

Η φιλοσοφία των Μαθηματικών και τα νέα Α.Π.Σ. – Δ.Ε.Π.Π.Σ.

Κωνσταντίνος Βρυώνης, 12^ο Δημοτικό Σχολείο Ηρακλείου Αττικής

Θεόδωρος Γούπος, Σχολικός Σύμβουλος Π.Ε.

Περίληψη

Η μαθηματική μεθοδολογία διαμορφώνεται σε σχέση με την κατανόησή της ως φιλοσοφική θεωρία γύρω από τις μεθόδους των γνωστικών διαδικασιών και του μετασχηματισμού της αντικειμενικής πραγματικότητας. Οι σύγχρονες αντιλήψεις φαίνεται να βρίσκουν στις κατασκευαστικές θεωρίες μια σημαντική πρόταση για τη διδακτική των Μαθηματικών και την αντικατάσταση του παραδοσιακού μοντέλου διδασκαλίας. Η γνωστική ψυχολογία στηρίζει τις θεωρίες αυτές, που δεν είναι μακριά από τις απόψεις του μεγάλου φιλόσοφου Kant για την υποκειμενική κατασκευή της γνώσης μέσα από τις δραστηριότητες του υποκειμένου. Η υποκειμενικότητα της γνώσης την κάνει σχετική και όχι απόλυτη και ταυτόχρονα κοινωνικά προσδιορισμένη. Οι αντιλήψεις αυτές που υιοθετήθηκαν από τα νέα Δ.Ε.Π.Π.Σ. και Α.Π.Σ. για τα Μαθηματικά οδήγησαν στη συγγραφή των νέων βιβλίων και επαναπροσδιορίζουν τον ρόλο του δασκάλου σε ρόλο συντονιστή και διευκολυντή στην κατασκευή της γνώσης από τους ίδιους τους μαθητές.

Εισαγωγή

Το περιεχόμενο της μαθηματικής εκπαίδευσης βρίσκεται υπό συνεχή διαπραγμά-

Ο κ. Κωνσταντίνος Βρυώνης είναι Εκπαιδευτικός Π.Ε., με οργανική θέση στο 12^ο Δημοτικό Σχολείο Ηρακλείου Αττικής.

Ο κ. Θεόδωρος Γούπος είναι Σχολικός Σύμβουλος Π.Ε., Προϊστάμενος Επιστημονικής και Παιδαγωγικής Καθοδήγησης Π.Ε. Περιφέρειας Αττικής.

τευση, με αποτέλεσμα οι μεταρρυθμίσεις της, κυρίως τις τελευταίες δεκαετίες, να διαδέχονται η μια την άλλη. Οι προβληματισμοί και οι διαφοροποιήσεις δεν αφορούν μόνο στις μεθόδους και στο περιεχόμενο των Προγραμμάτων Σπουδών, αλλά έχουν να κάνουν και με σημαντικές διαφορές ως προς τη φύση των Μαθηματικών με πολλά και δύσκολα ερωτήματα (Davis & Hersh, 1981, σ. 13) όπως: Ποια είναι η φύση των Μαθηματικών; Τι αφορούν; Ποιο είναι το νόημά τους; Ποια είναι η μεθοδολογία τους; Πώς χρησιμοποιούνται;

Η μεταρρύθμιση της δεκαετίας του 1960 και 1970 για τα σχολικά μαθηματικά με το στρουκτουραλιστικό ρεύμα και τα Νέα Μαθηματικά, που ξεκίνησε στη Δυτική Ευρώπη και την Αμερική, έφτασε στην Ελλάδα στις αρχές του 1980, όταν οι χώρες από όπου ξεκίνησαν ήδη τα είχαν απορροφήσει (Μητακίδης, 1983). Μετά από πολλά χρόνια εφαρμογής τους διαπιστώθηκε και στη χώρα μας ότι δεν έφεραν τα αναμενόμενα αποτελέσματα στην εκπαίδευση (Φερεντίνος, 2007).

Η αντίδραση στα Νέα Μαθηματικά άρχισε από πολύ νωρίς, κυρίως με τους Polya, Kline, Courant (Κολέζα, 2000, πρόλογος iv) και αύξησε το ενδιαφέρον για εστίαση στην επίλυση προβλημάτων. Τη δεκαετία του '80 «η επίλυση προβλήματος» αποτέλεσε κεντρικό στόχο στη μαθηματική εκπαίδευση (NCTM 1980) και «η επίλυση προβλήματος» κατά Polya επέστρεψε.

Την ίδια εποχή οι εξελικτικοί ψυχολόγοι έστρεψαν την προσοχή των εκπαιδευτικών όχι μόνο στο «τι» αλλά και στο «πώς» τα παιδιά μπορούν να μάθουν καλύτερα μαθηματικά. Οι διαπιστώσεις αυτές, καθώς και τα νέα ερευνητικά δεδομένα οδήγησαν κατά τη δεκαετία του 1970 στην εμφάνιση του κλάδου της «Διδακτικής των Μαθηματικών».

