Χρήση των Ασαφών Συνόλων για τη μελέτη της διαδικασίας της μάθησης

Μιχάλης Γρ. Βόσκογλου
Ανώτατο Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πατρών

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό χρησιμοποιούνται βασικά στοιχεία της θεωρίας των Ασαφών Συνόλων για την περιγραφή και αξιολόγηση της διαδικασίας της μάθησης μιας γνωστικής ενότητας από μια ομάδα ατόμων (μαθητές, φοιτητές κ.λπ.).Το ασαφές αυτό πρότυπο αντιπαραβάλλεται με ένα μοντέλο πιθανότητας για τη μάθηση, που παρουσιάσαμε σε παλαιότερο άρθρο μας.

Ένα πείραμα στην τάξη κατά τη διδασκαλία μαθηματικών, που πραγματοποιήθηκε για την εφαρμογή του μοντέλου πιθανότητας στην πράξη, επαναλήφθηκε άλλες δύο φορές κατά τη διδασκαλία του ίδιου αντικειμένου, με το ίδιο διδακτικό υλικό, τις ίδιες συνθήκες και την ίδια μέθοδο διδασκαλίας . Τα δεδομένα, που προέκυψαν από τις επαναλήψεις αυτές, τα ερμηνεύουμε εδώ σε σχέση με το ασαφές πρότυπο, έτσι ώστε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή των δύο μοντέλων να είναι απόλυτα συγκρίσιμα μεταξύ τους.

Abstract

We introduce a fuzzy model to describe and to evaluate the process of learning a subject matter by students. Our model is presented in contrast to a probability-based model, discussed in an earlier paper. A classroom experiment, that was performed in order to illustrate the use of the probability model in practice, was repeated twice during the teaching process of the same cognitive object, with the same didactic material, the same conditions and the same method of teaching. The outcomes of those two repetitions of the

---

Ο κ. Μιχ. Βόσκογλου είναι καθηγητής του ΤΕΙ Πατρών.

experiment are interpreted here in terms of the fuzzy model, so that the conclusions obtained from the application of the two models be comparable to each other.

1. Εισαγωγικές έννοιες

Στην καθημερινή ζωή παρουσιάζονται συχνά καταστάσεις, όπου κάποιοι ορισμοί δεν έχουν σαφή όρια. Αυτό π.χ. συμβαίνει όταν μιλάμε για τα «ψηλά βουνά» μιας χώρας, τους «καλούς μαθητές» μιας τάξης κ.λπ. Η θεωρία των Ασαφών Συνόλων αναπτύχθηκε μέσα από την ανάγκη της αναπαράστασης τέτοιου είδους καταστάσεων με μαθηματικό τρόπο.

Αν U είναι το καθολικό σύνολο αναφοράς, ένα ασαφές σύνολο A σε σχέση με το U ορίζεται με τη βοήθεια της συνάρτησης συμμετοχής $m_A(x)$, η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο x του U μια πραγματική τιμή του διαστήματος [0,1] (βλ. Zadeh, 1965). Ειδικότερα έχουμε:

$$A = \{(x, m_A(x)) : x \in U\}.$$

Η τιμή $m_A(x)$ εκφράζει το βαθμό, που το x επιβεβαιώνει τη χαρακτηριστική ιδιότητα του A και για το λόγο αυτό ονομάζεται *βαθμός συμμετοχής* του x στο A. Έτσι, όσο πιο κοντά βρίσκεται το $m_A(x)$ στο 1, τόσο περισσότερο το x ικανοποιεί τη χαρακτηριστική ιδιότητα του A.

Οι περισσότερες έννοιες των κλασσικών συνόλων (π.χ. συμπλήρωμα, ένωση, τομή κ.λπ.) επεκτείνονται με τη βοήθεια του παραπάνω ορισμού και για την περίπτωση των ασαφών συνόλων. Για μια παρουσίαση της θεωρίας των ασαφών συνόλων βλ. Klir & Folger (1988).

Προς αποφυγή σύγχυσης είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι οι βαθμοί συμμετοχής δεν είναι πιθανότητες, αν και συχνά παίρνουν παρόμοιες τιμές.

