Η διεύρυνση των ορίων μιας αναπαράστασης στη δημιουργία και διατήρηση ερευνητικού περιβάλλοντος

Αθανάσιος Σ. Σκούρας
Παιδαγωγικό Ινστιτούτο

Περίληψη

Η διατήρηση του ερευνητικού κλίματος κατά τη διάρκεια της αντιμετώπισης μιας προβληματικής κατάστασης έχει άμεση σχέση με τη δυνατότητα ανάδειξης νέων στοιχείων (δεδομένων) και σύνδεσης αυτών με τα αρχικά δεδομένα. Η ανάδειξη των καινούργιων στοιχείων μπορεί να προέλθει τόσο από την επεξεργασία των ήδη υπαρχόντων (π.χ. μετασχηματισμοί αυτών) όσο και από τη διεύρυνση των ορίων του επιπέδου αναπαράστασης στο οποίο έχει τεθεί η προς αντιμετώπιση προβληματική κατάσταση. Η διεύρυνση των ορίων μιας αναπαράστασης μπορεί να συμβάλει –με τα νέα στοιχεία που θα αναδειχθούν –τόσο στη διατύπωση νέων εικασιών όσο και στην τροποποίηση των ήδη διατυπωμένων. Με την παρούσα εργασία, μέσα από μια μελέτη περίπτωσης, μελετάμε τον τρόπο με τον οποίο διευκολύνεται αυτή η διεύρυνση.

Abstract

The maintenance of the searching climate during the facing of a problematic situation has a direct relation to the possibility of the highlighting of some new facts and their link with the initial data. The highlighting of the new facts may come from the processing of the ones that already exist (e.g., their transformations) or from the expansion of the limits of the level of representation in which we have the problematic situation we must face. The expansion of the limits of a representation may contribute –with the new facts that will come out–not only to the expression of the new conjectures but also to the change of the ones we have already expressed. In this paper, through a case study, we examine the way in which the expansion is made easier.

Ο κ. Σκούρας είναι Πάρεδρος του Π.Ι.

Εισαγωγή

Οι δυσκολίες στην κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης απασχολούν αναμφίβολα όλους τους εμπλεκόμενους με τη μαθηματική εκπαίδευση, το έργο της οποίας είναι «η έρευνα και η ανάπτυξη της διδασκαλίας των Μαθηματικών σε όλα τα επίπεδα, συμπεριλαμβανομένων των προϋποθέσεων, των στόχων, αλλά και του κοινωνικού περιβάλλοντος μέσα στο οποίο αυτή πραγματοποιείται» [(18) σελ. 356]. Συνεπώς η βελτίωση της διδασκαλίας (με μια πιο ευρεία έννοια από αυτή που της αποδίδεται παραδοσιακά) πρέπει να βρίσκεται στον πυρήνα των στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Οι σύγχρονες απόψεις των ερευνητών σχετικά με τη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών δίδουν ιδιαίτερη σημασία στο θετικό ρόλο που διαδραματίζει η ενεργητική στάση του μαθητή κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα μια βασική αρχή η οποία απορρέει από την κατασκευαστική θεωρία της γνώσης – η οποία θεωρείται στις μέρες μας ως μια επιστημολογική θέση κατάλληλη για τη μαθηματική εκπαίδευση– είναι ότι: «η μάθηση δεν είναι μια παθητική αποδοχή έτοιμης γνώσης,αλλά μια διαδικασία κατασκευής στην οποία οι ίδιοι οι μαθητές πρέπει να είναι οι βασικοί πρωταγωνιστές» [(3), σελ. 120]. Επομένως η γνώση δεν «μεταφέρεται» από το δάσκαλο και ούτε απορροφάται από το μαθητή, αλλά ο ίδιος συμμετέχει ενεργά στην κατασκευή των γνωστικών του δομών. Αυτή η κατασκευαστική διαδικασία είναι μακρόχρονη και κινείται σε διαφορετικά επίπεδα αφαίρεσης. Η μετάβαση από ένα γνωστικό επίπεδο σε ένα άλλο υψηλότερο ενισχύεται μέσω της διαδικασίας του «προσωπικού αναστοχασμού». Δηλαδή μαθαίνουμε, αναλύοντας και κρίνοντας κατ' αρχάς και κυρίως τις προσωπικές μας ενέργειες και σκέψεις, αντί να παρατηρούμε τον τρόπο σκέψης των άλλων. Αυτό σημαίνει ότι με αφορμή κατάλληλες δραστηριότητες, οι μαθητές πρέπει να έχουν την ευκαιρία να αντιμετωπίζουν νοητικές προκλήσεις, μέσω των οποίων οι ήδη αποκτηθείσες γνώσεις θα τίθενται συνεχώς υπό κρίση και ενδεχομένως υπό αμφισβήτηση.