Οι νεότερες απόψεις για τα μαθηματικά βρήκαν τη θεωρητική τους έκφραση, κυρίως, στη θεωρία της Κατασκευής της γνώσης (κονστρουκτιβισμός) με κύριους εκπροσώπους τον Piaget και τον Vygotsky. Οι κονστρουκτιβιστές, αναδεικνύοντας τη σημασία του υποκειμένου στη μάθηση, υιοθετούν την υποκειμενικότητα και επομένως τη σχετικότητα της γνώσης (Κεϊσογλου, 1999). Άμεση συνέπεια ήταν η απόρριψη του παραδοσιακού μοντέλου μάθησης, που αντιμετωπίζει τους μαθητές ως παθητικούς δέκτες γνώσεων και η ανάδειξη ομαδοσυνεργατικών μοντέλων διδασκαλίας στα οποία η γνώση θεωρείται ενεργητική κατασκευή από τον μαθητή.

Οι νέες θεωρίες οδήγησαν και στην τελευταία μεταρρύθμιση στην Ελλάδα με τη σύνταξη από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο του Ενιαίου Πλαισίου Προγράμματος Σπουδών (Ε.Π.Π.Σ., 1997) σύμφωνα με το οποίο η διαδικασία μάθησης των μαθηματικών είναι μια κατασκευαστική δραστηριότητα (Ε.Π.Π.Σ., άρθρο 1^ο) και η επίλυση προβλημάτων – δραστηριοτήτων αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Το Ε.Π.Π.Σ. αναθεωρήθηκε και συμπληρώθηκε με την έννοια της «διαθεματικότητας» και για τον λόγο αυτό αντικαταστάθηκε από το Διαθεμα-

τικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και τα νέα Α.Π.Σ. Ακολούθησε η προκήρυξη συγγραφής (2003) των νέων βιβλίων Δημοτικού και Γυμνασίου με βάση τα νέα προγράμματα.

Τα κύρια φιλοσοφικά ρεύματα στα Μαθηματικά μέχρι τον 20^ο αιώνα

Η φιλοσοφία των Μαθηματικών στηρίζει τη διδακτική και ασκεί την ευεργετική της επίδραση στη διαμόρφωση της περιρρέουσας πνευματικής ατμόσφαιρας με την εισαγωγή νέων ιδεών και την εξέταση άλλων που ήδη προϋπάρχουν (Αναπολιτάνος, 1985, πρόλογος). Η σχέση ανάμεσα σε μια παιδαγωγική των Μαθηματικών και στη φιλοσοφία των Μαθηματικών είναι αμφίδρομη και κάθε φιλοσοφία των Μαθηματικών έχει διδακτικές επιπτώσεις.

Κατά μία έννοια τα ερωτήματα τα οποία διατυπώθηκαν ανά τους αιώνες στη φιλοσοφία των Μαθηματικών τέθηκαν στην αρχή από τους δύο μεγάλους φιλοσόφους της αρχαιότητας, τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη.

Στο πλατωνικό έργο γίνεται διάκριση ανάμεσα στο «φαινόμενο» και στην «πραγματικότητα». Η πραγματικότητα, το *ον καθ' εαυτό*, αποτελεί τον κόσμο των Ιδεών και είναι αναλλοίωτη. Οι Ιδέες μπορούν να γνωσθούν άμεσα και μόνο νοητικά, ενώ τα φαινόμενα μέσα από την αισθητηριακή αντίληψη. Η αισθητηριακή αντίληψη μπορεί να παίζει βέβαια ρόλο βοηθητικό στη σύλληψη των Ιδεών, να αποτελέσει τον μίτο της Αριάδνης για την έξοδο από τον λαβύρινθο (Αναπολιτάνος, 1985, σ. 32). Μοντέλο πλατωνικών Ιδεών αποτελούν οι διάφορες μαθηματικές οντότητες, τα μαθηματικά αντικείμενα (Davis & Hersh, 1981, σ. 307), που υπάρχουν ανεξάρτητα από τη γνώση μας γι' αυτά. Το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να τα ανακαλύψουμε.

Ο Αριστοτέλης, αντίθετα, απορρίπτει την πλατωνική διάκριση και θεωρεί ότι ο διαλογισμός πάνω σε νοητά ομοιώματα, στα οποία οδηγούμαστε μέσα από μια διαδικασία αφαίρεσης, έχει ως αίτιο τις αρχικές μας οπτικές συλλήψεις, που είναι αντικείμενα με ύλη και μορφή. Τα μαθηματικά αντικείμενα είναι για τον Αριστοτέλη το αποτέλεσμα τέτοιων αφαιρέσεων (Αναπολιτάνος, 1985, σ. 32).

Η απολυτοκρατικότητα της μαθηματικής γνώσης επανέρχεται με τους ορθολογιστές (Descartes, Spinoza, Leibniz) ή ρασιοναλιστές που εξαιτίας της θεωρούν τη μαθηματική μέθοδο ως το πρότυπο της ασφαλούς γνώσης των πραγμάτων στο σύνολό τους (Descartes, 1976). Σε αυτή τη νοησιοκρατία αντιτίθενται οι εμπειριστές φιλόσοφοι (Locke, Berkeley, Hume) που θεωρούν ότι η πηγή και ο κριτής της ενδεχομενικής γνώσης, δηλαδή της γνώσης που εξαρτάται από την πραγματικότητα, είναι η εμπειρία είτε ως *κατ' αίσθησιν* αντίληψη είτε ως *εσωτερική* αίσθηση.

