθείται για τον υπολογισμό των παραμέτρων των ισοδυνάμων κυκλωμάτων κατά Thevenin και Norton, εξαρτάται από το είδος των πηγών που περιέχει το γραμμικό ωμικό κύκλωμα.

Διακρίνονται λοιπόν οι εξής περιπτώσεις:

α) Εάν το κύκλωμα περιέχει μόνο ανεξάρτητες πηγές

i) Για την εύρεση της V_{TH} υπολογίζεται η τάση ανοικτοκλώσεως μεταξύ των ακροδεκτών A και B, εφαρμόζοντας όλες τις τεχνικές που αναλύθηκαν μέχρι τώρα (M.A.B, M.K, διαιρέτη τάσης, διαιρέτη ρεύματος, κ.λ.π.).

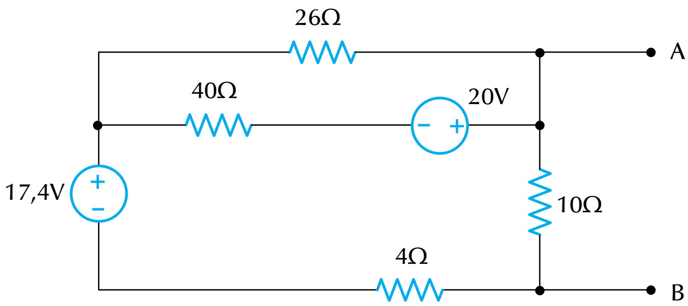
ii) Για την εύρεση της R_{TH} μηδενίζονται όλες οι πηγές (πηγές τάσης βραχυκυκλώνονται, πηγές ρεύματος ανοικτοκυκλώνονται) και υπολογίζεται η ολική αντίσταση του κυκλώματος “κοιτώντας” από τους ακροδέκτες A και B.

iii) Για την εύρεση του I_N βραχυκυκλώνονται οι ακροδέκτες A και B και υπολογίζεται το ρεύμα που περνάει από το βραχυκύκλωμα αυτό, εφαρμόζοντας όλες τις τεχνικές (M.A.B, M.K. διαιρέτη τάσης, διαιρέτη ρεύματος, κ.λ.π.).

iv) Για την εύρεση της R_N ισχύουν ότι και για την R_{TH}, καθότι $R_N = R_{TH.}$

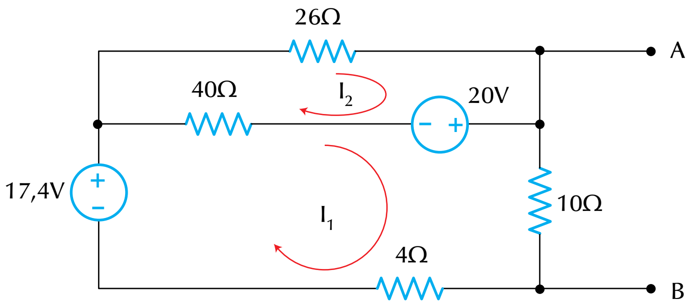
➢ Παράδειγμα

Για το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε το ισοδύναμο κατά Thevenin κύκλωμα από τους ακροδέκτες A και B και στη συνέχεια το ισοδύναμο κατά Norton.



Λύση

Εύρεση της V_{TH}:



Οι εξισώσεις των Α.Β είναι:

$$\left.\begin{aligned} R_{11}\cdot I_1 + R_{12}\cdot I_2 &= \Sigma V_1 \\ R_{21}\cdot I_1 + R_{22}\cdot I_2 &= \Sigma V_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 54\cdot I_1 - 40\cdot I_2 &= 37{,}4 \\ -40\cdot I_1 + 66\cdot I_2 &= -20 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Λύνοντας το σύστημα (1) προκύπτει:

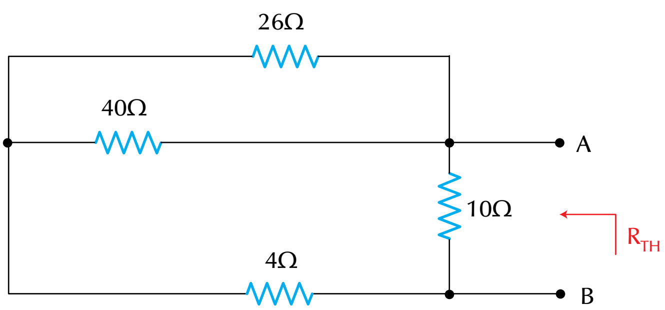
$$I_1 = 0{,}849\ (A) \qquad I_2 = 0{,}219\ (A)$$

Επομένως,

$$V_{TH} = V_{AB} = V_{(10\Omega)} = I_1 \cdot 10 = 0{,}849 \cdot 10 \Rightarrow V_{TH} = 8{,}49\ (V)$$

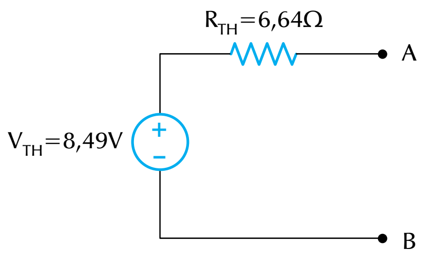
Εύρεση της R_{TH}:

Μηδενίζοντας όλες τις πηγές το κύκλωμα γίνεται:



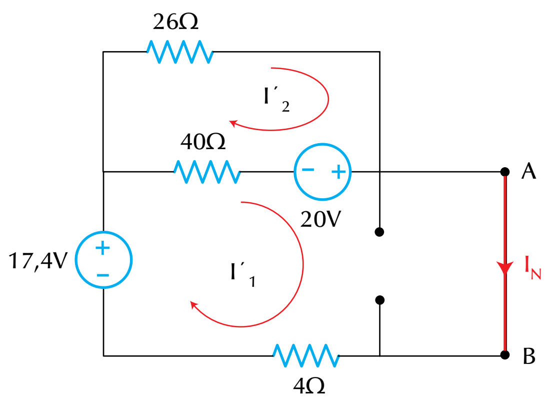
$R_{TH} = R_{AB} = [26//40 + 4]//10 = (15{,}75 + 4)//10 = 19{,}75//10 \Rightarrow R_{TH} = 6{,}64\ (\Omega)$

Άρα, το ισοδύναμο κατά Thevenin κύκλωμα είναι:



Εύρεση του I_N:

Βραχυκυκλώνοντας τους ακροδέκτες A και B, το κύκλωμα παίρνει τη μορφή: (η αντίσταση των 10Ω βραχυκλώνεται και επομένως αγνοείται).



Οι εξισώσεις Α.Β είναι:

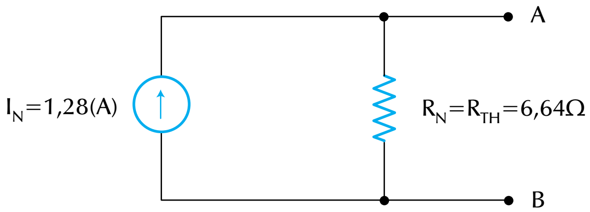
$$\left.\begin{array}{l} R'_{11}\cdot I'_1 + R'_{12}\cdot I'_2 = \Sigma V'_1 \\ R'_{21}\cdot I'_1 + R'_{22}\cdot I'_2 = \Sigma V'_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 44\cdot I'_1 - 40\cdot I'_2 = 37{,}4 \\ -40\cdot I'_1 + 66\cdot I'_2 = -20 \end{array} \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα (1) προκύπτει:

$$I'_1 = 1{,}28\ (A) \qquad \text{και} \qquad I'_2 = 0{,}47\ (A)$$

Άρα $\qquad I_N = I'_1 = 1{,}28\ (A)$

Επομένως, το ισοδύναμο κατά Norton κύκλωμα είναι:



Σχόλιο: ***Στο ίδιο αποτέλεσμα θα μπορούσε κάποιος να βρεθεί και έμμεσα από το ισοδύναμο κατά Thevenin κύκλωμα, αφού***

$$I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = \frac{8,49}{6,64} = 1,28\ (A)$$

β) Εάν το κύκλωμα περιέχει ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές

Στην περίπτωση αυτή, εκτελούνται τα εξής βήματα:

i) Υπολογίζεται η V_{TH} όπως και στην περίπτωση (α)

ii) Υπολογίζεται το I_N όπως και στην περίπτωση (α) και

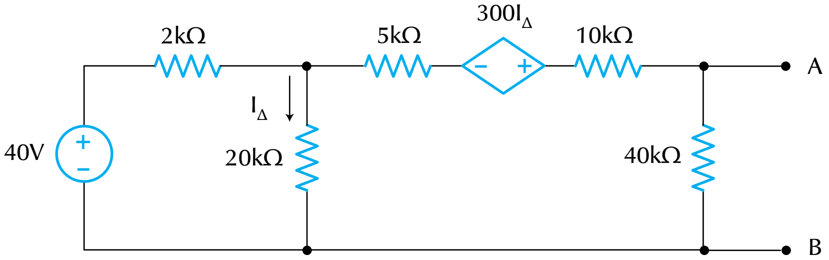
iii) Υπολογίζεται η αντίσταση R_{TH} (ή R_N) από τη σχέση $R_{TH} = \frac{V_{TH}}{I_N} = R_N$

☞ *Παρατήρηση*

● Η αντίσταση R_{TH} (ή R_N) δεν μπορεί να υπολογιστεί όπως και στην περίπτωση (α) διότι το κύκλωμα δεν μπορεί να "αδρανοποιηθεί" αφού οι εξαρτημένες πηγές είναι πάντα ενεργές.

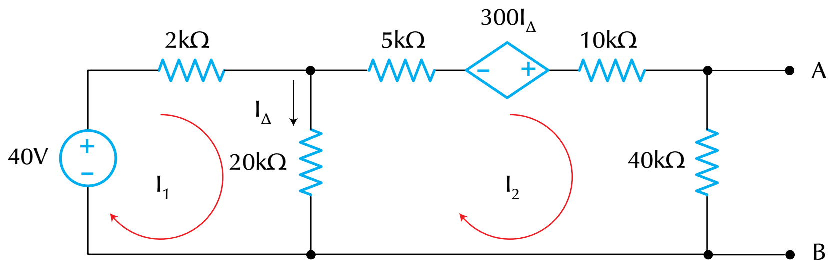
➢ Παράδειγμα

Για το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε το ισοδύναμο κατά Thevenin και Norton κύκλωμα από τους ακροδέκτες A και B.