Η αναδιοργάνωση των υπαρχόντων γνωστικών δομών ή η δημιουργία νέων συντελείται εφόσον αυτές που έχει ο μαθητής τον οδηγούν σε εμπόδια, αντιφάσεις ή εκπλήξεις. Τέτοιες καταστάσεις μπορούν να βιώσουν οι μαθητές καθώς προσπαθούν να λύσουν προβλήματα αξιοποιώντας με το δικό τους τρόπο τις έννοιες και διαδικασίες που έχουν στη διάθεσή τους. Κατά συνέπεια κάθε ουσιαστική μάθηση προϋποθέτει τον προβληματισμό των μαθητών. Διαφορετικά οι μαθητές μπορεί να «μαθαίνουν » Μαθηματικά χωρίς να τα καταλαβαίνουν. Η γνώση των κανόνων που οδηγούν σε σωστές λύσεις δεν συνεπάγεται και κατανόηση [(12), σελ. 52]. Το μεγάλο ζητούμενο είναι οι κατάλληλες δραστηριότητες οι οποίες, όπως επισημαίνουν οι Cobb, Yackel και Wood [(4)], θα πρέπει να είναι τέτοιες που να επιτρέπουν την παράλληλη εξέλιξη των διαδικασιών και των εννοιών.

Αφού η μάθηση, όπως αναφέρθηκε, δεν είναι μια παθητική αποδοχή έτοιμης γνώσης αλλά μια διαδικασία κατασκευής, πώς οι μαθητές θα κατασκευάσουν έννοιες και ιδέες όταν αυτές χρειάστηκαν πολύ χρόνο και τη συμβολή πολλών για να αναπτυχθούν; Είναι αρκετή η παρουσίαση ενός αρχικού ερεθίσματος από το δάσκαλο στους μαθητές για να αρχίσουν αυτοί τις «κατασκευές» τους; Ασφαλώς και οι μαθητές δεν πρόκειται να αποκτήσουν από τύχη ή σύμπτωση αυτές τις «κατασκευαστικές» δυνατότητες εφόσον προηγουμένως δεν έχει εγκαθιδρυθεί ένα περιβάλλον που θα τους παροτρύνει σε ενεργητική και ερευνητική συμπεριφορά με αποτέλεσμα την ανάπτυξη ενεργητικής μάθησης.

Η ενεργητική μάθηση

Όμως ποιο είναι το περιεχόμενο της «ενεργητικής» φύσης της μάθησης; Εδώ εμφανίζονται δύο εκδοχές. Η πρώτη εκδοχή που αφορά στον όρο «ενεργητική μάθηση» αντιπροσωπεύει,σύμφωνα με την Anthony [(1) p. 350)], τη μάθηση που αναπτύσσεται από δραστηριότητες με τις οποίες παρέχεται στους μαθητές σημαντική αυτονομία και έλεγχος της κατεύθυνσης αυτών των δραστηριοτήτων. Οι μαθησιακές δραστηριότητες που προσδιορίζονται με αυτόν τον τρόπο περιλαμβάνουν επίλυση προβλήματος, εργασία σε μικρές ομάδες, συνεργατική μάθηση και μάθηση μέσω συγκεκριμένων εμπειριών. Αντιθέτως οι «παθητικές» μαθησιακές δραστηριότητες κατά τις οποίες οι μαθητές είναι παθητικοί δέκτες πληροφοριών, περιλαμβάνουν παρακολούθηση μαθήματος, απαντήσεις σε «κλειστές» ερωτήσεις, εξάσκηση και εφαρμογές σε έννοιες που ήδη έχουν παρουσιασθεί.

Μια δεύτερη εκδοχή του όρου, εξίσου σημαντική, υποστηρίζεται από τους Kyriakou και Marshall [αναφέρεται στο (1)]. Σύμφωνα με αυτούς, η ενεργητική μάθηση δείχνει την ποιότητα της νοητικής εμπειρίας των μαθητών όταν αυτοί εμπλέκονται ενεργά σε μαθησιακές εμπειρίες που χαρακτηρίζονται από αυξημένη αντίληψη και κατανόηση. Εκφράζει μια στάση για ενεργητική νοητική αναζήτηση και την ανάπτυξη μεταγνωστικών αντιλήψεων.

Μέσα σε ένα τέτοιο πλαίσιο μάθησης διευκολύνεται η διαμόρφωση και διατύπωση εικασιών, κάτι το οποίο – όπως τονίζεται από πολλούς ερευνητές– είναι συστατικό στοιχείο της ενεργητικής και ερευνητικής στάσης των μαθητών στην προσπάθεια κατασκευής –από την πλευρά τους– της γνώσης. [(5), p. 259, (6), p. 463, (11), p. 64]. Η διατύπωση μιας εικασίας είναι μια προσπάθεια σύνδεσης και αποτύπωσης λανθανόντων σχέσεων και νοημάτων και σηματοδοτεί – από ψυχολογικής πλευράς – τη δημιουργία μιας άλλης στάσης του μαθητή προς τα Μαθηματικά. Ανεξάρτητα από το αν μια εικασία είναι αληθής ή όχι, η φάση του ελέγχου της φέρνει αντιμέτωπο το μαθητή με τη δημιουργία του με ό,τι αυτό συνεπάγεται. Αν μια εικασία ανατραπεί, ο μαθητής συνειδητοποιεί ότι έχει ακολουθήσει μια ανεπαρκή προσέγγιση στο πρόβλημα που τον απασχολεί. Τόσο η συνειδητοποίηση της ανεπαρκούς στρατηγικής όσο και η ελλιπής κατανόηση εννοιών και σχέσεων δημιουργούν στο μαθητή ανισορροπία την οποία προσπαθεί να ξεπεράσει αναδιοργανώνοντας τις γνώσεις του. Μέσα από αυτή τη διαδικασία οδηγείται στο χτίσιμο της καινούργιας γνώσης. Σύμφωνα με τον Piaget ο μαθητής μαθαίνει όταν φτάνει σε γνωστικές συγκρούσεις, δηλαδή όταν βιώνει καταστάσεις ανισορροπίας οι οποίες τον οδηγούν σε αναθεώρηση των απόψεών του και της πρακτικής του. Ένα πολύ σημαντικό στοιχείο που μπορεί να προκύψει από τον έλεγχο μιας εικασίας είναι η «στροφή» των μαθητών από τα διαισθητικά σχήματα που χρησιμοποίησαν για να καταλήξουν σε συμπεράσματα–εικασίες, σε αποδεικτικά σχήματα που θα χρησιμοποιούν και μαθηματικά επιχειρήματα (τόσο ως προς τη διατύπωση όσο και ως προς την αυστηρότητα) [(14), σελ.14].