Μια σημαντική διαφορά είναι ότι, ενώ το άθροισμα των πιθανοτήτων, που αντιστοιχούν στα στοιχειώδη ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου είναι ίσο με 1, αυτό δεν είναι απαραίτητο να συμβαίνει με τους βαθμούς συμμετοχής.

2. Το μοντέλο πιθανότητας

Σε παλαιότερο άρθρο μας (βλ. Βόσκογλου, 2002), αφού αναφερθήκαμε στην επαναανακάλυψη της νέας γνώσης ως μεθόδου διδασκαλίας των μαθηματικών, παρουσιάσαμε τη θεωρία του Voss (1987), σύμφωνα με την οποία η μάθηση είναι στην ουσία μια ακολουθιακή διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, στα οποία οι πληροφορίες εισόδου (δεδομένα) αντιπροσωπεύουν την ήδη υπάρχουσα γνώση, που πρέπει να μετασχηματισθεί κατάλληλα, ώστε να προκύψει η λύση (νέα γνώση).

Η όλη διαδικασία εμπεριέχει τα παρακάτω στάδια: *Αναπαράσταση* των δεδομένων που διεγείρουν την προσοχή του υποκειμένου για μάθηση ατόμου, *ερμηνεία* των δεδομένων αυτών, ώστε να παραχθεί η νέα γνώση, *γενίκευση* της νέας γνώσης σε μια ποικιλία καταστάσεων και τέλος *κατηγοριοποίηση* της γενικευμένης γνώσης, δηλαδή ερμηνεία της σε σχέση με τις κλάσεις της ήδη υπάρχουσας γνώσης ώστε το άτομο να αποκτήσει την ικανότητα να συσχετίζει τη νέα πληροφορία με τις υπάρχουσες γνωστικές του δομές (σχήματα γνώσης, βλ. Anderson, 1984).

Με βάση την παραπάνω θεωρία για το μηχανισμό της μάθησης κατασκευάσαμε ένα πιθανοθεωρητικό μοντέλο για τη μέτρηση των ικανοτήτων μάθησης μιας ομάδας ατόμων (μαθητές, φοιτητές κ.λπ.) για τα μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, μέσα από το μοντέλο αυτό προκύπτουν τα ποσοστά των μελών της ομάδας, που αντιμετωπίζουν με επιτυχία τα στάδια της ερμηνείας, της γενίκευσης και της κατηγοριοποίησης κατά τη διαδικασία της μάθησης, όπως επίσης –με τη βοήθεια της έννοιας της δεσμευμένης πιθανότητας– και τα ποσοστά εκείνων, που αντιμετωπίζοντας με επιτυχία ένα από τα στάδια αυτά, αντιμετωπίζουν επίσης με επιτυχία και το επόμενο, ή τα επόμενα στάδια (βλ. Βόσκογλου, 2002).

3. Το ασαφές πρότυπο

Η γνώση, που έχουν οι μαθητές (φοιτητές), για ένα συγκεκριμένο αντικείμενο είναι συνήθως ατελής και χαρακτηρίζεται από διαφορετικούς βαθμούς κατανόησης και βάθους. Από την οπτική γωνία του δάσκαλου εξάλλου υπάρχει αμφιβολία σχετικά με το βαθμό κατάκτησης κάθε σταδίου της μάθησης – όπως αυτά περιγράφτηκαν παραπάνω – από τους μαθητές του. Όλα αυτά δίδουν την ιδέα για την εισαγωγή της θεωρίας των ασαφών συνόλων προκειμένου να πετύχουμε μια ποιοτικότερη αναπαράσταση της διαδικασίας της μάθησης ενός γνωστικού αντικειμένου από μια ομάδα ατόμων.

Ας θεωρήσουμε μια ομάδα n μαθητών (φοιτητών), $n\geq 2$, κατά τη διαδικασία της μάθησης μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας. Συμβολίζουμε με S_i, $i=1$, 2, 3, τα στάδια της ερμηνείας, της γενίκευσης και της κατηγοριοποίησης αντίστοιχα και με a, b, c, d και e τις γλωσσικές εκφράσεις της αμελητέας, χαμηλής, μέτριας, υψηλής και πλήρους αντιμετώπισης με επιτυχία καθενός από τα στάδια αυτά της μάθησης αντίστοιχα..