Λύση

Υπολογισμός της V_{TH}:



Οι εξισώσεις των Α.Β είναι:

$$\left.\begin{array}{l} R_{11}\cdot I_1 + R_{12}\cdot I_2 = \Sigma V_1 \\ R_{21}\cdot I_1 + R_{22}\cdot I_2 = \Sigma V_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 22\cdot I_1 - 20\cdot I_2 = 40 \\ -20\cdot I_1 + 75\cdot I_2 = 300\cdot I_\Delta \end{array}\right\} \xrightarrow{I_\Delta = I_1 - I_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} 22\cdot I_1 - 20\cdot I_2 = 40 \\ -20\cdot I_1 + 75\cdot I_2 = 300\,(I_1 - I_2) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{2ης εξίσωσης}]{\text{ανακατανομή στοιχείων}} \begin{array}{l} 22\cdot I_1 - 20\cdot I_2 = 40 \\ -320\cdot I_1 + 375\cdot I_2 = 0 \end{array} \qquad (1)$$

Λύνοντας το σύστημα (1), προκύπτει:

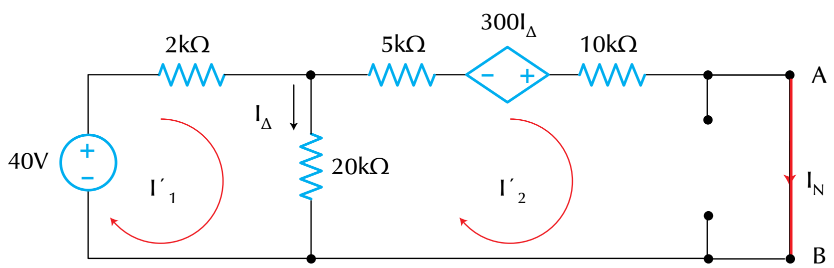
$$I_1 = 8{,}11\ (\text{mA}) \quad I_2 = 6{,}92\ (\text{mA})$$

Επομένως

$$V_{TH} = V_{AB} = V_{(40K\Omega)} = 40\cdot I_1 = 40\cdot 8{,}11 \Rightarrow V_{TH} = 324{,}4\ (\text{V})$$

Υπολογισμός του I_N:

Βραχυκλώνοντας τους ακροδέκτες Α, Β (η αντίσταση των 40(ΚΩ) βραχυκλώνεται) το κύκλωμα παίρνει τη μορφή:



Οι εξισώσεις των Α.Β είναι:

$$\left.\begin{aligned} R'_{11}\cdot I'_1 + R'_{12}\cdot I'_2 &= \Sigma V'_1 \\ R'_{21}\cdot I'_1 + R'_{22}\cdot I'_2 &= \Sigma V'_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 22\cdot I'_1 - 20\cdot I'_2 &= 40 \\ -20\cdot I'_1 + 35\cdot I'_2 &= 300\cdot I_\Delta \end{aligned}\right\} \xrightarrow{I_\Delta = I'_1 - I'_2}$$

$$\left.\begin{aligned} 22\cdot I'_1 - 20\cdot I'_2 &= 40 \\ -20\cdot I'_1 + 35\cdot I'_2 &= 300\,(I'_1 - I'_2) \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{2ης εξίσωσης}]{\text{ανακατανομή στοιχείων}} \begin{aligned} 22\cdot I'_1 - 20\cdot I'_2 &= 40 \\ -320\cdot I'_1 + 335\cdot I'_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

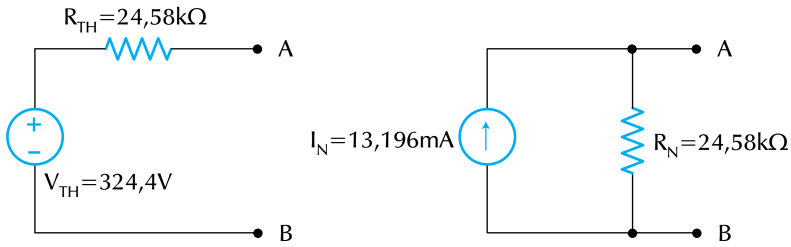
Λύνοντας το σύστημα (2), προκύπτει:

$$I'_1 = 13{,}81\ (\text{mA}) \qquad I'_2 = 13{,}196\ (\text{mA})$$

Επομένως: $I_N = I'_2 = 13{,}96$ (mA) και κατά συνέπεια:

$$R_{TH} = R_N = \frac{V_{TH}}{I_N} = \frac{324{,}4}{13{,}196} \Rightarrow R_{TH} = R_N = 24{,}58\ (\text{K}\Omega)$$

Άρα, τα ισοδύναμα κυκλώματα κατά Thevenin και Norton είναι:



γ) Εάν το κύκλωμα περιέχει μόνο εξαρτημένες πηγές

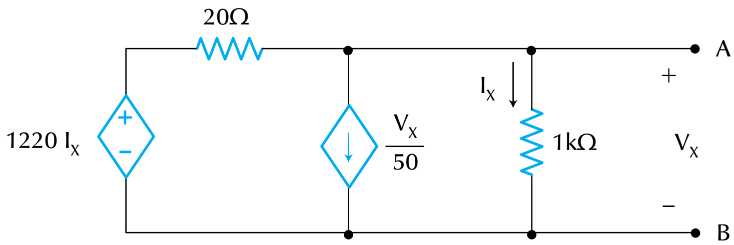
Στην περίπτωση αυτή επειδή δεν υπάρχουν ανεξάρτητες πηγές, προφανώς $V_{TH} = 0$, $I_N = 0$. Επομένως, η εύρεση του ισοδυνάμου κυκλώματος κατά Thevenin και Norton, αποσκοπεί στον υπολογισμό της αντίστασης $R_{TH} = R_N$, έτσι ώστε να γνωρίζει κανείς την ωμική συμπεριφορά του όταν αυτό συνδεθεί σε άλλο κύκλωμα.

Αυτό πετυχαίνεται ως εξής:

Συνδέουμε στους ακροδέκτες Α και Β μια ανεξάρτητη πηγή ρεύματος 1 (A) και υπολογίζουμε με τις γνωστές τεχνικές την τάση Vx που επικρατεί στα άκρα αυτής. Επειδή δε $V_x = R_{TH}\cdot 1$ (A), συμπεραίνουμε ότι η R_{TH} έχει τιμή ίση με την τιμή της τάσης V_x σε μονάδες αντίστασης, δηλαδή σε (Ω).

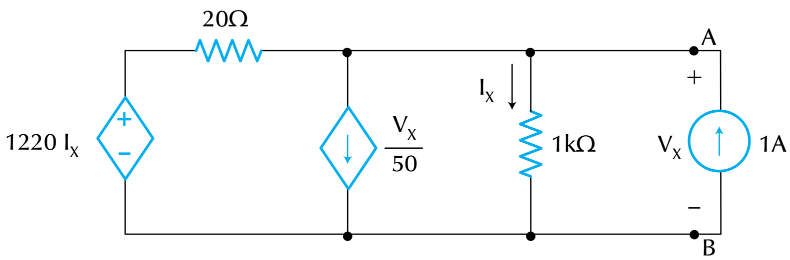
➢ Παράδειγμα

Για το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε το ισοδύναμο κατά Thevenin και Norton κύκλωμα από τους ακροδέκτες Α και Β.

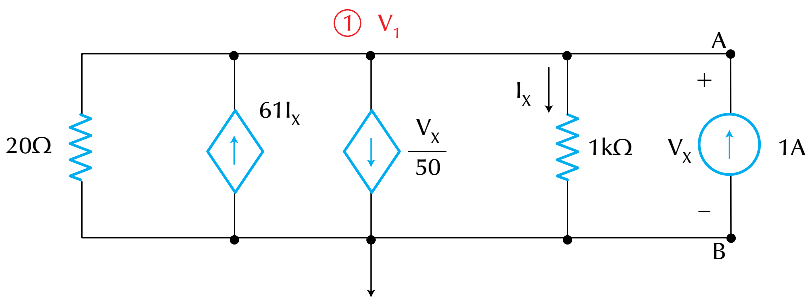


Λύση

Συνδέουμε τους ακροδέκτες Α και Β μια ανεξάρτητη πηγή ρεύματος 1 (A) και το κύκλωμα γίνεται:



Μετατρέποντας την εξαρτημένη πηγή τάσης σε εξαρτημένη πηγή ρεύματος και εφαρμόζοντας τη Μ.Κ. προκύπτει:



$$G_{11} \cdot V_1 = \Sigma I_1 \Rightarrow \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{1000}\right) \cdot V_1 = 61 I_X - \frac{V_X}{50} + 1 \xrightarrow[V_X = V_1]{I_X = \frac{V_1}{1000}}$$

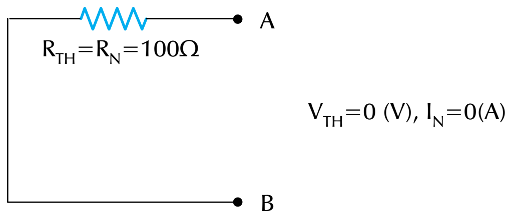
$$\rightarrow 0{,}051 \cdot V_1 = 61 \cdot \frac{V_1}{1000} - \frac{V_1}{50} + 1 \Rightarrow 0{,}051 \cdot V_1 = 0{,}061 V_1 - 0{,}02 V_1 + 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0{,}01 \cdot V_1 = 1 \rightarrow V_1 = 100 \text{ (V)} = V_X$$

και κατά συνέπεια

$$R_{TH} = 100\ (\Omega)$$

Άρα, το ισοδύναμο κατά Thevenin και Norton κύκλωμα είναι:

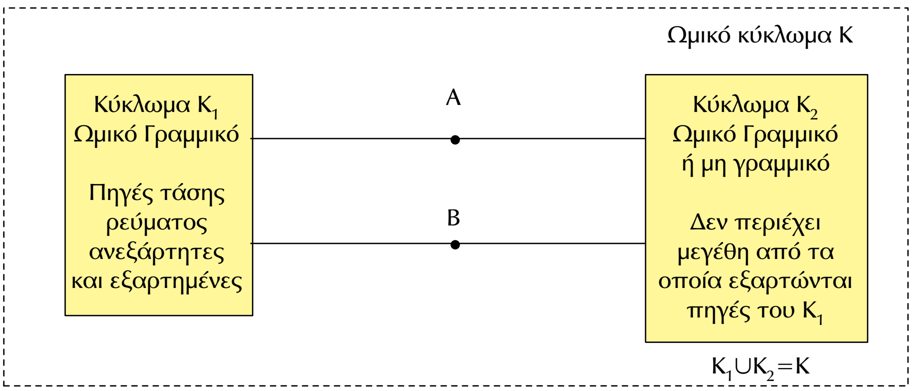


Παρατηρήσεις

Και οι τρεις περιπτώσεις που εξετάσθηκαν στην παράγραφο αυτή με στόχο την εύρεση του ισοδυνάμου κατά Thevenin και Norton κυκλώματος, συναντώνται πολύ συχνά στην πράξη.

- Η βασική όμως προϋπόθεση της γραμμικότητας του ωμικού κυκλώματος για την εφαρμογή των θεωρημάτων αυτών, δεν είναι απαραίτητη για το φορτίο (συνήθως ωμικό) το οποίο συνδέεται στους ακροδέκτες Α και Β με σκοπό την εύρεση της τάσης, του ρεύματος ή της ισχύος σ' αυτό. Το φορτίο μπορεί να είναι είτε γραμμικό είτε μη γραμμικό.
- Ένα άλλο σημείο το οποίο πρέπει κανείς να προσέχει είναι ότι, όταν απομονώνει κάποιο τμήμα του κυκλώματος με σκοπό στο υπόλοιπο να εφαρμόσει τα θεωρήματα αυτά, πρέπει να είναι σίγουρος ότι δεν υπάρχει εξαρτώμενο μέγεθος το οποίο να ανήκει στο απομονωμένο τμήμα, καθότι η διαδικασία μετατροπής του υπολοίπου κυκλώματος κατά Thevenin και Norton είναι ανεξάρτητη από τα δομικά στοιχεία του απομονωμένου τμήματος.