Όμως μια μαθησιακή δραστηριότητα πώς μπορεί να οδηγήσει σε ενεργητικές νοητικές εμπειρίες και τελικά σε συμπεράσματα-εικασίες; Μια μαθησιακή διαδικασία δεν είναι γραμμική και εύκολα μπορεί να φτάσει σε αδιέξοδο για πολλούς λόγους όπως: αδυναμία σύνδεσης των δεδομένων ή «ανεπάρκεια» αυτών (π.χ. περίπτωση ανοικτών προβλημάτων). Στην περίπτωση αυτή το αδιέξοδο μπορεί να διατυπωθεί υπό μορφή μιας εικασίας απλοϊκής (naive) που μπορεί να μην έχει και ιδιαίτερη σχέση με τα δεδομένα που συγκροτούν την προβληματική κατάσταση την οποία αντιμετωπίζει ο μαθητής [(14), σελ.157]. Στη συντήρηση του ερευνητικού κλίματος συμβάλλουν τα καινούργια στοιχεία που προκύπτουν ως αποτέλεσμα των διαφόρων επεξεργασιών που συντελούνται (π.χ. πράξεις, μετασχηματισμοί, αποδεικτικά σχήματα κ.λ.π.). Αυτές οι επεξεργασίες μπορεί να γίνονται στο ίδιο επίπεδο αναπαράστασης ή σε διαφορετικά και με διαφορετικούς βαθμούς εγκυρότητας και αξιοπιστίας κάθε φορά.

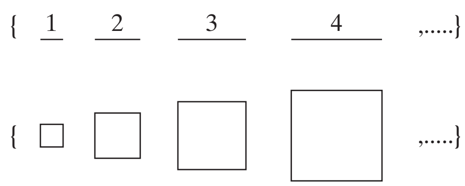
Για τη χρήση των αναπαραστάσεων

Η ιδέα της αναπαράστασης χρησιμοποιείται με ποικίλους βαθμούς ακρίβειας και είναι πολύ λεπτή και πολυσήμαντη [(8), p.383, (9), p.23]. Υπάρχουν διάφοροι λόγοι που προσφεύγουμε στη χρήση τους [(2), p. 110]. Για παράδειγμα μια πρώτη προσέγγιση για τη λύση της εξίσωσης: συνx= x–1, θα μπορούσε να αντιμετωπισθεί στο γραφικό επίπεδο με το σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f(x)=συνx και g(x)=x–1 αφού οι τετμημένες των κοινών σημείων (αν υπάρχουν) θα είναι και οι ρίζες της εξίσωσης.

Η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων κατά την αντιμετώπιση μιας προβληματικής κατάστασης, οι συνδέσεις τους, όσο και η ερμηνεία μιας αναπαράστασης από μια άλλη έχουν ιδιαίτερη αξία για τη μαθηματική κατανόηση [(10),

p. 34]. Για παράδειγμα μια αποδεικτική διαδικασία μπορεί κατ' αρχήν να μορφοποιηθεί σε ένα διαισθητικό και εμπειρικό επίπεδο και στη συνέχεια να ακολουθήσει μια πιο τυπική εκδοχή της, ή μια απόδειξη στο γραφικό ή γεωμετρικό επίπεδο μπορεί να εξηγεί περισσότερο απ' ό,τι η αντίστοιχή της στο συμβολικό επίπεδο. Άλλωστε η μαθηματική κατανόηση που είναι και η επιδίωξη, είναι κάτι πολύ περισσότερο από την επιβεβαίωση ότι όλοι οι κρίκοι μιας αλυσίδας παραγωγής συμπερασμάτων είναι ορθοί [(7)].