Σημαντικό γεγονός όμως, κατά τη γνώμη μας, για τη φιλοσοφία ήταν η εμφάνιση του Kant με την *Κριτική του καθαρού λόγου* (1781). Ο Kant θεωρούσε ότι

τόσο η λογική όσο και η εμπειρία μπορούν να συνεισφέρουν στην επιστημονική γνώση. Ο Kant επανέρχεται στη διάκριση ανάμεσα στα «καθ' εαυτά πράγματα» (τα νοούμενα), τα οποία ο άνθρωπος δεν μπορεί να γνωρίσει, και τα «φαινόμενα», δηλαδή τα πράγματα που μπορούν να καταστούν αντικείμενα γνώσης σε σχέση με τον ίδιο τον άνθρωπο. *Αλλά το ζήτημα δεν είναι πώς προσδιορίζονται τα πράγματα καθ' εαυτά, αλλά πώς προσδιορίζεται η εμπειρική μας γνώση για τα πράγματα* (Kant, χ.χρ., σ. 64). Με άλλα λόγια, το ερώτημα για τον Kant δεν είναι η προέλευση της εμπειρίας αλλά τι υπάρχει σ' αυτή.

Σύμφωνα με τον Kant, η γνώση πρέπει να κατανοηθεί με όρους τόσο της εποπτείας (Kant, 1976, σ. 105), η οποία είναι άμεσα μπροστά μας μέσω της αισθητηριακής (ό.π., σ. 106) αντίληψης, όσο και του λόγου, που είναι ο τρόπος με τον οποίο ο νους οργανώνει τις αισθητηριακές παραστάσεις, ώστε να γίνουν αντικείμενα της εμπειρίας. Βασική έννοια της φιλοσοφικής αυτής θεώρησης είναι οι *a priori* γνώσεις (ό.π., σ. 74-76), οι γνώσεις δηλαδή εκείνες που είναι δυνατές εκ των προτέρων, πριν την εφαρμογή ή τη χρήση τους μέσα στην εμπειρία και είναι γνώσεις καθολικές (ό.π., σ. 75). Τέτοιες αλήθειες είναι εκείνες των μαθηματικών.

Τα φιλοσοφικά ρεύματα στα Μαθηματικά τον 20^ο αιώνα

Οι βασικές σχολές στη φιλοσοφία των Μαθηματικών κατά τον 20^ο αιώνα είναι των Λογικιστών (G. Frege και B. Russell), των Φορμαλιστών (D. Hilbert) και των Κονστρουκτιβιστών ή Ιντουισιονιστών ή Ενορατιστών (Brouwer). Οι τάσεις αυτές, παρά τις αμφισβητήσεις που έχουν υποστεί, εξακολουθούν να παίζουν σημαντικό ρόλο και σήμερα.

Ο λογικισμός, κατά τους Davis και Hersh (1981), είναι μια μορφή πλατωνικού ρεαλισμού. Οι λογικιστές θεωρούσαν πως οι αλήθειες θα μπορούσαν να συλλεφθούν, *a priori*, ανεξάρτητα από την παρατήρηση. Ο λογικισμός προσπάθησε να αποδείξει ότι όλες οι μαθηματικές έννοιες μπορούν να αναχθούν στην ιδέα της αφηρημένης ιδιότητας και ότι τα μαθηματικά παράγονται από βασικές λογικές αρχές που αφορούν ιδιότητες.

Οι φορμαλιστές, από την άλλη πλευρά, στήριξαν το πρόγραμμά τους πάνω στην ανάγκη απόδειξης ότι τα μαθηματικά αξιωματικά συστήματα είναι συνεπή. Για τον φορμαλισμό σύμφωνα με τους Davis και Hersh (1981, σ. 13) δεν υπάρχουν μαθηματικά αντικείμενα. Τα μαθηματικά αποτελούνται από αξιώματα, ορισμούς και θεωρήματα, δηλαδή από τύπους. Οι μαθηματικοί τύποι δεν έχουν κανένα νόημα και καμιά τιμή αλήθειας. Η σχολή αυτή κυριάρχησε στην Ευρώπη τις δεκαετίες του 1950 και 1960 και με το όνομα «Νέα Μαθηματικά» έφτασε να διδάσκεται ακόμα και στα νηπιαγωγεία.

Το τρίτο φιλοσοφικό ρεύμα, αυτό των κονστρουκτιβιστών, είναι έντονα πρωτό-

τυπο και διαφορετικό από τις δύο προηγούμενες σχολές. Εμφανίστηκε στις αρχές του 20ού αιώνα με κύριο εκφραστή του τον Δανό τοπολόγο L. Brower (1908), θεσμοθετώντας μια ιδιαίτερη έννοια κατασκευαστικότητας. Οι απαρχές του κονστρουκτιβισμού μπορούν να αναζητηθούν στο έργο του φιλόσοφου Giambattista Vico (Κουλαϊδής, 2002, σ. 66) που υποστήριξε πως ο άνθρωπος γνωρίζει μονάχα ότι ο ίδιος δημιουργεί, δηλαδή την ιστορία του. Σύμφωνα με την τοποθέτηση του Tobin *ο κονστρουκτιβισμός είναι ένα σύνολο πίστεων περί τη γνώση η οποία αρχίζει με την αποδοχή της θέσης ότι η πραγματικότητα υπάρχει αλλά δεν μπορεί να γνωσθεί ως ένα σύνολο από αλήθειες* (Tobin K. στο Λιόσης, 2005). Ο Confrey (Κολέζα, 2000, σ. 73) γράφει πως πρόκειται για μια θεωρία για τα όρια της ανθρώπινης γνώσης και εκφράζει την άποψη ότι *όλη η γνώση που έχουμε είναι ένα προϊόν των δικών μας ενεργειών. Δεν μπορούμε να έχουμε άμεση γνώση οποιασδήποτε εξωτερικής ή αντικειμενικής πραγματικότητας*. Είναι φανερό στην παραπάνω βασική φιλοσοφική θέση του κονστρουκτιβισμού η καντιανή επιρροή.