Αυτές οι παρατηρήσεις φαίνονται σχηματικά στο παρακάτω σχήμα.

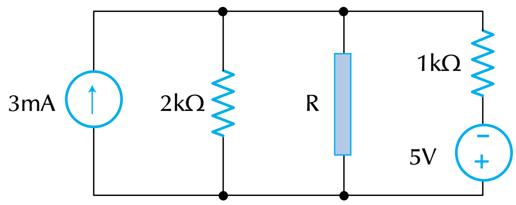


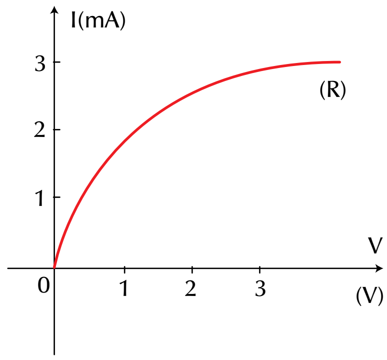
Σχήμα 4.2 *Απαραίτητες προϋποθέσεις για την εφαρμογή των θεωρ. Thevenin και Norton*

• Μία σπουδία εφαρμογή του θεωρήματος Thevenin για τον υπολογισμό ισχύος σ' ένα συγκεκριμένο τμήμα ενός κυκλώματος, είναι όταν το τμήμα αυτό αποτελείται από μη γραμμική αντίσταση γνωστής χαρακτηριστικής καμπύλης V – I. Ο τρόπος εργασίας στις περιπτώσεις αυτές, φαίνεται μέσα από το ακόλουθο παράδειγμα.

➢ Παράδειγμα

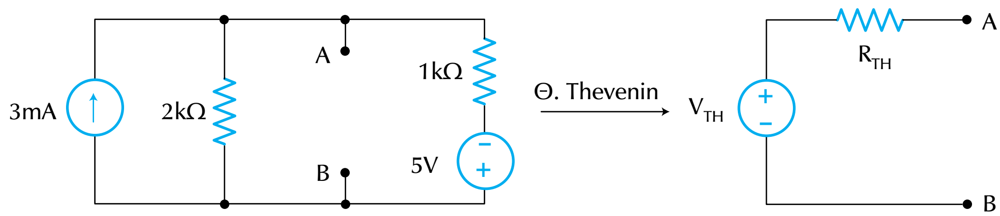
Να υπολογισθεί η ισχύς στη μη γραμμική αντίσταση του παρακάτω κυκλώματος της οποίας δίνεται η χαρακτηριστική καμπύλη.





Λύση

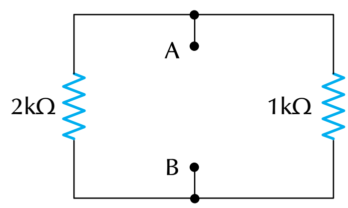
Απομονώνουμε τη μη γραμμική αντίσταση R και για το υπόλοιπο κύκλωμα θα βρούμε το ισοδύναμο κατά Thevenin αυτού, δηλαδή



Εύρεση της R_{TH}:

Μηδενίζοντας τις πηγές του κυκλώματος έχουμε:

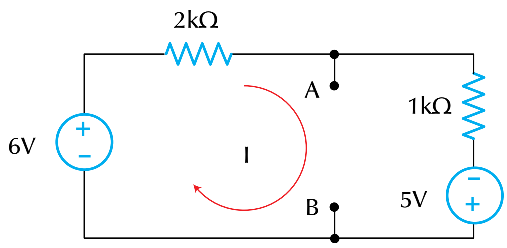
$$R_{TH} = R_{AB} = 2//1 = \frac{2 \cdot 1}{2+1} = \frac{2}{3}\ (\text{K}\Omega)$$



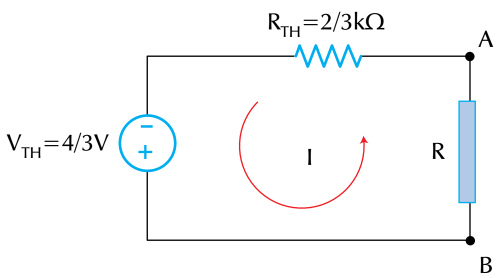
Εύρεση της V_{TH}:

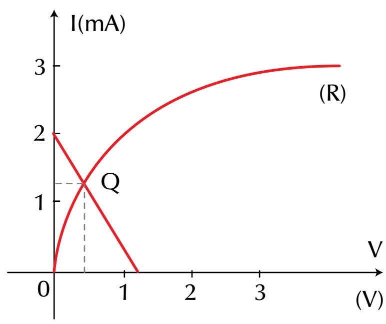
Μετατρέποντας την πηγή ρεύματος σε πηγή τάσης και εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm, προκύπτει:

$$I = \frac{6+5}{2+1} = \frac{11}{3}\ (mA) \quad \text{και} \quad V_{TH} = V_{AB} = I \cdot 1 - 5 = \frac{11}{3} \cdot 1 - 5 \Rightarrow V_{TH} = -\frac{4}{3}\ (V)$$



Άρα, το ισοδύναμο κατά Thevenin κύκλωμα είναι:





Αν V η τάση που επικρατεί στα άκρα της μη γραμμικής αντίστασης τότε:

$$V_{TH} = I \cdot R_{TH} + V \Rightarrow \frac{4}{3} = I \cdot \frac{2}{3} + V$$

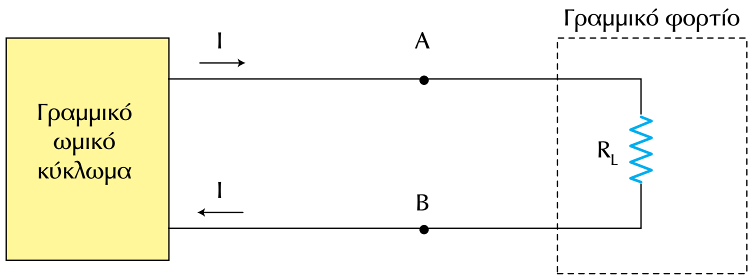
Η γραφική παράσταση της σχέσης αυτής (ευθεία γραμμή) τέμνει τη χαρακτηριστική της μη γραμμικής αντίστασης στο σημείο Q (σημείο λειτουργίας) του οποίου οι συντεταγμένες είναι: V = 0,45 (V) και I = 1,45 (mA).

Επομένως, η ισχύς στη μη γραμμική αντίσταση είναι:

$$P_R = 0{,}45 \cdot 1{,}45 = 0{,}6525\ (mW)$$

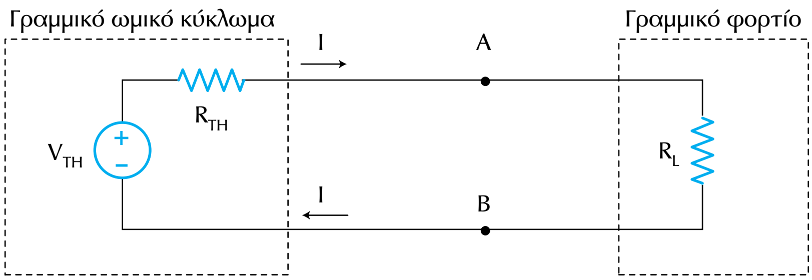
4.4. Θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος

Έστω γραμμικό ωμικό κύκλωμα το οποίο τροφοδοτεί γραμμικό φορτίο R_L όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.3. *Τροφοδοσία γραμμικού φορτίου από γραμμικό ωμικό κύκλωμα*

Σύμφωνα με το θεώρημα Thevnin, το κύκλωμα αυτό μετασχηματίζεται ως εξής



Σχήμα 4.4. *Ισοδύναμο κατά Thevenin κύκλωμα του κυκλώματος του σχ. 4.3.*

Για μέγιστη μεταφορά ισχύος στο φορτίο R_L, αποδεικνύεται ότι

$$R_L = R_{TH} \tag{4.4}$$

και η μέγιστη μεταφερόμενη ισχύς πάνω στο φορτίο είναι ίση με:

$$P_{max} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}} \tag{4.5}$$

Εάν, αντί του πολύπλοκου γραμμικού κυκλώματος έχουμε μία πραγματική πηγή τάσης V_s και εσωτερικής αντίστασης R_s, τότε προφανώς για μέγιστη μεταφορά ισχύος σε φορτίο R_L πρέπει να ισχύει η σχέση

$$R_L = R_s \tag{4.6}$$

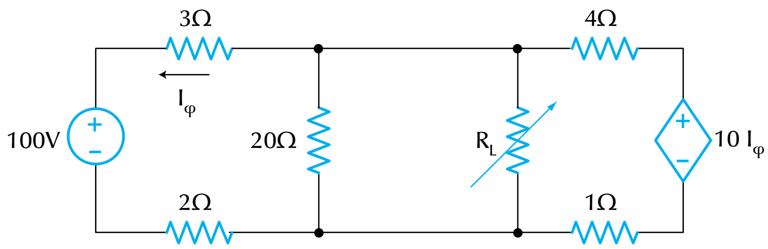
δηλαδή, το εξωτερικό φορτίο πρέπει να είναι ίσο με την εσωτερική αντίσταση της πηγής, η δε μέγιστη ισχύς είναι

$$P_{max} = \frac{V_s^2}{4R_s} \tag{4.7}$$

Το θεώρημα αυτό έχει πολλές εφαρμογές στην πράξη, κυρίως σε θέματα προσαρμογής φορτίου -πηγής μέσω γραμμών μεταφοράς, στις τηλεπικοινωνίες, σε ηλεκτρονικά κυκλώματα, κ.λ.π.

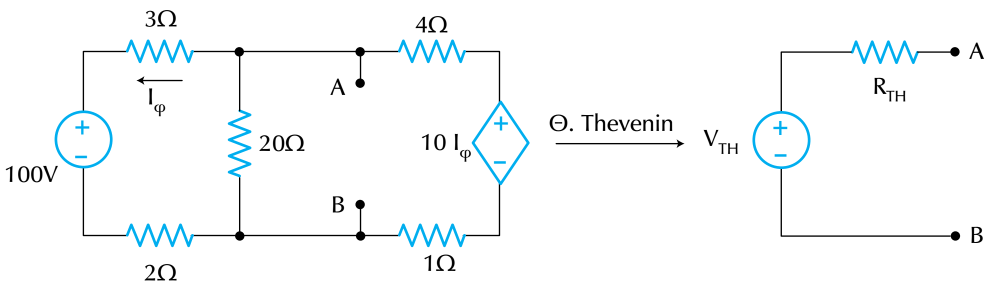
➢ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την τιμή της μεταβλητής αντίστασης R_L έτσι ώστε να έχουμε μέγιστη μεταφορά ισχύος σ' αυτήν και στη συνέχεια βρείτε τη μέγιστη αυτή ισχύ.