Όμως η μετακίνηση μεταξύ αναπαραστάσεων διαφορετικών επιπέδων δεν είναι μια εύκολη και γνώριμη διαδικασία [(15)]. Ακόμη έχει παρατηρηθεί ότι διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας προβληματικής κατάστασης μπορεί να δώσουν και διαφορετικές απαντήσεις. Σε έρευνα των D. Tirosh και P. Tsamir [(17)] στην οποία συμμετείχαν 189 σπουδαστές γυμνασιακών τάξεων, παρατηρήθηκε ότι οι απαντήσεις των μαθητών για το κατά πόσο δύο δοσμένα απειροσύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων εξαρτώνται καθοριστικά από τις αναπαραστάσεις αυτών των συνόλων. Έτσι μια αριθμητική αναπαράσταση στην οποία τα δύο απειροσύνολα τοποθετήθηκαν οριζόντια το ένα δίπλα στο άλλο, δηλαδή {1,2,3,4,...}, {4,8,12, 16,...}, οδήγησε τους μαθητές σε ένα υψηλό ποσοστό (περί το 70%) να απαντήσουν ότι τα δύο αυτά σύνολα έχουν διαφορετικό αριθμό στοιχείων και μάλιστα ότι το πρώτο έχει περισσότερα στοιχεία από το δεύτερο. Όταν όμως οι μαθητές είχαν να αντιμετωπίσουν έναν άλλο τύπο αναπαράστασης αυτών των δύο συνόλων –τη γεωμετρική τους αναπαράσταση– όπου το πρώτο σύνολο είναι ευθύγραμμα τμήματα με μήκη 1,2,3,4,... και το δεύτερο σύνολο είναι τετράγωνα με πλευρές 1,2,3,4,.. και των οποίων οι περίμετροι είναι 4,8,12,16,..., όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



τότε οι απαντήσεις τους σε μεγάλο ποσοστό (περί το 80%) ήταν ότι αυτά τα δύο σύνολα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Έτσι δύο τύποι αναπαραστάσεων οδήγησαν τους μαθητές σε διαφορετικές δικαιολογήσεις και τελικά σε αντικρουόμενες λύσεις. Ασφαλώς ο δεύτερος τύπος αναπαράστασης της προβληματικής κατάστασης που τέθηκε στους μαθητές είναι πιο κοντά στις δυνατότητές τους. Όμως πολλοί λίγοι μπορούν να μεταβούν στη δεύτερη έκφραση των συνόλων μόνοι τους, η οποία έκφραση ευνοεί επεξεργασίες (στην προκειμένη περίπτωση αντιστοιχίσεις 1-1 και επί) που οδηγούν στη σωστή απάντηση.

Η διεύρυνση των ορίων μιας αναπαράστασης

Αφού λοιπόν η «μεταφορά» μιας αναπαράστασης, μιας προβληματικής κατάστασης, από ένα επίπεδο σε ένα άλλο είναι μια δύσκολη υπόθεση, επιβάλλεται η εξάντληση των ορίων και δυνατοτήτων της αρχικής αναπαράστασης, στοιχείο το οποίο μπορεί να αυξήσει την πιθανότητα αποτελεσματικότερης αντιμετώπισης του θέματος στο αρχικό πλαίσιο (π.χ. μετάβαση από απλοϊκές εικασίες σε εικασίες εγκυρότερης μορφής). Έτσι αν η αρχική γραφή των συνόλων {1,2,3,4,...} και {4,8,12,16,...} –των οποίων το πλήθος των στοιχείων θέλουμε να συγκρίνουμε– είχε επεκταθεί στην εξής γραφή: {1,2,3,4,...} και {1.4, 2.4, 3.4, 4.4,...} όπου τα στοιχεία του δευτέρου συνόλου προκύπτουν από τα στοιχεία του πρώτου συνόλου όταν το καθένα από αυτά πολλαπλασιασθεί με τον ίδιο αριθμό, νομίζουμε ότι οι απαντήσεις των μαθητών θα ήταν κοντά σε αυτές που έδωσαν όταν αντιμετώπισαν τη γεωμετρική αναπαράσταση των δύο συνόλων. Επομένως «οι μαθητές θα πρέπει να μαθαίνουν να βλέπουν τα όρια κάθε αναπαράστασης και να τα χρησιμοποιούν επιτυχώς σε κατάλληλα πλαίσια» [(16), p. 115].

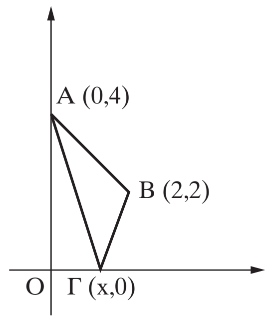
Η διεύρυνση των ορίων μιας αναπαράστασης μπορεί να συμβάλει τόσο στη διατύπωση νέων εικασιών όσο και στην τροποποίηση των αρχικών, κάτι το οποίο δεν είναι σίγουρο ότι μπορεί να εξασφαλισθεί με το πέρασμα σε άλλο επίπεδο αναπαράστασης. Όμως αυτή η διεύρυνση–εξάντληση των ορίων μιας αναπαράστασης πώς μπορεί να υποβοηθηθεί; με ποιους τρόπους οι αρχικά μη «αναγνώσιμες» πληροφορίες είναι δυνατόν να αποτελέσουν νέα δεδομένα τα οποία συνδεόμενα με τα αρχικά θα συμβάλουν στη συνέχιση της ερευνητικής διαδικασίας και να καταστούν έτσι σημαντικοί «παράγοντες» για την αντιμετώπιση της προβληματικής κατάστασης; Ποιος ο ρόλος των «μεμονωμένων» μετακινήσεων μεταξύ διαφόρων επιπέδων αναπαράστασης στη διεύρυνση των ορίων μιας αναπαράστασης; Μέσα από μια μελέτη περίπτωσης προσπαθούμε να προσεγγίσουμε απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα.. Ο μαθητής είναι της Α΄ Λυκείου και από τους καλύτερους της τάξης του, δεν έχει δε διδαχθεί ιδιαίτερες στρατηγικές επίλυσης προβλήματος. Το πρόβλημα που δόθηκε είναι το εξής:

Πρόβλημα

Δίδονται τα σημεία Α (0,4), Β (2,2) και Γ (x,0), xεR. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση του x.