Θέτουμε $U=\{a, b, c, d, e\}$. Θα εκφράσουμε τα S_i ως ασαφή σύνολα A_i, $i=1$, 2, 3, σε σχέση με το U. Πράγματι, αν με n_{ia}, n_{ib}, n_{ic}, n_{id} and n_{ie} συμβολίσουμε τον αριθμό των μαθητών, που έχουν αντιμετωπίσει με αμελητέα, χαμηλή, μέτρια, υψηλή και πλήρη επιτυχία το στάδιο S_i αντίστοιχα, $i=1, 2, 3$, ορίζουμε τις συναρτήσεις συμμετοχής με τη βοήθεια των σχετικών συχνοτήτων θέτοντας $m_{A_i}(x)=\frac{n_{ix}}{n}$, για όλα τα x του U. Κατά συνέπεια μπορούμε να γράψουμε:

$$A_i = \{(x, \frac{n_{ix}}{n}) : x \in U\},\ i = 1, 2, 3.$$

Στη συνέχεια θα αναπαραστήσουμε όλες τις πιθανές καταστάσεις (profiles ή overall states) ενός μαθητή κατά τη διαδικασία της μάθησης με τη βοήθεια μιας *ασαφούς σχέσης*, ας πούμε R, στο U^3. Η σχέση R μπορεί να ορισθεί ανάλογα με τις κλασσικές σχέσεις, δηλαδή ως ένα σύνολο διατεταγμένων τριάδων με στοιχεία από το U, κάθε μια από τις οποίες έχει ένα βαθμό συμμετοχής από 0 έως 1. Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε:

$$R=\{(s, m_R(s)) : s=(x,y,z) \in U^3\}.$$

Για να προσδιορίσουμε κατάλληλα τη συνάρτηση συμμετοχής m_R δίδουμε τον παρακάτω ορισμό:

Μια διατεταγμένη τριάδα $s=(x, y, z)$ του U^3 θα λέμε ότι είναι *καλά διατεταγμένη*, αν το x αντιστοιχεί σε ένα βαθμό αντιμετώπισης ίσο ή μεγαλύτερο του y, και το y αντιστοιχεί σε ένα βαθμό αντιμετώπισης ίσο ή μεγαλύτερο του z. Για παράδειγμα η τριάδα (c, c, a) είναι καλά διατεταγμένη, ενώ η τριάδα (b, a, c) δεν είναι.

Ορίζουμε τώρα το βαθμό συμμετοχής της κατάστασης s να είναι
$m_R(s)= m_{A_1}(x)\cdot m_{A_2}(y)\cdot m_{A_3}(z)$, όταν η s είναι καλά διατεταγμένη
και $m_R(s)=0$ σε αντίθετη περίπτωση.

Ο λόγος για τον οποίο ορίσαμε το βαθμό συμμετοχής κάθε μη καλά διατεταγμένης κατάστασης να είναι ίσος με το 0 είναι προφανής. Για παράδειγμα, αν είχαμε $m_R(s)\neq 0$, όταν $s=(b, a, c)$, θα αντιμετωπίζαμε την παράλογη περίπτωση, όπου κάποια μέλη της ομάδας (ένα ή περισσότερα), έχοντας επιτύχει αμελητέα γενίκευση της νέας γνώσης, κατηγοριοποιούν τη γενικευμένη γνώση σε ικανοποιητικό βαθμό!

Αποδεικνύεται ότι ο παραπάνω ορισμός ικανοποιεί τα αξιώματα που πρέπει να ισχύουν σε γενικευμένες πράξεις μεταξύ ασαφών συνόλων (general aggregation operations), όπου δοσμένα ασαφή σύνολα συνδυάζονται για την παραγωγή ενός νέου ασαφούς συνόλου (βλ. Klir & Folger, 1988 , σελ. 58-59 και σελ. 283).

Για να απλοποιήσουμε τους συμβολισμούς μας θα γράφουμε στη συνέχεια m_s αντί του $m_R(s)$.

Η *δυνατότητα (possibility)* r_s της κατάστασης s ορίζεται ως $r_s=\frac{m_s}{\max\{m_s\}}$, όπου με $\max\{m_s\}$ συμβολίζουμε τη μέγιστη τιμή του m_s, για όλα τα s του U^3. Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι η μέγιστη δυνατότητα είναι πάντοτε ίση με 1 και αντιστοιχεί στην κατάσταση με το μέγιστο m_s.