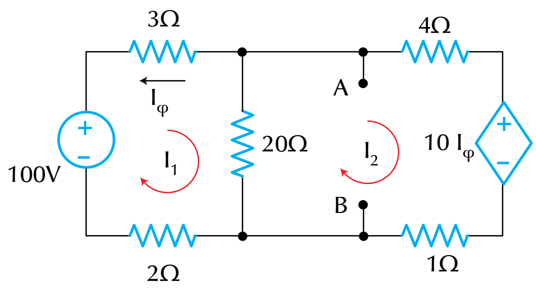


Λύση

Απομονώνουμε τη μεταβλητή αντίσταση R_L και για το υπόλοιπο κύκλωμα θα προσπαθήσουμε να βρούμε το ισοδύναμο κατά Thevenin αυτού, δηλαδή



Εύρεση της V_{TH}:



Οι εξισώσεις των Α·Β είναι:

$$\left.\begin{aligned} R_{11}\cdot I_1 + R_{12}\cdot I_2 &= \Sigma V_1 \\ R_{21}\cdot I_1 + R_{22}\cdot I_2 &= \Sigma V_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 25\cdot I_1 - 20\cdot I_2 &= 100 \\ -20\cdot I_1 + 25\cdot I_2 &= -10\, I_φ \end{aligned}\right\} \xrightarrow{I_φ = -I_1}$$

$$\left.\begin{aligned} 25\cdot I_1 - 20\cdot I_2 &= 100 \\ -20\cdot I_1 + 25\cdot I_2 &= -10\,(-I_1) \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{2ης εξίσωσης}]{\text{ανακατανομή στοιχείων}} \begin{aligned} 25\cdot I_1 - 20\cdot I_2 &= 100 \\ -30\cdot I_1 + 25\cdot I_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Λύνοντας το σύστημα (1) προκύπτει:

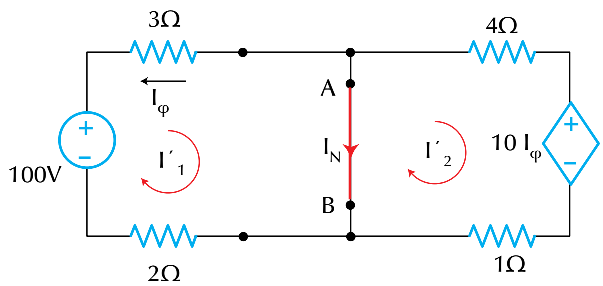
$$I_1 = 100\ (A),\quad I_2 = 120\ (A)$$

Επομένως

$$V_{TH} = V_{AB} = 20\ (I_1 - I_2) = 20\ (100 - 120) = -400\ (V)$$

Εύρεση του I_N:

Βραχυκυκλώνοντας τους ακροδέκτες Α, Β (η αντίσταση 20Ω παραλείπεται) το κύκλωμα παίρνει τη μορφή:



Οι εξισώσεις των Α.Β είναι:

$$\left.\begin{aligned} R'_{11}\cdot I'_1 + R'_{12}\cdot I'_2 &= \Sigma V'_1 \\ R'_{21}\cdot I'_1 + R'_{22}\cdot I'_2 &= \Sigma V'_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 5\cdot I'_1 + 0\cdot I'_2 &= 100 \\ 0\cdot I'_1 + 5\cdot I'_2 &= -10\cdot I_φ \end{aligned}\right\} \xrightarrow{I_φ = -I'_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5\cdot I_1' + 0\cdot I_2' = 100 \\ 0\cdot I_1' + 5\cdot I_2' = -10\,(-I_1') \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{2ης εξίσωσης}]{\text{ανακατανομή στοιχείων}} \begin{array}{l} 5\cdot I_1' + 0\cdot I_2' = 100 \\ -10\cdot I_1' + 5\cdot I_2' = 0 \end{array} \qquad (2)$$

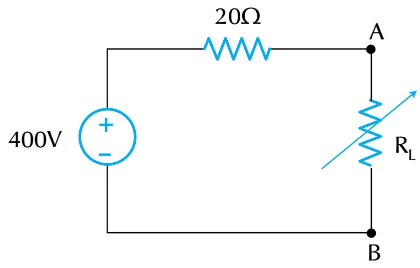
Λύνοντας το σύστημα (2) προκύπτει:

$$I'_1 = 20 \text{ (A)} \quad I'_2 = 40 \text{ (A)}$$

Επομένως $I_N = I'_1 - I'_2 = 20 - 40 \Rightarrow I_N = -20$ (A) και κατά συνέπεια:

$$R_{TH} = \frac{V_{TH}}{I_N} = \frac{-400}{-20} \Rightarrow R_{TH} = 20\,(\Omega)$$

Άρα, το ισοδύναμο κατά Thevenin κύκλωμα είναι:



Για μέγιστη μεταφορά ισχύος στην αντίσταση R_L πρέπει

$$R_L = R_{TH} = 20\ (\Omega)$$

η δε μέγιστη αυτή ισχύς είναι

$$P_{max} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}} = \frac{400^2}{4\cdot 20} \Rightarrow P_{max} = 2000\,(W) = 2\,(KW)$$

4-5. Θεώρημα Επαλληλίας (ή Υπέρθεσης)

Είναι ίσως η σπουδαιότερη αρχή που χαρακτηρίζει τη λειτουργία των γραμμικών ηλεκτρικών κυκλωμάτων και γενικά των γραμμικών συστημάτων.

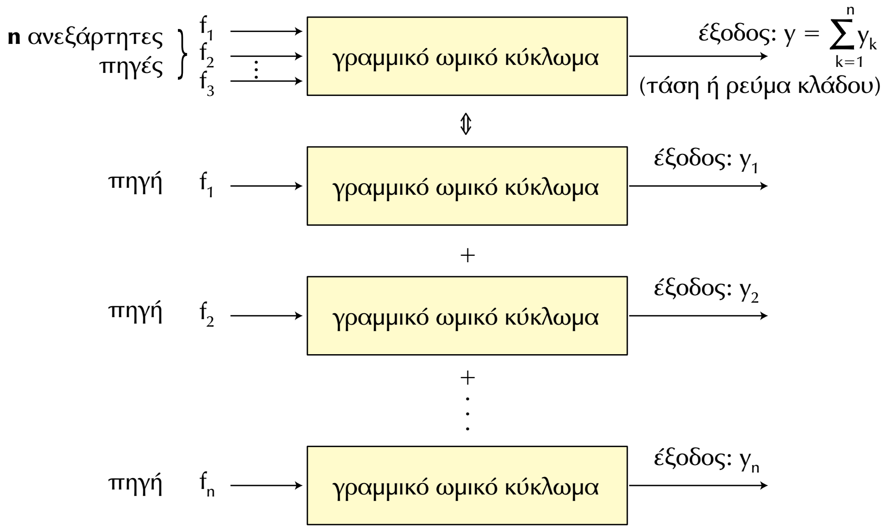
Ανάλογα με το είδος των πηγών του κυκλώματος, διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

α) Εάν το κύκλωμα περιέχει μόνο ανεξάρτητες πηγές

❑ Σ' ένα γραμμικό ωμικό κύκλωμα το οποίο διεγείρεται από **n** ανεξάρτητες πηγές (τάσης, ρεύματος), η τάση ή το ρεύμα ενός κλάδου ισούται με το άθροισμα των **n** επιμέρους τάσεων ή ρευμάτων που προκύπτουν όταν κάθε πηγή ενεργήσει μόνη της στο κύκλωμα.

Αυτό σημαίνει ότι, κάθε φορά μία πηγή είναι ενεργός ενώ οι υπόλοιπες μηδενοποιούνται, δηλαδή, οι πηγές τάσης βραχυκυκλώνονται και οι πηγές ρεύματος ανοικτοκυκλώνονται.

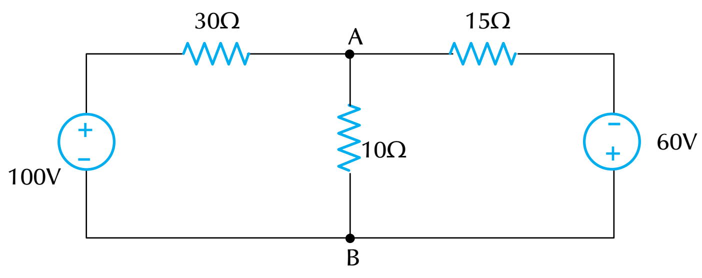
Σχηματικά η αρχή της επαλληλίας έχει ως εξής:



Σχήμα 4.5. *Θεώρημα της Επαλληλίας*

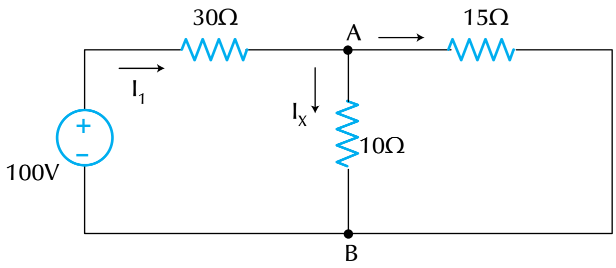
➢ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε το ρεύμα που διέρχεται από την αντίσταση των 10 (Ω) εφαρμόζοντας το θεώρημα της επαλληλίας.



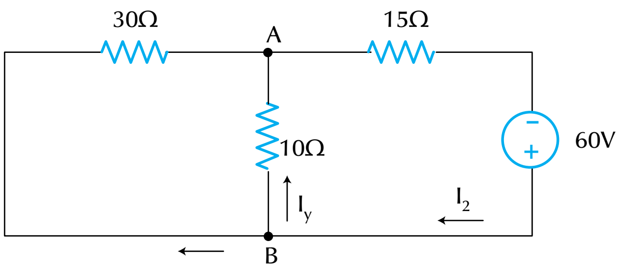
Επίδραση της πηγής των 100 (V):

$$I_X = I_1 \cdot \frac{15}{15+10} = \frac{100}{15//10+30} \cdot \frac{15}{25} \Rightarrow \quad I_X = \frac{100}{6+30} \cdot \frac{15}{25} \Rightarrow I_X = 1{,}67\ (A)$$



Επίδραση της πηγής των 60 (V):

$$I_y = I_2 \cdot \frac{30}{30+10} = \frac{60}{30//10+15} \cdot \frac{30}{40} \Rightarrow I_y = \frac{60}{7{,}5+15} \cdot \frac{30}{40} \Rightarrow I_y = 2\ (A)$$



Επομένως, το ρεύμα της αντίστασης των 10 (Ω) είναι

$$I_{(10\Omega)} = I_y - I_x = 2 - 1{,}67 = 0{,}33\ (A)$$

με φορά από τον κόμβο Β στον κόμβο Α.

β) Εάν το κύκλωμα περιέχει ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές

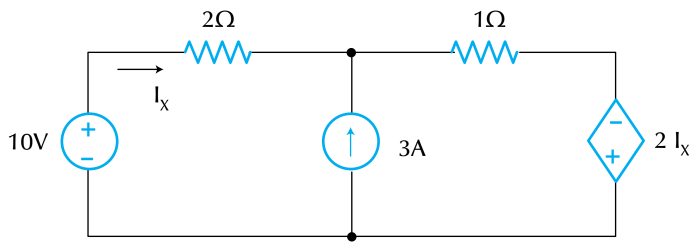
❑ Σ' ένα γραμμικό ωμικό κύκλωμα το οποίο περιέχει ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές (τάσης, ρεύματος), η τάση ή το ρεύμα ενός κλάδου ισούται με το άθροισμα των επιμέρους τάσεων ή ρευμάτων που προκύπτουν όταν κάθε ανεξάρτητη πηγή ενεργήσει μόνη της στο κύκλωμα παρουσία όλων των εξαρτημένων πηγών.