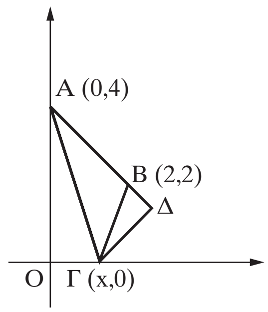
Ο μαθητής ξεκινάει να φτιάχνει το σχήμα. Προβληματίζεται για λίγο για το πού θα βάλει το σημείο Γ. Τελικά κατέληξε στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 1) και ξεκινάι η συζήτηση.

1. Μαθητής (Μ): Αφού η βάση ΑΒ είναι σταθερή, αρκεί να υπολογίσουμε το αντίστοιχο ύψος που είναι το ΓΔ (σχήμα 2).
2. Καθηγητής (Κ): Το μήκος του ύψους ΓΔ πόσο είναι;
3. Μ: Το πρόβλημα είναι το άκρο Δ του ύψους.
4. Κ: Δηλαδή;
5. Μ: Δεν ξέρω τις συντεταγμένες του Δ.



Σχήμα 1

Είναι φανερό ότι η επιλογή του τύπου Ε=1/2 βάση·ύψος υπαγορεύτηκε από τη σταθερότητα της πλευράς ΑΒ του (μεταβαλλόμενου) τριγώνου ΑΒΓ, που τη θεώρησε ως βάση αυτού του τριγώνου. Όμως η σταθερότητα της βάσης δεν μπορεί να αξιοποιηθεί με τον παραπάνω τύπο, κάτι που συνειδητοποιείται γρήγορα, όπως φαίνεται από την «επέμβαση» που κάνει στο σχήμα και φαίνεται παρακάτω (σχήμα 3).

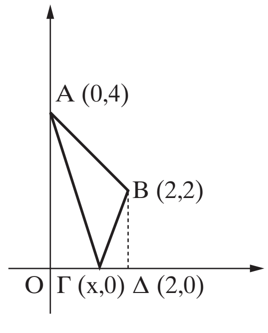


Σχήμα 2

6. Μ: Θα βρω το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΟΔΒ και από αυτό θα αφαιρέσω το εμβαδόν των δύο τριγώνων ΑΟΓ και ΒΓΔ.
7. Κ: Να το υπολογίσουμε λοιπόν.
   Ο μαθητής γράφει τη σχέση:
   (ΑΒΓ)= (ΑΟΔΒ)–(ΑΟΓ)–(ΒΓΔ)
   και μετά τον υπολογισμό των εμβαδών του τραπεζίου ΑΟΔΒ και των τριγώνων ΑΟΓ και ΒΓΔ (χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία) βρίσκει ότι:

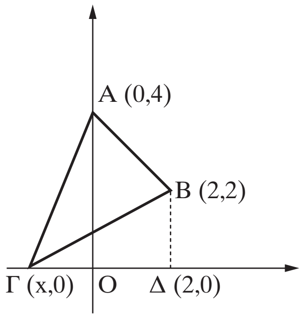
$$(ΑΒΓ)=4–x$$

8. Κ: Είναι ο παραπάνω τύπος ο τελικός; Δηλαδή έτσι θα δίδεται πάντα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ για όλες τις θέσεις της κορυφής Γ;
9. Μ: ...Μετά από λίγο... Θα είναι άλλος αν το x είναι αρνητικό.



Σχήμα 3

Η τελευταία απάντηση δείχνει ότι ο μαθητής από την αρχή έχει κάνει μια εικασία, ότι δηλαδή το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ θα προσδιορίζεται με δύο τύπους, ο ένας αν x>0 και ο άλλος αν x<0. Του προτείνουμε λοιπόν να υπολογίσει το εμβαδόν του τριγώνου



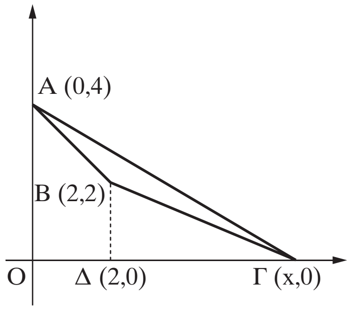
Σχήμα 4

ΑΒΓ όταν x<0. Ο μαθητής φτιάχνει το διπλανό σχήμα και ακολουθεί η συζήτηση:

10. Μ: Είναι δύο τρίγωνα... και μετά από λίγο, το ένα μπορώ να το υπολογίσω (προφανώς εννοεί το ΒΔΓ).
11. Κ: Των οποίων όμως τριγώνων δεν γνωρίζεις το άθροισμα των εμβαδών, όπως συνέβαινε στο σχήμα 3.
12. Μ: Άρα δεν μπορώ να βρω και το εμβαδόν του ΑΒΓ.

    Προς το παρόν η αρχική εικασία («κατά το ήμισυ», όταν δηλαδή χ<ο) δεν μπορεί να συνδεθεί με τα δεδομένα του προβλήματος. Προτείνουμε στο μαθητή το διπλανό σχήμα με στόχο τη «συνολική» αξιολόγηση της αρχικής του εικασίας.
13. Μ: Από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΓ αν αφαιρέσω το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΔΟ και το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΔ, θα βρω αυτό που θέλω.