Αφού, λοιπόν, είναι αδύνατο να γνωρίσουμε μια «αντικειμενική πραγματικότητα», οι γνώσεις μας για την πραγματικότητα είναι στην ουσία «θεωρίες γύρω από την πραγματικότητα» και η φροντίδα μας για συνέπεια και λογική στη διατύπωσή τους ούτε συνεπάγεται την αλήθεια τους, ούτε αποκλείει εναλλακτικές θεωρίες. Το ίδιο ισχύει φυσικά και με τη μαθηματική γνώση που σύμφωνα με τον κονστρουκτιβισμό (Von Glasersfeld, Vygotsky, Ernest) αποτελεί κοινωνική κατασκευή και επομένως δεν είναι ούτε απόλυτη ούτε προκαθορισμένη. Άρα η μαθηματική γνώση, ως κοινωνικό προϊόν, θεωρείται διαψεύσιμη και αέναα ανοιχτή σε αναθεωρήσεις, τόσο σε ό,τι αφορά τις αποδείξεις των θεωρημάτων της όσο και σε ό,τι αφορά τις θεμελιώδεις της έννοιες (Lakatos, 1996).

Αντίστοιχη, σύμφωνα με τον Kuhn, είναι η πορεία κάθε επιστημονικής κοινότητας με την αποδοχή ενός κοινού Παραδείγματος (Kuhn, 2004, σ. 26, 147). Ενός συνόλου, δηλαδή, πεποιθήσεων, αναγνωρισμένων αξιών και τεχνικών που ασπάζονται τα μέλη μιας δεδομένης ομάδας επιστημόνων. Κάθε φορά που μια νέα θεωρία εμφανίζεται ως αποτέλεσμα εξέλιξης ή μιας ομολογημένης αποτυχίας της επιστημονικής κοινότητας, δημιουργείται κρίση. Διαδοχικές κρίσεις οδηγούν σε μια επιστημονική επανάσταση μέχρι την αποδοχή ενός νέου Παραδείγματος.

Κάτω από τη γενική θεωρία του κονστρουκτιβισμού βρίσκονται δύο επιμέρους διαφορετικές θεωρίες-απόψεις: α) Ο Ριζοσπαστικός κονστρουκτιβισμός με κυριότερο εκπρόσωπο τον ψυχολόγο Jean Piaget, που υποστηρίζει ότι η σκέψη αυτορυθμίζεται σε σχέση με την προσωπική εμπειρία και β) Ο Κοινωνικός κονστρουκτιβισμός με κυριότερο εκπρόσωπο τον Vygotsky, που υποστηρίζει ότι οι ιδέες είναι δημιουργήματα της συλλογικής δράσης και συνείδησης.

Ο Freudenthal (1973) (Πινάσης, 2007) στην Ολλανδία στηριζόμενος στον κονστρουκτιβισμό θεωρούσε ότι τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα,

άρα πρέπει να προέρχονται από την πραγματικότητα και να είναι επίσης εφαρμόσιμα σε αυτήν την πραγματικότητα. Στη συνέχεια διατύπωσε μια «διδασκαλική φαινομενολογία» (Streefland, 2000, σ. 13), σύμφωνα με την οποία οι μαθηματικές έννοιες αντιμετωπίζονται ως «εργαλεία» οργάνωσης πραγματικών φαινομένων (Κολέζα, 2000, σ. 2).

Η φιλοσοφία των νέων Προγραμμάτων Σπουδών και των νέων βιβλίων των Μαθηματικών

Το κυρίαρχο ρεύμα στη διδακτική των Μαθηματικών για πολλές δεκαετίες ήταν μια «φορμαλιστική άποψη για τη διδασκαλία» (Κολέζα, 1977, στο Φερεντίνος, 2001). Αυτό το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας, που δίνει έμφαση στα αποτελέσματα της μαθηματικής δημιουργίας και στον τρόπο παρουσίασής τους και στο Ε.Π.Π.Σ. (1997) αναφέρεται ως «μπιχεβιοριστική συνιστώσα των εκπαιδευτικών στόχων», αμφισβητείται σύμφωνα με το Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003). Ο μπιχεβιορισμός ή συμπεριφορισμός (Thorndike, Pavlov, Watson, Skinner) κυριαρχούσε στις θεωρίες μάθησης μέχρι το 1960 (Τάσιος, 2008). Κατά τους συμπεριφοριστές το μυαλό του μαθητή είναι άγραφο χαρτί, πάνω στο οποίο ο εκπαιδευτικός μπορεί να εγγράψει τη γνώση. Η μάθηση είναι παθητική, ληπτική, στατική και αναπαραγωγική διαδικασία και στηριξε μια φορμαλιστική άποψη για τη διδασκαλία με τα «Νέα Μαθηματικά».