Αυτό σημαίνει ότι, κάθε φορά μία ανεξάρτητη πηγή είναι ενεργός ενώ οι υπόλοιπες *μηδενοποιούνται,* δηλαδή οι ανεξάρτητες πηγές τάσης βραχυκυκλώνονται και οι ανεξάρτητες πηγές ρεύματος ανοικτοκυκλώνονται, ενώ όλες οι εξαρτημένες πηγές είναι ενεργές (εκτός και αν μηδενιστεί το εξαρτώμενο μέγεθος αυτών).

Σχηματικά το θεώρημα της επαλληλίας και στην περίπτωση αυτή είναι όπως και προηγουμένως με τη διαφορά ότι, το πλήθος των επιμέρους κυκλωμάτων είναι ίσο με το πλήθος των ανεξαρτήτων πηγών και όχι όλων των πηγών του κυκλώματος.

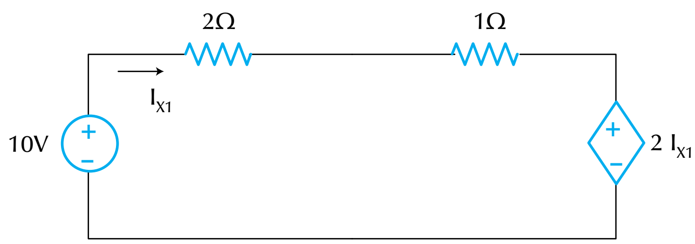
➢ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε το ρεύμα I_x εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας.



Λύση

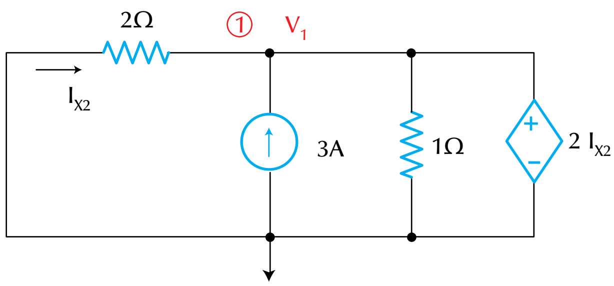
Επίδραση της πηγής των 10 (V):



$$I_{x_1} = \frac{10 - 2I_{x_1}}{3} \Rightarrow 3I_{x_1} = 10 - 2I_{x_1} \Rightarrow I_{x_1} = 2\ (A)$$

Επίδραση της πηγής των 3 (A):

Μετατρέποντας την πηγή τάσης σε πηγή ρεύματος, το κύκλωμα γίνεται:



$$G_{11} \cdot V_1 = \Sigma I_1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot V_1 = 3 - 2I_{x_2} \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot V_1 = 3 - 2 \cdot \left(-\frac{V_1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2{,}5 \cdot V_1 = 3 \Rightarrow V_1 = 1{,}2 \text{ (V)}$$

Άρα $I_{x_2} = -\dfrac{V_1}{2} = -\dfrac{1{,}2}{2} \Rightarrow I_{x_2} = -0{,}6 \text{ (A)}$

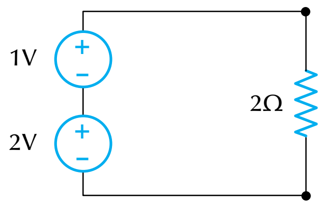
Επομένως,

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} = 2 - 0{,}6 \Rightarrow I_x = 1{,}4 \text{ (A)}$$

Παρατήρηση

- Το θεώρημα της επαλληλίας ισχύει μόνο για την τάση και το ρεύμα. Δεν ισχύει όμως για την ισχύ $P = V \cdot I$ διότι αυτή δεν είναι γραμμικό μέγεθος.

Για την καλύτερη κατανόηση αυτού του πράγματος, ας επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε την ισχύ που καταναλίσκεται στην αντίσταση του παρακάτω κυκλώματος με την αρχή της επαλληλίας.



$$P_{(2\Omega)} = \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2} = \frac{1}{2} + 2 = 2{,}5\text{(W)} \quad \text{(χρήση επαλληλίας)}$$

Το αποτέλεσμα αυτό προφανώς είναι λάθος καθότι,

$$P_{(2\Omega)} = \frac{(1+2)^2}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5\text{(W)}$$

και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, δεν μπορεί να εφαρμοστεί η αρχή της επαλληλίας σε μη γραμμικό μέγεθος, όπως είναι η ισχύς.

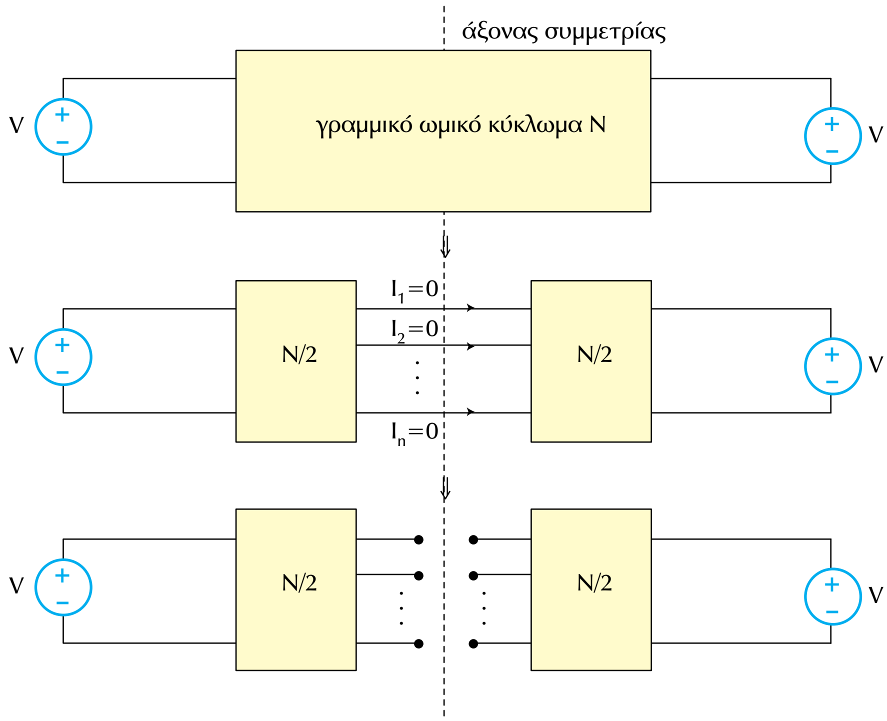
4-6. Θεωρήματα συμμετρικών κυκλωμάτων

Η επίλυση ενός γραμμικού ωμικού κυκλώματος με τις τεχνικές που αναπτύχθηκαν έως τώρα, μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά εάν το κύκλωμα είναι συμμετρικό, δηλαδή εάν έχει κάποιον άξονα συμμετρίας.

Ανάλογα με το είδος της συμμετρίας διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Κυκλώματα με κατακόρυφη συμμετρία και συμμετρική διέγερση

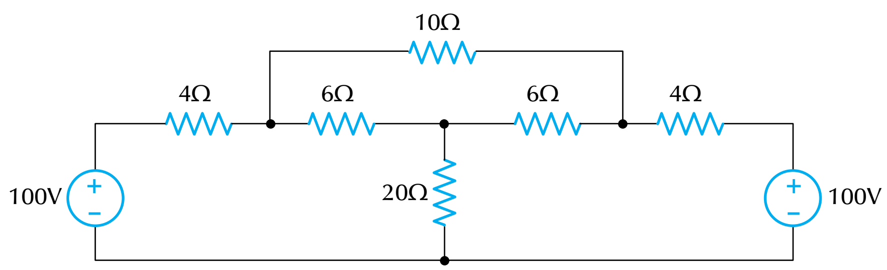
❑ Εάν ένα γραμμικό ωμικό κύκλωμα παρουσιάζει κατακόρυφη συμμετρία και η διέγερση του είναι συμμετρική, αποδεικνύεται ότι μπορούμε να ανοικτοκυκλώσουμε τις συνδέσεις μεταξύ των δύο συμμετρικών μισών του κυκλώματος και να μελετήσουμε ένα τμήμα αυτού, απλοποιώντας έτσι σημαντικά την ανάλυση του αρχικού κυκλώματος.



Σχήμα 4.6. *Κύκλωμα με κατακόρυφη συμμετρία και διέγερση συμμετρική*

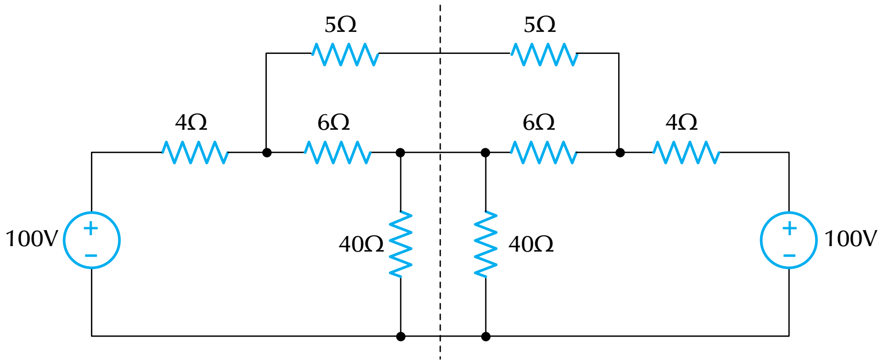
➢ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε τα ρεύματα των αντιστάσεων.

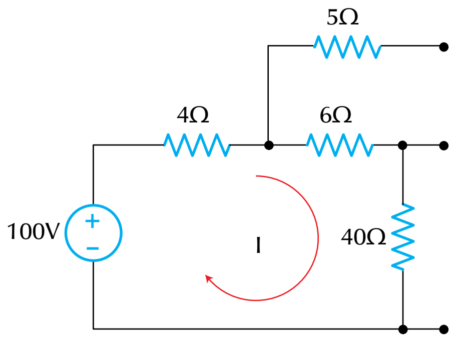


Λύση

Το κύκλωμα μετασχηματίζεται ως εξής:



Επειδή υπάρχει κατακόρυφη συμμετρία και η διέγερση του κυκλώματος είναι συμμετρική, μπορούμε να μελετήσουμε το μισό κύκλωμα με ανοικτοκυκλωμένες τις συνδέσεις.