    Μετά από υπολογισμούς (με σχετική ευκολία) βρίσκει ότι:

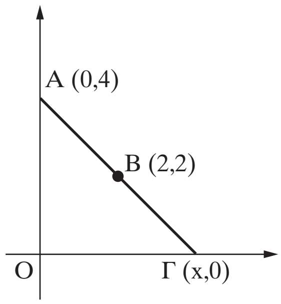


Σχήμα 5

$$(ΑΒΓ)=x-4$$

14. Κ: Έχουμε βρει όμως και άλλον τύπο όταν είναι x>o από το σχήμα 3.
15. Μ: Τότε ο προηγούμενος θα ισχύει όταν x<2 και ο τελευταίος όταν x>2.

Είναι φανερό ότι η αρχική εικασία δεν μπορεί να συνδεθεί με τα δεδομένα του προβλήματος. Συγκεκριμένα: Παρά το μεταβαλλόμενο περίγραμμα του τριγώνου ΑΒΓ, λόγω μεταβολής της θέσεως της κορυφής Γ, υπάρχει μια «σταθερότητα» του σχήματος με την έννοια ότι υπάρχει δυνατότητα υπολογισμού του ζητούμενου εμβαδού με ενιαίο τρόπο ή -με αλγεβρικούς όρους- υπάρχουν διαστήματα μέσα στα οποία όταν κινείται ο x προκύπτει ο ίδιος τύπος για τον υπολογισμό του εμβαδού. Αυτήν τη σταθερότητα του σχήματος (με την παραπάνω έννοια) δεν μπορεί να «δει» ο μαθητής. Η τροποποίηση της αρχικής εικασίας (το x>0 γίνεται μετά x>2 ή x<2) δεν πρόκειται να οδηγήσει το μαθητή στο επιδιωκόμενο αποτέλεσμα. Η επιλογή των διαφόρων θέσεων της κορυφής Γ του τριγώνου ΑΒΓ γίνεται χωρίς κάποιο προσανατολισμό και δεν φαίνεται να διευρύνει την πληροφοριακή βάση της δοσμένης αναπαράστασης στην οποία έχει τεθεί το πρόβλημα. Σε αυτή τη διεύρυνση προσπαθούμε να εισφέρουμε με την παρακάτω παρέμβαση.



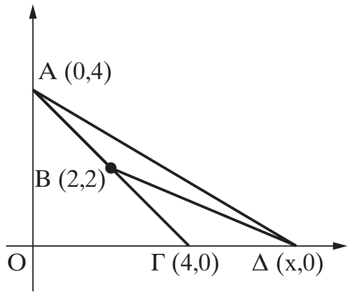
Σχήμα 6

16. Κ: Ο τύπος (ή οι τύποι) για τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου που θέλουμε να βρούμε, θα πρέπει να καλύπτει και την περίπτωση που το εμβαδόν είναι μηδέν. Έτσι δεν είναι;
17. Μ: Ναι έτσι θα πρέπει να είναι.
18. Κ: Δηλαδή τι θα πρέπει να συμβαίνει όταν Ε=0;
19. Μ: Δεν έχουμε τρίγωνο.
20. Κ: Μπορείς να το δείξεις στο σχήμα;

Ο μαθητής φτιάχνει το διπλανό σχήμα.

Η προέκταση της πλευράς ΑΒ και η τομή της με τον x΄x στο σταθερό σημείο Γ είναι ένα καινούργιο στοιχείο και προέρχεται από την ανάγκη να εξηγηθεί η ισότητα Ε=0, δηλαδή από το πώς «μεταφέρεται» μια αλγεβρική σχέση στο γραφικό επίπεδο. Αυτό το νέο στοιχείο που προέρχεται από τη σύνδεση μιας συγκεκριμένης τιμής της συνάρτησης που ψάχνουμε (εμβαδόν επιφάνειας), με τη μορφή του περιγράμματος αυτής της επιφάνειας ελπίζουμε να προσανατολίσει το μαθητή στην επιδιωκόμενη «σταθερότητα» του σχήματος.

21. Κ: Να συνεχίσουμε;
22. Μ: Θα έχουμε δύο τύπους για το εμβαδό. Ο ένας όταν x>4 και ο άλλος όταν x<4.
23. Κ: Γιατί;
24. Μ: Όταν x>4 θα έχουμε το διπλανό σχήμα και το εμβαδό του ΑΒΔ θα είναι ίσο με: (ΑΒΔ)=(ΑΓΔ)–(ΒΓΔ).
25. Κ: Πάντα;
26. Μ: Πάντα θα αφαιρώ από το ΑΓΔ το ΒΓΔ (εννοεί βέβαια αφαίρεση εμβαδών).
27. Κ: Και όταν x<4 ;
28. Μ: ... (φτιάχνοντας ένα πρόχειρο σχήμα) Πάλι τα ίδια θα έχουμε.