Το δεύτερο ρεύμα, το οποίο εμφανίστηκε στην αρχή της δεκαετίας του '70, στηρίχτηκε στις αρχές του κονστρουκτιβισμού και έχει χαρακτηριστεί με διάφορους τρόπους (Φερεντίνος, 2001). Θα προτιμήσουμε τους χαρακτηρισμούς «ρεαλιστικό μοντέλο διδασκαλίας» (Κολέζα, 1977), όπως επίσης «διδασκαλία διαρθρωμένη γύρω από ευρετικές διαδικασίες και σε άμεση συνάρτηση με την καθημερινή ζωή» αλλά και τον χαρακτηρισμό «σχετικιστική άποψη για τη μάθηση».

Το Ε.Π.Π.Σ. (1997) και στη συνέχεια το Δ.Ε.Π.Π.Σ. και το νέο Α.Π.Σ. υιοθέτησαν τα νέα ερευνητικά δεδομένα (*Μαθηματικά Δ'*, Β. Δασκάλου, 2007, σ. 9). Στη συνέχεια στις αρχές και στη φιλοσοφία τους (*Μαθηματικά Α'*, Β. Δασκάλου, 2007, σ. 5) βασίστηκαν τα νέα βιβλία Μαθηματικών (Τύπας, 2005). Βασικός σκοπός της μαθηματικής εκπαίδευσης στο Δημοτικό σχολείο τέθηκε η απόκτηση μαθηματικής σκέψης και η καλλιέργεια του μαθηματικού εγγραμματισμού (Τύπας, 2005), της ικανότητας δηλαδή του μαθητή να εφαρμόζει μαθηματικές γνώσεις, μεθόδους και διαδικασίες σε προβλήματα της καθημερινής ζωής (Ε.Π.Π.Σ. Μαθηματικών, 1997, άρθρο 2).

Σύμφωνα με το Ε.Π.Π.Σ. (1997) η διαδικασία μάθησης των μαθηματικών είναι μια κατασκευαστική δραστηριότητα (Ε.Π.Π.Σ. Μαθηματικών, 1997, άρθρο 1), που πραγματοποιείται πάντοτε μέσα σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο και είναι αποτέλεσμα προσωπικών αναγκών. Η ενεργοποίηση των παιδιών (γνωστικά, συναισθη-

ματικά, ψυχοκοινωνικά) σε καταστάσεις και προβλήματα που τους είναι οικεία και προέρχονται από το βιωματικό τους περιβάλλον και οι ανακαλυπτικές δραστηριότητες αποτελούν βασικές προϋποθέσεις για την ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και γενικότερα της γνώσης. Η θεωρία οικοδόμησης της γνώσης (κονστρουκτιβισμός) είναι μια γνωστική θεωρία που συνεισφέρει προς την κατεύθυνση αυτή (*Μαθηματικά ΣΤ'*, Β. Δασκάλου, 2007, σ. 19).

Σημαντικό ρόλο στη διαδικασία της μάθησης διαδραματίζουν τα ήδη υπάρχοντα γνωστικά σχήματα. Ο άνθρωπος χτίζει τη νέα γνώση επάνω σε αυτή που ήδη κατέχει διαδοχικά και ανάλογα με τον βαθμό ετοιμότητας. Οι νέες έννοιες και τα νοητικά αντικείμενα γίνονται κτήμα του μαθητή, όταν συνδέονται με τις προϋπάρχουσες γνώσεις του είτε με αρμονική ένταξη τους σε αυτές είτε με αναπροσαρμογή των παλαιότερων νοητικών σχημάτων σε νέα σχήματα μέσα από μια διαδικασία γνωστικής σύγκρουσης (Ε.Π.Π.Σ. Μαθηματικών, 1997, σ. 3). Μέσα σε μια τέτοια διαδικασία το λάθος αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της (*Μαθηματικά Ε'*, Β. Δασκάλου, 2007, σ. 11), ενώ σημαντική είναι η σημασία του αναστοχασμού και της αυτο-ρύθμισης στη μαθησιακή διαδικασία (*Μαθηματικά Β'*, Β. Δασκάλου, 2007, σ. 10). Σύμφωνα με αυτά οι μαθηματικές έννοιες, αλλά και η χρήση τους πηγάζουν από την ίδια την πραγματικότητα που βιώνουν τα άτομα (*Μαθηματικά Α'*, Β. Δασκάλου, 2007, σ. 5). Στηρίζονται στη βασική αρχή της διδακτικής ότι τα Μαθηματικά έχουν νόημα (*Μαθηματικά Β'*, Β. Δασκάλου, 2007, σ. 7).

Η θέση αυτή στηρίζεται στην αναπτυξιακή θεωρία του J. Piaget, σύμφωνα με την οποία μαθαίνουμε μέσω μιας συνεχούς διαδικασίας ρήξεων και επανα-ίσορροπιών. Ο Piaget έβλεπε τη γνώση σαν μια διαδικασία προσαρμογής του ατόμου προς το περιβάλλον του. Η νοητική ανάπτυξη είναι η μετάβαση από καταστάσεις ισορροπίας σε καταστάσεις ανισορροπίας (equilibre - disequilibre). Η αποκατάσταση της ισορροπίας σημαίνει τη μετάβαση του ατόμου σε ένα ανώτερο νοητικό επίπεδο. Ο Piaget θεωρούσε τη μάθηση ατομική υπόθεση και εκπροσώπησε τον ριζοσπαστικό κονστρουκτιβισμό.