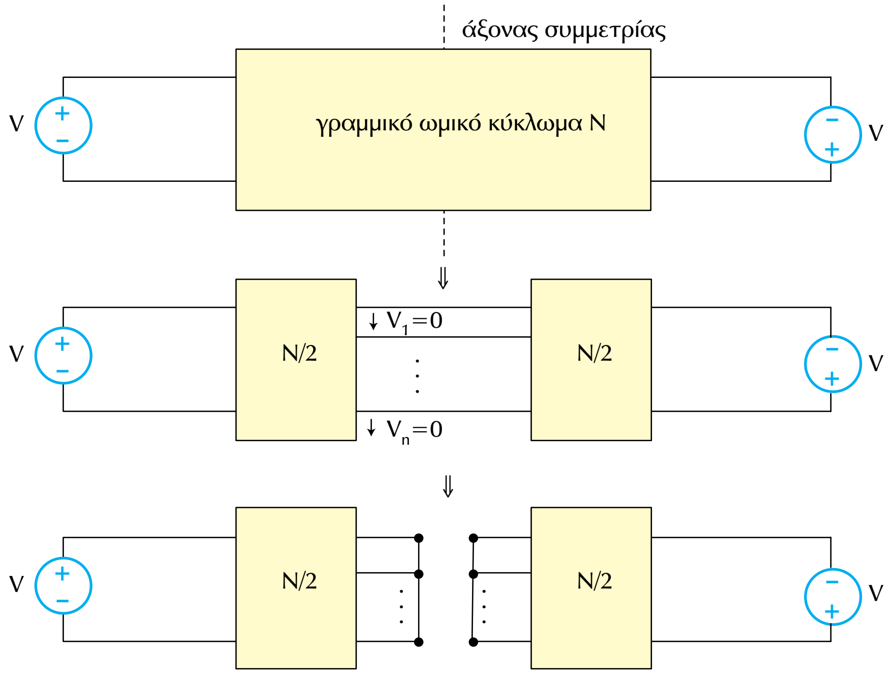
όπου το ρεύμα του απλού βρόχου είναι $I = \dfrac{100}{4+6+40} = 2$ (A)

Επομένως, τα ρεύματα των αντιστάσεων του αρχικού κυκλώματος είναι:

αντιστάσεων των 4 (Ω): 2 (A)
αντιστάσεις των 6 (Ω): 2 (A)
αντιστάσεις των 20 (Ω): 2 + 2 = 4 (A)

β) Κυκλώματα με κατακόρυφη συμμετρία και αντισυμμετρική διέγερση

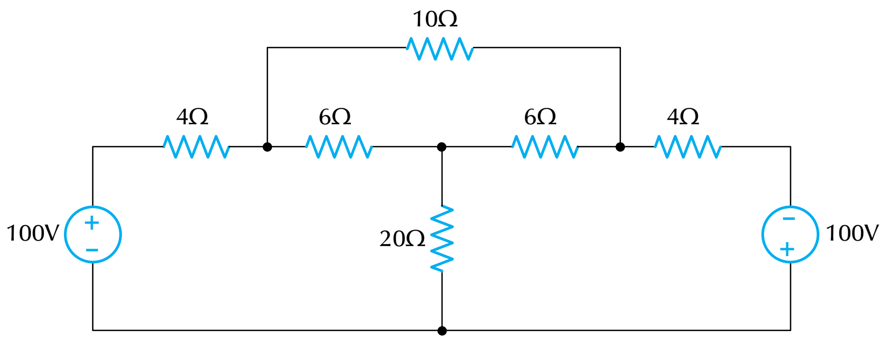
❑ Εάν ένα γραμμικό ωμικό κύκλωμα παρουσιάζει κατακόρυφη συμμετρία και η διέγερσή του είναι αντισυμμετρική, αποδεικνύεται ότι μπορούμε να βραχυκυκλώσουμε τις συνδέσεις μεταξύ των δύο συμμετρικών μισών του κυκλώματος και να μελετήσουμε ένα τμήμα αυτού, απλοποιώντας έτσι σημαντικά την ανάλυση του αρχικού κυκλώματος.



Σχήμα 4.7. *Κύκλωμα με κατακόρυφη συμμετρία και διέγερση αντισυμμετρική*

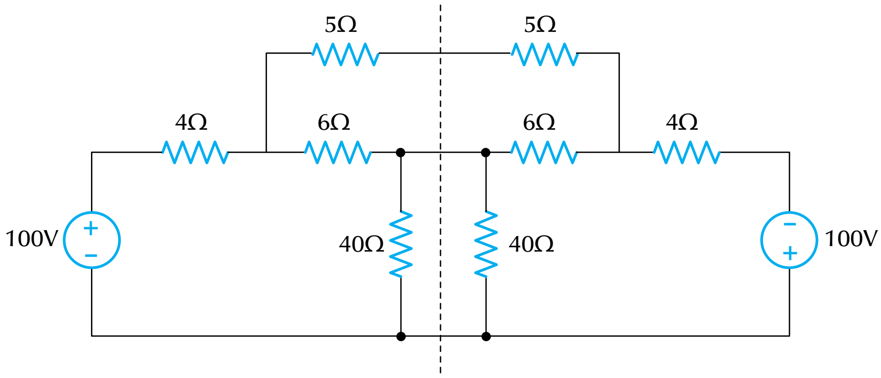
➢ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε τα ρεύματα των αντιστάσεων.

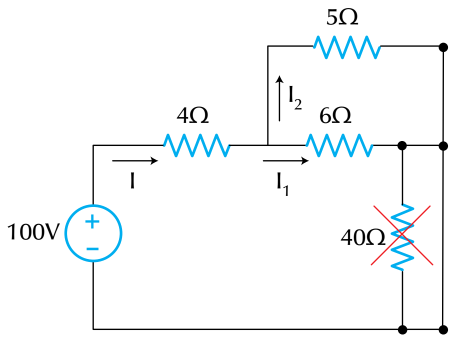


Λύση

Το κύκλωμα μετασχηματίζεται ως εξής:



Επειδή υπάρχει κατακόρυφη συμμετρία και η διέγερση του κυκλώματος είναι αντισυμμετρική, μπορούμε να μελετήσουμε το μισό κύκλωμα με βραχυκυκλωμένες τις συνδέσεις.



όπου,

$$I = \frac{100}{5//6 + 4} = 14{,}86 \text{ (A)}$$

Με διαιρέτη ρεύματος, προκύπτει

$$I_1 = I \cdot \frac{5}{5+6} = 14{,}86 \cdot \frac{5}{11} = 6{,}75 \text{ (A)}$$

και $$I_2 = I - I_1 = 14{,}86 - 6{,}75 = 8{,}11 \text{ (A)}$$

Επομένως τα ρεύματα των αντιστάσεων του αρχικού κυκλώματος είναι:

αντιστάσεις των 4 (Ω): 14,86 (A)
αντιστάσεις των 6 (Ω): 6,75 (A)
αντιστάσεις των 10 (Ω): 8,11 (A)
αντιστάσεις των 20 (Ω): 14,86 – 14,86 = 0 (A)

γ) Κυκλώματα με κατακόρυφη συμμετρία και τυχαία διέγερση

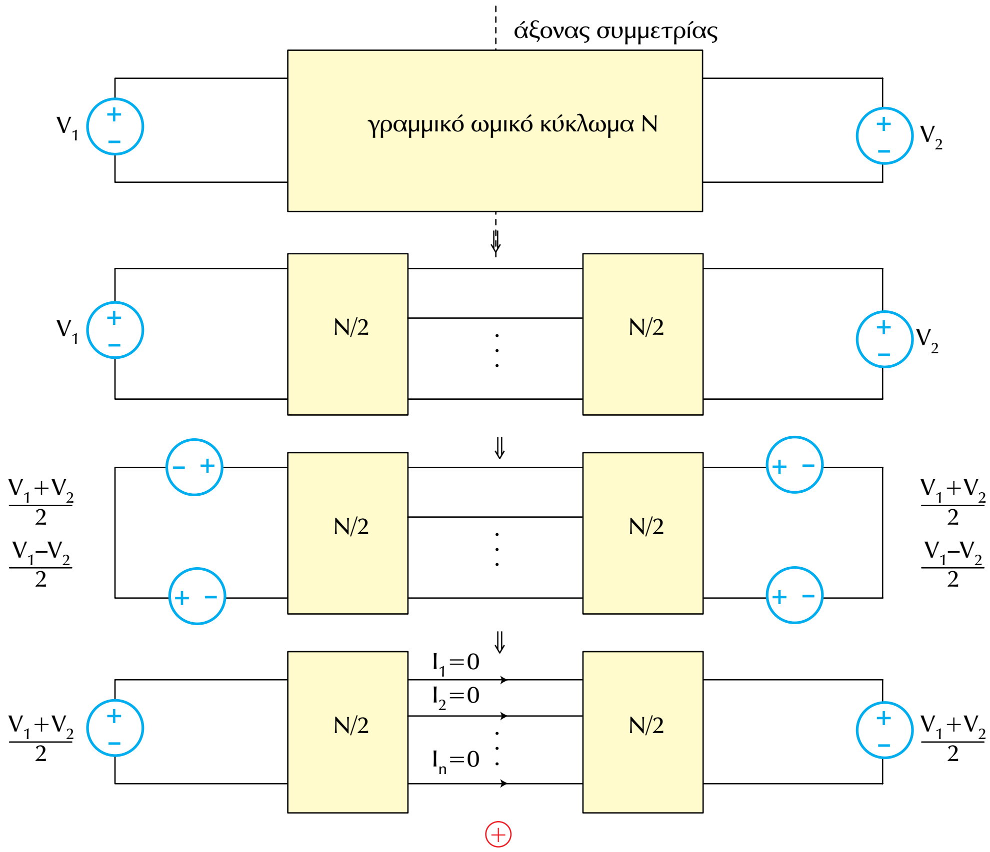
❑ Εάν το γραμμικό ωμικό κύκλωμα παρουσιάζει κατακόρυφη συμμετρία και η διέγερση του είναι τυχαία (V_1, V_2), αποδεικνύεται ότι μπορούμε, αναπτύσσοντας τη διέγερση σε μια επαλληλία μιας συμμετρικής και μιας αντισυμμετρικής διέγερσης, να οδηγηθούμε σε δύο επιμέρους κυκλώματα αντίστοιχα των περιπτώσεων α) και β).