Πρέπει να σημειωθεί ότι κατά τη διαδικασία της μάθησης οι μαθητές είναι πιθανό να εφαρμόσουν τρόπους σκέψης, που οδηγούν σε συμπεράσματα και γενικεύσεις πέραν των όσων ισχύουν στην πραγματικότητα, δηλαδή σε αντιφάσεις. Κάτι τέτοιο βέβαια δεν είναι επιθυμητό και θα πρέπει ο δάσκαλος να βοηθήσει, ώστε με την κατάλληλη αναπροσαρμογή των επιμέρους συμπερασμάτων, που προκύπτουν στα διαδοχικά στάδια της μάθησης, το τελικό συμπέρασμα να είναι κατά το δυνατόν απαλλαγμένο από τέτοιου είδους αντιφάσεις (π.χ. τέτοιες αντιφάσεις στα μαθηματικά μπορεί να είναι η ψευδαίσθηση ότι $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, ή $\log(a+b)=\log a+\log b$ κ.λ.π.).

Ένας τρόπος για να μετρήσουμε το βαθμό των αντιφάσεων, που προκύπτουν σε μια ομάδα ατόμων κατά τη διαδικασία της μάθησης είναι η χρήση της ποσότητας

$$\mathrm{ST} = \frac{1}{\log 2}\left[\sum_{i=1}^{m}(r_i - r_{i+1})\log\frac{i}{\sum_{j=1}^{i} r_j}\right] \quad \mathbf{(1)},$$

(strife function) πάνω στη διατεταγμένη κατανομή

$r_1=1 \geq r_2 \geq \ldots\ldots \geq r_m \geq r_{m+1}$ των δυνατοτήτων όλων των πιθανών καταστάσεων των μελών της ομάδας, όπου $m+1$ είναι το πλήθος των καταστάσεων αυτών (βλ. Klir & Wierman, 1998). Αυτό ενισχύεται και από την άποψη του Shackle (1979), σύμφωνα με την οποία η μελέτη της ανθρώπινης σκέψης μπορεί να τυποποιηθεί επαρκέστερα με τη χρήση των δυνατοτήτων, παρά με τη χρήση των πιθανοτήτων.

Γίνεται φανερό ότι όσο μικρότερη είναι η τιμή του ST, τόσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός εμπέδωσης της νέας γνώσης από τους μαθητές.

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι επιθυμούμε να μελετήσουμε τα συνδυασμένα αποτελέσματα της συμπεριφοράς k διαφορετικών ομάδων ατόμων, $k \geq 2$, κατά τη διαδικασία της μάθησης του ίδιου γνωστικού αντικειμένου.

Στη περίπτωση αυτή πρέπει να εισάγουμε τις *ασαφείς μεταβλητές* $A_i(t)$, με $i=1, 2, 3$ και $t=1, 2, ..., k$, και να προσδιορίσουμε τις δυνατότητες $r(s)$ των καταστάσεων $s(t)$ των μελών των k διαφορετικών ομάδων με τη βοήθεια των *ψευδοσυχνοτήτων* $f(s)=\sum_{t=1}^{k} m_s(t)$.

Έχουμε τότε $r(s) = \dfrac{f(s)}{\max\{f(s)\}}$, όπου το $\max\{f(s)\}$ συμβολίζει τη μέγιστη ψευδοσυχνότητα όλων των πιθανών καταστάσεων των μελών των k ομάδων. Η δυνατότητα $r(s)$ της κατάστασης $s(t)$ θα μπορούσαμε κατά κάποιο τρόπο να πούμε ότι μετρά τη «σχετική πιθανότητα» - αν και η έκφραση αυτή είναι μάλλον αδόκιμη- εμφάνισης της $s(t)$ σε σχέση με τις άλλες καταστάσεις.

Κατά συνέπεια οι διάφορες τιμές των $r(s)$ δίδουν μια μαρτυρία του συνδυασμένου αποτελέσματος της συμπεριφοράς των k διαφορετικών ομάδων κατά τη διαδικασία μάθησης του ίδιου γνωστικού αντικειμένου.