Η απόκτηση της μαθηματικής γνώσης είναι προοδευτική και πραγματοποιείται μέσα από τη σταδιακή μετάβαση από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο. Οι μαθητές δε μένουν στις εμπειρικές καταστάσεις, μοντελοποιούν, ομαδοποιούν έννοιες με κοινές ιδιότητες και δημιουργούν μέσα από τη διαδικασία «αφαιρετικής σκέψης» έννοιες (Ε.Π.Π.Σ. Μαθηματικών, 1997, σ. 2) ανώτερης τάξης.

Οι νέες έννοιες κατασκευάζονται μέσα από ένα σύνολο καταστάσεων και προβλημάτων στα οποία η έννοια λειτουργεί και παίρνει το νόημά της (*Μαθηματικά ΣΤ'*, Β. Δασκάλου, σ. 19). Έτσι, η επίλυση προβλημάτων – δραστηριοτήτων αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο (Ε.Π.Π.Σ. Μαθηματικών, 1997, σ. 2) στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Με άλλα λόγια, η γνώση γενικά και ιδιαίτερα η μαθηματική γνώση αναπτύσ-

σεται μέσα από την αναζήτηση λύσεων σε προβλήματα, η τεκμηρίωση των οποίων γίνεται κατ' αρχήν σε ένα διαισθητικό και εμπειρικό επίπεδο και στη συνέχεια στη βάση μιας αποδεικτικής διαδικασίας. Η διαδικασία αυτή θυμίζει την προοδευτική μαθηματοποίηση που χρησιμοποιείται στη «ρεαλιστική προσέγγιση» από τους Treffers και Goffree (Κολέζα, 2000, πρόλογος xiii). Τα παιδιά καταλαβαίνουν ότι η χρησιμότητα των μαθηματικών έγκειται στην επίλυση προβληματικών καταστάσεων που μοντελοποιούν (Ε.Π.Π.Σ. Μαθηματικών, 1997, σ. 4) και μαθηματοποιούν. Τα προβλήματα είναι μέσα από την καθημερινή ζωή και έχουν νόημα για τα παιδιά (*Μαθηματικά ΣΤ'*, Β. Δασκάλου, σ. 18), που επιλέγουν στρατηγικές, εφαρμόζουν διάφορες ευρετικές, που πρώτος παρουσίασε ο George Polya (Polya, 1991), διερευνούν και επιλύουν.

Η διαδικασία της μαθηματοποίησης των προβληματικών καταστάσεων πραγματοποιείται με δύο τρόπους (*Μαθηματικά Β'*, Β. Δασκάλου, σ. 7): α) την πλαισιοποίηση, κατά την οποία το πραγματικό πρόβλημα μεταφράζεται (από τον μαθητή) σε μαθηματικό πρόβλημα μέσω συγκεκριμένων ενεργειών – μοντέλων και β) την αποπλαισιοποίηση της γνώσης, όπου το μεταφρασμένο πρόβλημα αντιμετωπίζεται και γίνεται αντικείμενο επεξεργασίας με μαθηματικά εργαλεία, όπως προτείνει ο Brousseau (Κολέζα, 2000, πρόλογος xiii). Η πλαισιοποίηση και η αποπλαισιοποίηση αντιστοιχούν στην οριζόντια και κατακόρυφη μαθηματοποίηση της γνώσης από τον Treffers.

Εκτός από την ατομική προσπάθεια, η επίλυση προβληματικών καταστάσεων στο πλαίσιο μιας ομάδας δρα ενισχυτικά στη διαδικασία της μάθησης (Ε.Π.Π.Σ. Μαθηματικών, 1997, σ. 3). Διευκολύνει τις γνωστικές αλληλεπιδράσεις, προσφέρει ευκαιρίες για ανταλλαγή ιδεών και δίνει τη δυνατότητα διερεύνησης κάτω από διάφορες οπτικές γωνίες (*Μαθηματικά Β'*, Β. Δασκάλου, σ. 7). Η θέση αυτή ότι η μάθηση δεν αποτελεί μόνο μια ατομική διαδικασία αλλά καθορίζεται και επηρεάζεται άμεσα από το ευρύτερο κοινωνικό, φυσικό και πολιτιστικό περιβάλλον, κατά τη γνώμη μας, θα έπρεπε να στηριχθεί ακόμη περισσότερο στο Ε.Π.Π.Σ. και στο Δ.Ε.Π.Π.Σ. Η σημασία του κοινωνικο-πολιτισμικού πλαισίου, τα τελευταία είκοσι χρόνια, υπογραμμίζεται όλο και περισσότερο. Οι απόψεις αυτές στηρίζονται από τον κοινωνικό κονστρουκτιβισμό (L. Vygotsky, Ernest) που θεωρεί ότι η μάθηση είναι μια διαδικασία εκπολιτισμού. Είναι η εισαγωγή του ατόμου σε μια υπάρχουσα κουλτούρα. Ο Vygotsky πρώτος υιοθέτησε τον ρόλο της κοινωνικής αλληλεπίδρασης στον μετασχηματισμό της προϋπάρχουσας γνώσης και υποστήριξε ότι οι ανεπτυγμένες έννοιες εμφανίζονται πρώτα στο πλαίσιο της κοινωνικής αλληλεπίδρασης και μόνο σταδιακά γίνονται προσβάσιμες στο άτομο.