Σχήμα 7

Σχόλια – Παρατηρήσεις

Για τη φύση του προβλήματος έχουμε να παρατηρήσουμε ότι ο μαθητής έχει να «μεταφέρει» ή να «αποδώσει» μια προβληματική κατάσταση από ένα επίπεδο αναπαράστασης (γραφικό) σε ένα άλλο επίπεδο (αναλυτικό). Συγκεκριμένα θα πρέπει να βρει πώς το εμβαδό ενός μεταβαλλόμενου τριγώνου –η μία κορυφή του κινείται στον x΄x–εκφράζεται με αναλυτικό τρόπο (συνάρτηση).

Αρχικά ο μαθητής θα λέγαμε ότι ακολουθεί την «κλασική» διαδικασία, δηλαδή προσπαθεί να κάνει απλά χρήση των δεδομένων. Έτσι η σταθερότητα της πλευράς ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ τον οδηγεί στον τύπο Ε=1/2 βάση. ύψος, για τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου. Γρήγορα όμως εγκαταλείπει αυτή την προσέγγιση για πιο έμμεσους τρόπους υπολογισμού. Στη συνέχεια αφού έχει βρει έναν τύπο υπολογισμού κάνει την εικασία –γραμμή 9– ότι το εμβαδόν του τριγώνου θα υπολογίζεται με δύο τύπους την οποία και τροποποιεί-γραμμή 15-αναγκαστικά. Στη συνέχεια, με αφετηρία τον τρόπο παρέμβασης του δασκάλου, εξηγεί με γεωμετρικούς όρους τι συμβαίνει όταν το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται μηδέν, παρά το γεγονός ότι και οι δύο τύποι που έχει βρει για το εμβαδόν δίδουν x=4. Ένα «λανθάνον» δεδομένο -όσο και κρίσιμο- που είναι η «σταθερότητα» του σχήματος, όπως ήδη την έχουμε περιγράψει, δεν μπορεί αρχικά να αξιοποιηθεί. Η ανάδειξη αυτού του νέου στοιχείου προήλθε από τη «μεταφορά» της ισότητας Ε=0 στο γραφικό επίπεδο. Συγκεκριμένα: η συνάρτηση του εμβαδού -που ψάχνουμε να βρούμε- θα παίρνει την τιμή μηδέν όταν η μεταβλητή κορυφή Γ(x,0) θα βρεθεί στην ίδια ευθεία με τις άλλες δύο σταθερές Α(04) και Β(2,2). Δηλαδή η «μεταφορά» μιας μεμονωμένης περίπτωσης από το επίπεδο αναπαράστασης στο οποίο θέλουμε να τοποθετήσει τη λύση ο μαθητής, στο επίπεδο αναπαράστασης που τέθηκε αρχικά το πρόβλημα, έπαιξε ρόλο ενίσχυσης των αρχικών δεδομένων. Πράγματι η εμφάνιση της ευθείας ΑΒΓ προσανατολίζει αρχικά το μαθητή σε δύο κατηγορίες τριγώνων. Η μία όταν η μεταβαλλόμενη κορυφή βρίσκεται δεξιά του Γ και η άλλη όταν είναι αριστερά του Γ. Αυτή η κατηγοριοποίηση αναδεικνύει στη συνέχεια και τη «σταθερότητα» του εμβαδού κάθε μιας από τις παραπάνω κατηγορίες τριγώνων. Δηλαδή η εικασία που κάνει ο μαθητής για δύο τύπους υπολογισμού του εμβαδού -γραμμή 22- είναι διαφορετική από τις προηγούμενες αφού έχει εξαλειφθεί πλέον το στοιχείο τη συμπτωματικότητας και της τυχαίας αναζήτησης. ‘Ετσι η ανάδειξη του νέου στοιχείου που επετεύχθηκε μέσω της διεύρυνσης της αρχικής αναπαράστασης, εισέφερε στην τροποποίηση της αρχικής εικασίας και μάλιστα στην κατεύθυνση της απαλλαγής της από τυχαίες αναζητήσεις, κάτι που ήταν βεβαίως αναπόφευκτο να συμβεί πριν από τη διεύρυνση. Πράγματι ενώ από την αρχή ο μαθητής κάνει λόγο για δύο τύπους υπολογισμού του εμβαδού με σημείο αλλαγής του τύπου της ζητούμενης συνάρτησης το x=0, στη συνέχεια αυτό γίνεται 2 και μετά 4.

Ώστε λοιπόν η «μεταφορά» μιας μεμονωμένης περίπτωσης από ένα επίπεδο αναπαράστασης (στην περίπτωσή μας είναι αυτό στο οποίο θέλουμε να εμφανίσει τη λύση ο μαθητής) σε ένα άλλο (είναι αυτό στο οποίο έχει τεθεί το πρόβλημα) έπαιξε ρόλο «ενίσχυσης» των δεδομένων, αφού ανέδειξε τον ιδιαίτερο ρόλο ενός στοιχείου που σε πρώτη «ανάγνωση» δεν αποκαλύπτεται. Πράγματι το σημείο Γ του x′x που είναι στην ίδια ευθεία με τα σημεία Α(0,4) και Β(2,2) έχει μια ιδιαίτερη συμβολή στη διατύπωση της τελικής εικασίας (γραμμή 22). Είναι ένα οριακό σημείο, μια «οριακή κορυφή», και συμβάλλει στην ομαδοποίηση τριγώνων (δύο ομάδες) το εμβαδό των οποίων υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Σχετικά τώρα με τη «μεταφορά» μιας αναπαράστασης από ένα επίπεδο σε άλλο. Κάτι που δεν είναι μια εύκολη και γνώριμη διαδικασία και ούτε προκύπτει αυθόρμητα [15]. Στην περίπτωσή μας, αυτή η μετάβαση (αυτό άλλωστε ζητούσε το πρόβλημα) ευνοήθηκε όταν η αρχική αναπαράσταση έγινε «αναγνώσιμη» σε μεγαλύτερο εύρος από την πλευρά του μαθητή. Επιχειρώντας μια εξήγηση γι'αυτό, θα λέγαμε ότι τούτο ίσως οφείλεται (και) στο γεγονός ότι ο αυξανόμενος αριθμός των επεξεργασιών–μετασχηματισμών (λόγω διεύρυνσης) στο αρχικό επίπεδο ευνοεί αφενός μεν μεμονωμένες μετακινήσεις μεταξύ αναπαραστάσεων διαφορετικών επιπέδων, αφετέρου δε περιορίζει σταδιακά το στοιχείο της συμπτωματικότητας που αναγκαστικά υπάρχει στα αρχικά στάδια της ερευνητικής εργασίας.