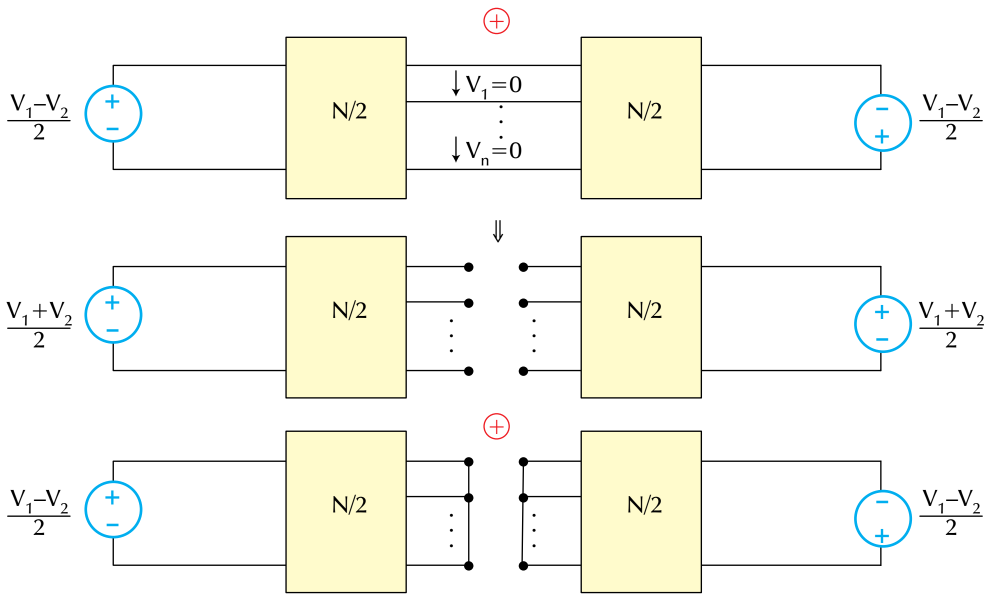
Η ανάπτυξη της διέγερσης στις δύο συνιστώσες (συμμετρική, αντισσυμετρική) γίνεται βάσει των σχέσεων.

$$V_1 = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{2} \tag{4.7}$$

$$V_2 = \frac{V_1 + V_2}{2} - \frac{V_1 - V_2}{2} \tag{4.8}$$

Η πορεία εργασίας τέτοιων κυκλωμάτων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

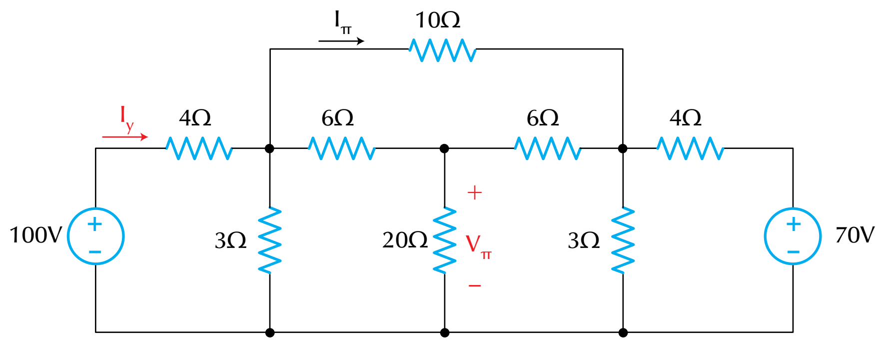




Σχήμα 4.8. *Κύκλωμα με κατακόρυφη συμμετρία και διέγερση τυχαία*

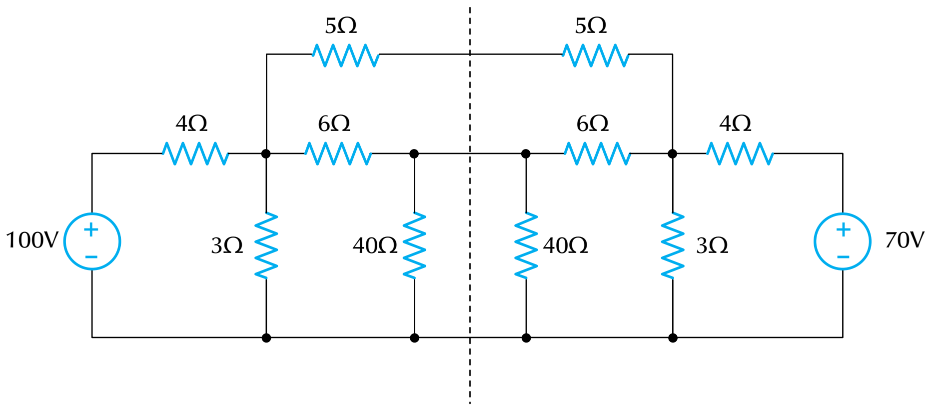
➢ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος υπολογίστε το ρεύμα I_y καθώς επίσης και την τάση V_x.

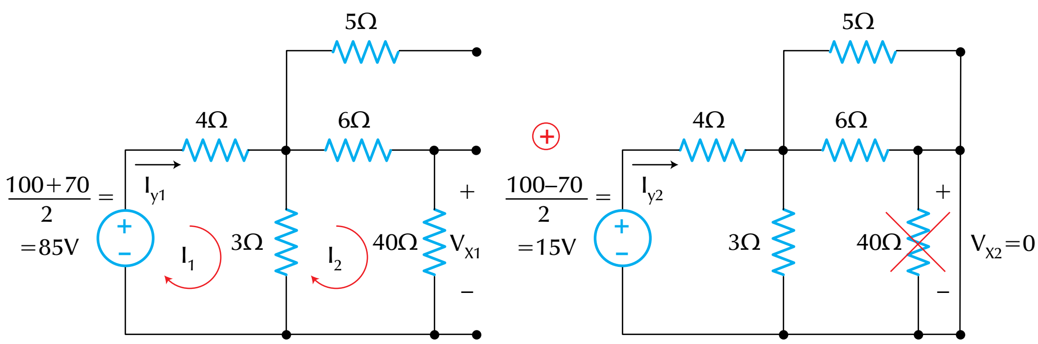


Λύση

Το κύκλωμα μετασχηματίζεται ως εξής:



Επειδή υπάρχει κατακόρυφη συμμετρία και η διέγερση του κυκλώματος είναι τυχαία, μπορούμε να μελετήσουμε τις παρακάτω δύο ημιτομές (συμμετρική, αντισυμμετρική).



Συμμετρική ημιτομή

Αντισυμμετρική ημιτομή

Επίδραση της συμμετρικής συνιστώσας των 85 (V):

Οι εξισώσεις των απλών βρόχων είναι:

$$\left.\begin{aligned} R_{11}\cdot I_1 + R_{12}\cdot I_2 &= \Sigma V_1 \\ R_{21}\cdot I_1 + R_{22}\cdot I_2 &= \Sigma V_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 7\cdot I_1 - 3\cdot I_2 &= 85 \\ -3\cdot I_1 + 49\cdot I_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Λύνοντας το σύστημα (1) προκύπτει:

$$I_1 = 12{,}47\ (A) \quad I_2 = 0{,}763\ (A)$$

Επομένως

$$I_{y1} = I_1 = 12{,}47\ (A) \text{ και } V_{x1} = I_2\cdot 40 = 0{,}763\cdot 40 = 30{,}5\ (V)$$

Επίδραση της αντισυμμετρικής συνιστώσας των 15 (V):

$$I_{y2} = I_{ολ} = \frac{ΣV}{R_{ολ}} = \frac{15}{5//6//3 + 4} = \frac{15}{5{,}428} = 2{,}76 \quad (A)$$

$$\text{και } V_{x2} = 0 \text{ (βραχυκύκλωμα)}$$

Τέλος, με εφαρμογή επαλληλίας προκύπτουν:

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} = 12{,}47 + 2{,}76 \Rightarrow I_y = 15{,}23 \text{ (A)}$$

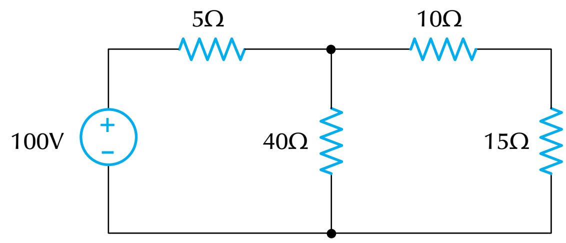
και

$$V_x = V_{x1} + V_{x2} = 30{,}5 + 0 \Rightarrow V_x = 30{,}5 \text{ (A)}$$

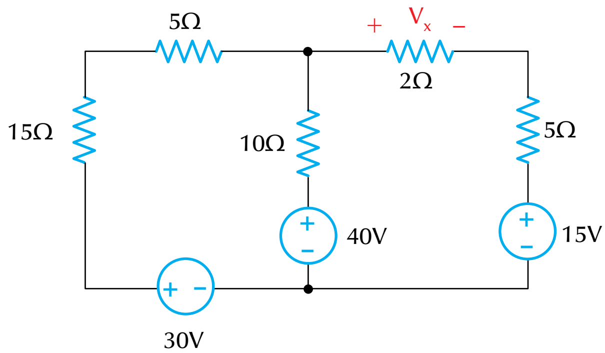
4-7 Προβλήματα προς λύση

1ο Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας τη Μ.Α.Β υπολογίστε α) την ισχύ που παρέχει στο κύκλωμα η πηγή των 100 (V) και β) την ισχύ που καταναλίσκεται στην αντίσταση των 15 (Ω).

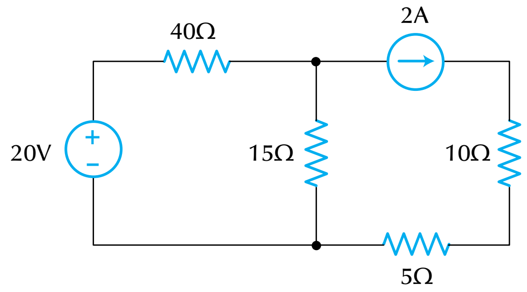
((α) 491 W, β) 136,81 W)



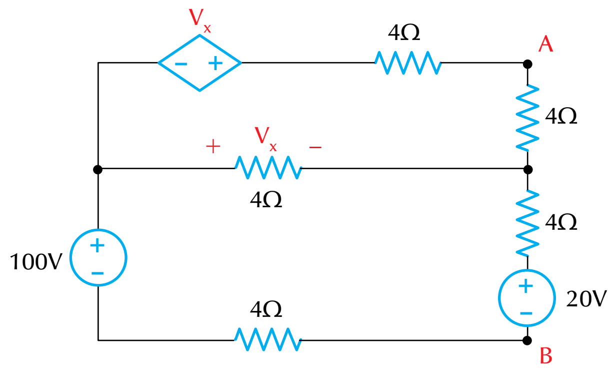
2ο Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την τάση V_X χρησιμοποιώντας τη Μ.Α.Β. *(V_x = 3,17V)*



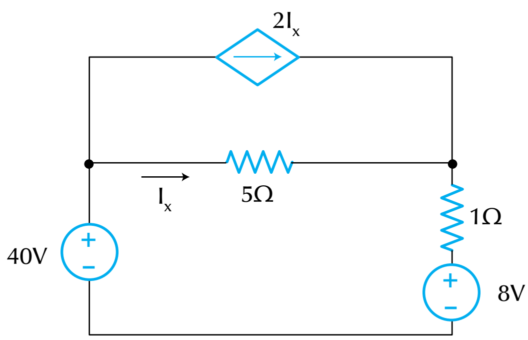
3ο Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την ισχύ της πηγής των 2(A), χρησιμοποιώντας τη Μ.Α.Β. *($P_{(2A)}$ = 92,73 W)*



4ο Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την τάση V_{AB} χρησιμοποιώντας τη Μ.Α.Β και στη συνέχεια δείξτε ότι η παρεχόμενη ισχύς είναι ίση με την καταναλισκόμενη. *(68V, $P_{ΠΑΡΕΧ.}$ = $P_{ΚΑΤΑΝ.}$ = 864W)*



5ο Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την ισχύ που καταναλώνεται στην αντίσταση 1(Ω), χρησιμοποιώντας τη Μ.Α.Β καθώς

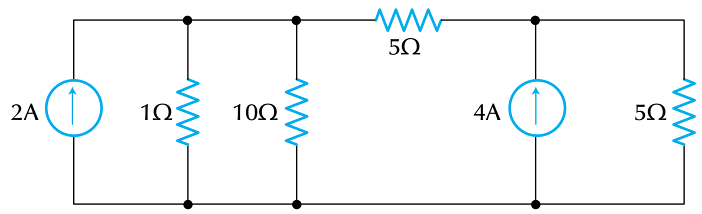


επίσης και την ισχύ της πηγής ρεύματος $2I_x$.