Τέλος, οι δραστηριότητες ενδείκνυνται σύμφωνα με το Ε.Π.Π.Σ. να είναι οργανωμένες σε τρία επίπεδα, που θα μπορούσαν να αποδοθούν με την περιγραφή του J. Bruner: το χειριστικό, το εικονικό και το συμβολικό (Ε.Π.Π.Σ. Μαθηματικών,

1997, σ. 12), αντίστοιχα της θεωρίας μάθησης σε επίπεδα που χρησιμοποιεί ο P.M. van – Hiele (Κολέζα, 2000, πρόλογος vii) στη RME (ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση).

Οι παραπάνω φιλοσοφικές και διδακτικές αρχές προάγονται καλύτερα μέσα από ομαδοσυνεργατικά μοντέλα διδασκαλίας. Ο δάσκαλος δεν είναι πια ο δάσκαλος – αυθεντία αλλά ο οργανωτής και συντονιστής που βρίσκεται σε διαρκή αλληλεπίδραση με τους μαθητές. Από αναμεταδότης της γνώσης γίνεται ενεργός συνεργάτης, βοηθά στη διαδικασία ανάδειξης των προσωπικών αντιλήψεων των μαθητών. Είναι ο διευκολυντής για την κατασκευή της γνώσης από τον ίδιο τον μαθητή (*Μαθηματικά Γ'*, Β. Δασκάλου, σ. 8).

Συμπεράσματα

Στην εισήγησή μας αυτή αναφερθήκαμε στα κυριότερα ρεύματα στη φιλοσοφία των Μαθηματικών και στην επιρροή τους στα νέα Προγράμματα Σπουδών και κατ' επέκταση στα νέα βιβλία Μαθηματικών για το Δημοτικό.

Αναφερθήκαμε σε σχολές που ανήκουν στις απολυτοκρατικές φιλοσοφίες για τα μαθηματικά καθώς και στις αντίθετες και σχετικά πρόσφατες απόψεις για τη διαψευσιμότητα της γνώσης.

Οι απολυτοκρατικές φιλοσοφίες παρουσιάζουν μια εικόνα των μαθηματικών ως αυστηρής, αμετάβλητης, λογικής, απόλυτης, υπερ-ανθρώπινης, καθαρής, αφηρημένης και άκρως ορθολογικής γνώσης, που οδήγησε σε μια αντίστοιχη εικόνα για τα σχολικά μαθηματικά ως ένα δύσκολο, ψυχρό, αφηρημένο, άκρως ορθολογικό, αλλά σημαντικό μάθημα. Οι διδακτικές πρακτικές που στήριξαν κυρίως αυτές τις σχολές αντιμετώπισαν τους μαθητές ως παθητικούς δέκτες δύσκολων αλλά αναγκαίων πληροφοριών.

Αντίθετα, η πρόσφατη άποψη στη φιλοσοφία των μαθηματικών που είναι η εκδοχή της διαψευσιμότητας, αντιμετωπίζει τα μαθηματικά ως προϊόν κοινωνικών διαδικασιών. Στήριχτηκε στον κοινωνικό κονστρουκτιβισμό και αποδέχεται πλήρως το ανθρώπινο πρόσωπο και το ανθρώπινο συστατικό των μαθηματικών. Με τον τρόπο αυτό τα μαθηματικά βιώνονται ανθρώπινα, προσωπικά, διαισθητικά, συνεργατικά, διερευνητικά, πολιτιστικά, ιστορικά, συναρτημένα με τις ανθρώπινες καταστάσεις, γεμάτα χαρά και ομορφιά. Οι διδακτικές πρακτικές που στήριξαν αυτές τις απόψεις αντιμετώπισαν τους μαθητές ως ερευνητές που μέσα από διδασκαλίες ομαδοσυνεργατικές διερευνούν και κατασκευάζουν τη νέα γνώση.

Το Ε.Π.Π.Σ. αναγνωρίζει πως στους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης μετράει περισσότερο ο πλούτος της εμπειρίας που αποκιέται κατά τη διαδικασία μάθησης στο πλαίσιο μιας ανοικτής μαθησιακής κατάστασης από τα μετρήσιμα

αποτελέσματα (Ε.Π.Π.Σ. Μαθηματικών, 1997, σ. 8). Στην κατεύθυνση αυτή στηρίζεται τα νέα ερευνητικά δεδομένα της διδακτικής και της φιλοσοφίας που αναγνωρίζουν τη διαδικασία μάθησης των μαθηματικών ως μια κατασκευαστική δραστηριότητα κοινωνικά προσδιορισμένη. Επομένως, βρίσκεται και πιο κοντά στις απόψεις της διαψευσιμότητας της γνώσης.

Οι θεωρίες αυτές έχουν περάσει από τους συγγραφείς και το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο στα νέα βιβλία Μαθηματικών. Οι συγγραφείς δηλώνουν πως δεν είναι πιστοί υποστηρικτές (*Μαθηματικά Α', Β. Δασκάλου*, σ. 8) κάποιας συγκεκριμένης διδακτικής θεωρίας αλλά αξιοποιούν την αρχή της επιλεκτικότητας. Επιλέγουν, δηλαδή, διάφορες σύγχρονες διδακτικές πρακτικές και μεθόδους ανάλογα με την εξελικτική πορεία και τις συνθήκες της διδασκαλίας.