Αν και οι τρόποι με τους οποίους ένας «λύτης» βλέπει μια προβληματική κατάσταση μπορούν να αλλάζουν κατά τη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης [13], ένας σταθερός προσανατολισμός για ερμηνευτικές προσεγγίσεις των αρχικά «αναγνώσιμων» δεδομένων –είτε στο ίδιο πλαίσιο αναπαράστασης είτε έξω από αυτό–είναι ένα πρώτο βήμα για καλύτερη «αίσθηση» της προβληματικής κατάστασης. Μέσω αυτής μπορεί να διευκολυνθεί η διεύρυνση της αρχικής αναπαράστασης τόσο με την ανάδειξη νέων στοιχείων-δεδομένων όσο και με την αναγνώριση του πιο σύνθετου ρόλου που κάποια από τα αρχικά δεδομένα διαδραματίζουν.

Βιβλιογραφικές αναφορές

1. Anthony, G. (1996). Active Learning in a Constructivist Framework, *Educational Studies in Mathematics,* 349-369, 31, 4, Kluwer Academic Publishers.

2. Bednarz, N. et all. (1987). Pedagogical considarations concerning the problem of represantation. In C. Janvier (Ed.). *Problems of representation ih the teaching and learning of Mathematics.* (109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Elbaum Associates.

3. Glasersfeld von, E. (1995). Learning Mathematics: Constructivist and interactionist theories of mathematical development, [Review of the book *Learning Mathematics: Constructivist and Interactionist Theories of Mathematical Development,* Cobb, P. (Ed).]. *In Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 4,* 120-122.

4. Cobb, R. et all. (1991). Curriculum and teacher development: Psychological and anthropological perspectives. In E. Fennema, T.P. Carpender & S.J. Lamon (Eds.). *Integrating research on teaching and learning mathematics.* 92-131, Albany, NY: SUNU University Press.

5. Dreyfus, T. (1992). Aspects of computerized learning environment which support problem solving. In J.P. Ponte et all. (Eds), *Mathematical problem solving and new information technologies,* Berling Springer.

6. Fairbairn, D.M. (1993). Starring in Mathematics, *Mathematics Teacher,* 80(6), 463-470

7. Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof, *Interchange,* 21, No 1, 6-13.

8. Kaput, J. (1985). Representation and problem solving: Methodological issues related to modeling. In Silver E. (Ed.). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspective.* LEA.

9. Kaput, J. (1987). Representation Systems and Mathematics. In Janvier C. (Ed.). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* LEA.

10. Lesh, R. et all. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In Janvier C. (Ed.). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* LEA.

11. Mason, J. et all. (1985). *Thinking mathematically*. Wokingham: Addison -Wesley.

12. Μπούφη Άντα (1985). Μία προσπάθεια αλλαγής του παραδοσιακού τρόπου διδασκαλίας των Μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο, *Μαθηματική Επιθεώρηση,* 43, 49-65, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (Ε.Μ.Ε.).

13. Nunokava K. (1997). Giving new Senses to the existing elements: A characteristic of the solution accompanied by global restructuring, *Journal of Mathematical Behavior,* Vol. 16, 365-378.

14. Σκούρας Αθανάσιος Σ. (1999). *Η Εικασία: ο ρόλος της στην εξέλιξη των Μαθηματικών και η συμβολή της στη διδακτική πράξη*. Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

15. Σκούρας Αθανάσιος Σ. (2000). Η σύνδεση των αναπαραστάσεων στην πορεία διαμόρφωσης αφηρημένων εννοιών. Η περίπτωση της συνάρτησης $f(x)= αx^2+βx+γ$, *«Ευκλείδης γ»,* 51, 44-60, Ε.Μ.Ε.

16. Spada Hans (1994). Conceptual Change or Multiple Representations, *Learning and Instruction,* 4, 113–116.

17. Tirosh, D. and Tsamir, P. (1999). Consistency and Representations: The case of Actual infinity, *Journal for Research in Mathematics Education,* 30, 2, 213-219, NCTM.

18. Wittman, E. (1995). Mathematics Education as a design science, *Educational Studies in Mathematics,* 29,(4), 355-374.

Υποβολή άρθρου, 15 Μαΐου 2000