($P_{(1\Omega)}$ = 144W, $P_{(2Ix)}$ = 160V καταναλισκόμενη)

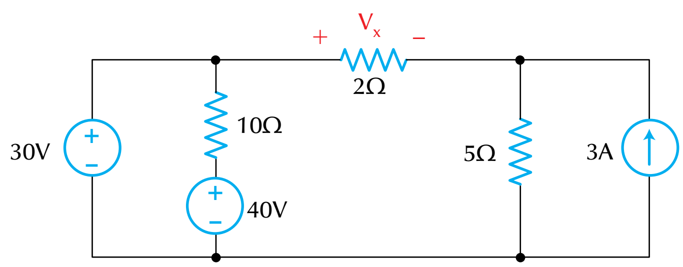
6° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την ισχύ που καταναλώνεται στην αντίσταση των 10(Q), χρησιμοποιώντας τη Μ.Κ.

($P_{(10\Omega)}$ = 1,1W)

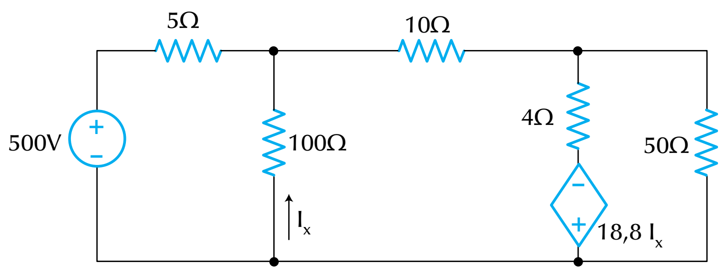


7° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την τάση V_X χρησιμοποιώντας τη Μ.Κ. και στη συνέχεια την ισχύ της πηγής των 30V.

(V_X = 4,286V, $P_{(30V)}$ = 34,29W παρεχόμενη)

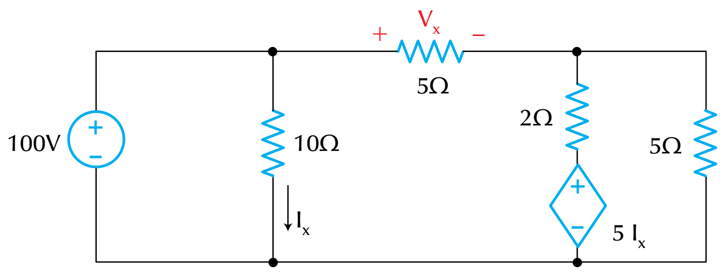


8° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την ισχύ της εξαρτημένης πηγής τάσης, χρησιμοποιώντας τη Μ.Κ. *(απορροφά 1346,68 W)*

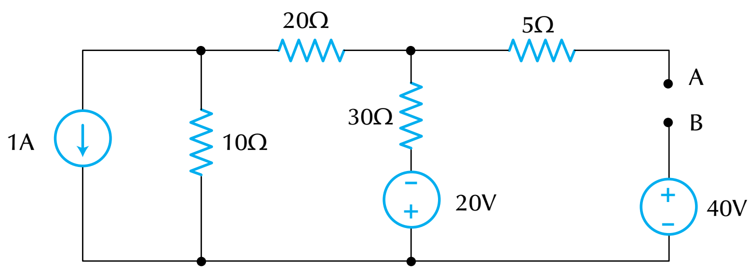


9° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την τάση V_X χρησιμοποιώντας τη Μ.Κ. και στη συνέχεια την ισχύ της πηγής των 100 V.

(V_x = 50V, $P_{(100V)}$ = 2000W αποδιδόμενη)

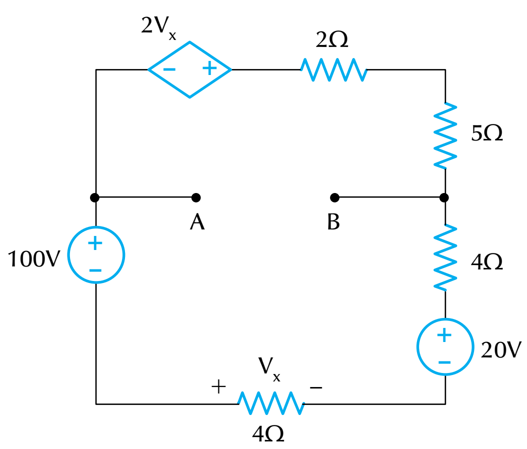


10° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε το ισοδύναμο κατά Thevenin και Norton κύκλωμα. *(R_{TH} = 20Ω, V_{TH} = 55V, I_N = 2,75A)*

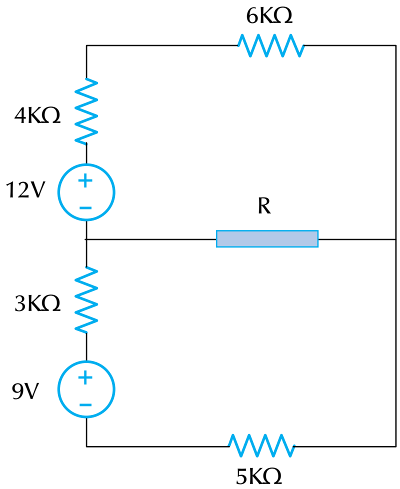


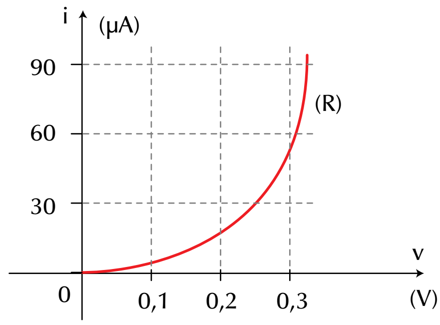
11° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε το ισοδύναμο κατά Thevenin και Norton κύκλωμα.

(R_{TH} = 2,43Ω, V_{TH} = 52,17V, I_N = 21,428A)



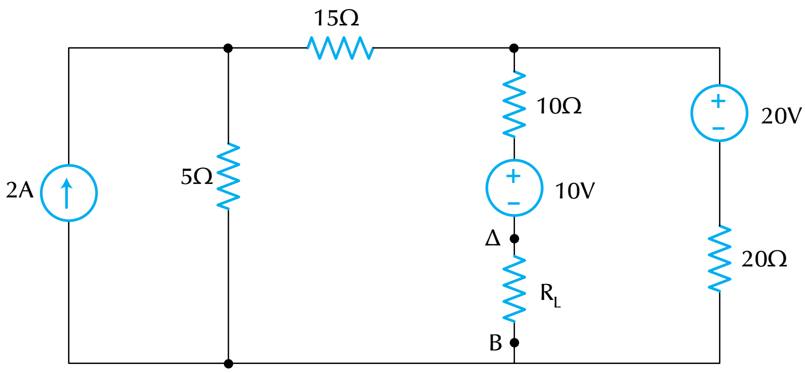
12° Να υπολογισθεί η ισχύς στη μη γραμμική αντίσταση του παρακάτω κυκλώματος, της οποίας η χαρακτηριστική καμπύλη δίνεται στο διπλανό σχήμα. *(5,0 μW)*



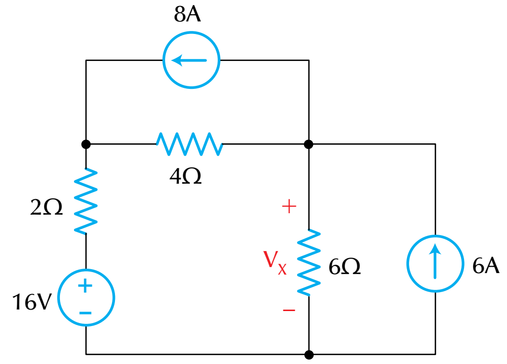


13° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την αντίσταση R_L για μέγιστη ισχύ καθώς επίσης και τη μέγιστη ισχύ.

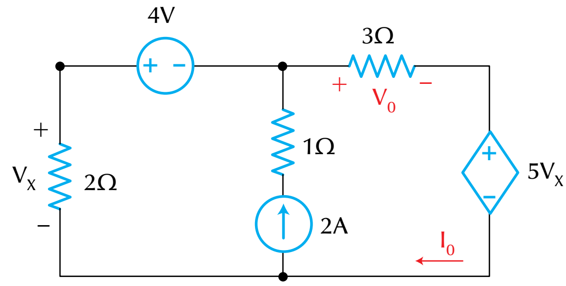
($R_L = 20\Omega$, $P_{max} = 312{,}5$ mW)



14° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την τάση V_x, χρησιμοποιώντας το θεώρημα επαλληλίας. *(V_x = 10V)*

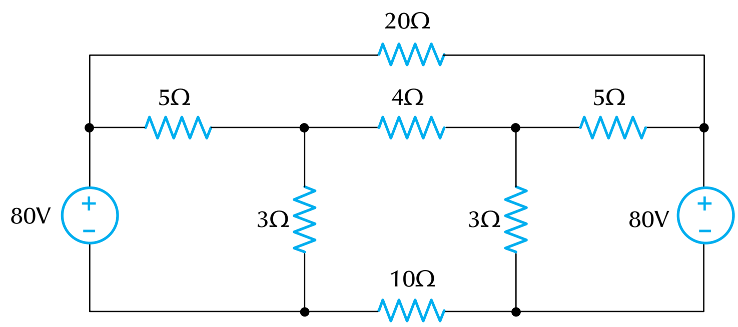


15° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την τάση V_0 και το ρεύμα I_0, εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας. *(V_0 = 10V, I_0 = 4A)*

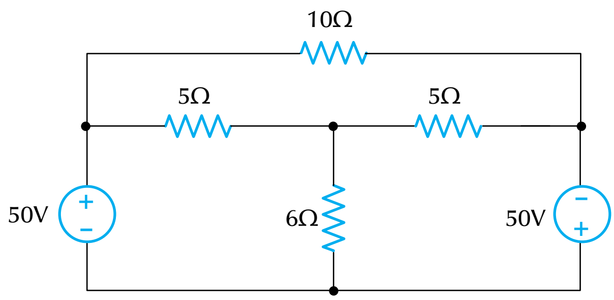


16° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την ισχύ που καταναλώνεται σε κάθε αντίσταση.

(αντιστάσεις των 5(Ω) : 500W, αντιστάσεις των 3(Ω) : 300W σε όλες τις άλλες η ισχύς είναι 0 W)



17° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την ισχύ που καταναλώνεται σε κάθε αντίσταση. *($P_{(10\Omega)}$ = 1000W, $P_{(5\Omega)}$ = 500W, $P_{(6\Omega)}$ = 0W)*



18° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε ισχύ που καταναλώνεται σε κάθε αντίσταση.

($P_{(10\Omega)}$ = 360W, $R_{(20\Omega)}$ = 193,44W, $R_{(5\Omega,\alpha\rho.)}$ = 285,01W, $P_{(5\Omega,\delta\varepsilon\xi.)}$ = 98,57W)