Αναγκαία προϋπόθεση, όμως, για την επιτυχία των νέων θεωριών κατά τη διδασκαλία στην τάξη είναι η μείωση της ύλης και η εστίαση σε κεντρικές μαθηματικές έννοιες, ώστε να αυξηθεί ο διαθέσιμος διδακτικός χρόνος, κάτι που δεν μπορούμε να πούμε ότι επιτεύχθηκε σε σημαντικό βαθμό.

Τέλος, είναι κατανοητό ότι η εισαγωγή των νέων διδακτικών προτάσεων στην καθημερινή διδακτική πρακτική απαιτεί μια επίπονη και μακρόχρονη πορεία, η οποία θα πρέπει να υποστηριχθεί από ένα μεθοδικό πρόγραμμα επιμόρφωσης.

Βιβλιογραφία

- Αναπολιτάνος, Δ. (1985). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Νεφέλη.
- Βερούκιος, Π. (2007). Τα νέα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου. *Πρακτικά του 24^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε.*, Κοζάνη, 103-112.
- Davis, P. J, & Hersh, R. (1981). *Η Μαθηματική Εμπειρία*. Αθήνα: Τροχαλία.
- Descartes, R. (1976). *Λόγος περί της Μεθόδου*. Μετάφραση - Σχόλια: Χρ. Χρηστίδης. Αθήνα: Παπαζήσης.
- Kant, I. (1976). *Κριτική του Καθαρού Λόγου*. Τόμος Α'. Μετάφραση - Σχόλια: Α. Γιανναράς. Αθήνα: Παπαζήσης.
- Kant, I. (χ.χρ.). *Προλεγόμενα σε κάθε μελλοντική μεταφυσική*. Αθήνα: Αναγνωστίδη.
- Κεϊσογλου, Σ. (1999). Ο Καντ και τα θεμέλια των σύγχρονων κατασκευαστικών απόψεων για τη διδακτική των μαθηματικών. *Πρακτικά του 16^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε.*, Λάρισα.
- Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Leader Books.
- Κουλαϊδής, Β. (2002). *Αναπαράστάσεις του Φυσικού Κόσμου*. Αθήνα: Gutenberg.

- Kuhn, T. (2004). *Η δομή των επιστημονικών επαναστάσεων*. Αθήνα: Σύγχρονα θέματα.
- Lakatos, I. (1996). *Αποδείξεις και Ανασκευές*. Αθήνα: Τροχαλία.
- Λιόσης, Β. (2005). *Η επιστήμη των μαθηματικών υπό την οπτική του διαλεκτικού υλισμού*. Διπλωματική Εργασία Μεταπτ. Προγρ. Π.Α./Τμ.Μαθ. - Παν. Κύπρου. www.math.uoa.gr/me/dipl/index.html (προσπελάστηκε στις 11/12/2008).
- Μητακίδης, Γ. (1983). Τα Νέα Μαθηματικά. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 25, 85-100.
- Πινάτσης, Π. (2007). Σχολικά εγχειρίδια και πλαίσια εφαρμογής ρεαλιστικών μαθηματικών. *Πρακτικά του 24^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου Ε.Μ.Ε.*, Κοζάνη, 195-207.
- Polya, G. (1991). *Πώς να το λύσω*. Αθήνα: Καρδαμίτσα.
- Streefland, L. (Editor). (2000). *Ρεαλιστικά μαθηματικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση*. Εισαγωγή - Επιμέλεια: Ε. Κολέζα. Αθήνα: Leader Books.
- Τάσιος, Θ. (2008). *Ψυχολογία των Μαθηματικών – Σύνοψη θεωριών μάθησης*. <http://www.geocities.com/thanostasios> (προσπελάστηκε στις 11/12/2008).
- Τσιικοπούλου, Σ. (2007). *Ο ρόλος των προτύπων στη διδασκαλία των Μαθηματικών*. www.eduportal.gr (προσπελάστηκε στις 11/12/2008).
- Τύπας, Γ. (2005). Τα μαθηματικά του Δημοτικού μέσα από τα νέα διδακτικά εγχειρίδια. *Επιμόρφωση Σχολικών Συμβούλων και εκπαιδευτικών Π.Ε. στο Δ.Ε.Π.Π.Σ. και Α.Π.Σ. Υπ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι.*
- Υπ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι. (1997). *Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών*.
- Υπ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι. (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών*, ΦΕΚ 303, τεύχος Β'/13-3-2003, σ. 3983-3985.
- Υπ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι. (2007). *Μαθηματικά Γ' Δημοτικού*. Βιβλίο Δασκάλου.
- Υπ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι. (2007). *Μαθηματικά Ε' Δημοτικού*. Βιβλίο Δασκάλου.
- Υπ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι. (2007). *Μαθηματικά Α' Δημοτικού*. Βιβλίο Δασκάλου.
- Υπ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι. (2007). *Μαθηματικά Β' Δημοτικού*. Βιβλίο Δασκάλου.
- Υπ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι. (2007). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού*. Βιβλίο Δασκάλου.
- Υπ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι. (2007). *Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού*. Βιβλίο Εκπαιδευτικού.
- Φερεντίνος, Σ. (2001). Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη μαθηματική εκπαίδευση. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 5, 7-19.
- Φερεντίνος, Σ. (2007). Νέα Βιβλία Μαθηματικών του Γυμνασίου. *Πρακτικά του 24^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου Ε.Μ.Ε.*, Κοζάνη, 68-74.