4. Ένα πείραμα στην τάξη κατά τη διδασκαλία μαθηματικών

Η παρουσίαση του μοντέλου πιθανότητας για τη μάθηση, στο οποίο αναφερθήκαμε παραπάνω (βλ. Παράγραφο 2), συνδυάσθηκε με ένα πείραμα στην τάξη κατά τη διδασκαλία μαθηματικών. Το ίδιο πείραμα επαναλήφθηκε άλλες δύο φορές κατά τη διδασκαλία του ίδιου γνωστικού αντικειμένου (ορισμένο ολοκλήρωμα), με το ίδιο διδακτικό υλικό, τις ίδιες συνθήκες και την ίδια μέθοδο διδασκαλίας (επαναανακάλυψη: βλ. Βόσκογλου, 2002, Παράγραφος 1).

Εδώ δεν πρόκειται να αναφερθούμε στις λεπτομέρειες διεξαγωγής του πειράματος, αφού αυτό περιγράφεται αναλυτικά σε παλαιότερο άρθρο μας (βλ. Βόσκογλου, 2002, Παράγραφος 4). Απλά θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα, που προέκυψαν από τις δύο επαναλήψεις του, τα οποία θα ερμηνεύσουμε με τη βοήθεια του ασαφούς μοντέλου, έτσι ώστε τα αποτελέσματα, που προκύπτουν από την εφαρμογή των δύο μοντέλων στην πράξη , να είναι απόλυτα συγκρίσιμα μεταξύ τους.

Κατά την πρώτη επανάληψη το πείραμα πραγματοποιήθηκε με τη συμμετοχή 35 σπουδαστών. Στην πρώτη φάση του πειράματος (στάδιο A_1) διαπιστώσαμε ότι 17, 8 και 10 σπουδαστές αντίστοιχα ερμήνευσαν με μέτρια, υψηλή και πλήρη επιτυχία τη νέα γνώση. Κατά συνέπεια, σύμφωνα με την ορολογία του ασαφούς προτύπου, που παρουσιάσαμε παραπάνω (βλ. Παράγραφο 3), έχουμε $n_{ia}=n_{ib}=0$, $n_{ic}=17$, $n_{id}=8$ and $n_{ie}=10$. Άρα το στάδιο A_1 της ερμηνείας της νέας γνώσης ως ασαφούς συνόλου σε σχέση με το U γράφεται:

$A_1 = \{(a, 0), (b, 0), (c, \frac{17}{35}), (d, \frac{8}{35}), (e, \frac{10}{35})\}$.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι:

$A_2 = \{(a, \frac{6}{35}), (b, \frac{6}{35}), (c, \frac{16}{35}), (d, \frac{7}{35}),(e, 0)\}$

και

$A_3 = \{(a, \frac{12}{35}), (b, \frac{10}{35}), (c, \frac{13}{35}), (d, 0), (e, 0)\}$.

Είναι εύκολο τώρα να υπολογίσουμε τους βαθμούς συμμετοχής όλων των καταστάσεων (βλ. στήλη του $m_s(1)$ στον Πίνακα 1 παρακάτω). Για παράδειγμα, αν $s=(c, b, a)$, τότε:

$$m_s = m_{A_1}(\mathrm{c}) \cdot m_{A_2}(\mathrm{b}) \cdot m_{A_3}(\mathrm{a}) = \frac{17}{35}\frac{6}{35}\frac{12}{35} = \frac{1224}{42875} \approx 0{,}029.$$

Όπως τελικά προκύπτει η κατάσταση (c, c, c) έχει το μέγιστο βαθμό συμμετοχής 0,082 και κατά συνέπεια η δυνατότητα κάθε κατάστασης s υπολογίζεται από τη σχέση $r_s = \frac{m_s}{0{,}082}$. Για παράδειγμα η δυνατότητα της (c, b, a) είναι ίση με $\frac{0{,}029}{0{,}082} \approx 0{,}353$, ενώ βέβαια της (c, c, c) είναι ίση με 1.

Υπολογίζοντας τις δυνατότητες των $5^3=125$ συνολικά καταστάσεων (βλ. στήλη του $r_s(1)$ στον Πίνακα 1 παρακάτω) βρίσκουμε ότι η διατεταγμένη κατανομή δυνατοτήτων της ομάδας είναι:

$r_1=1$, $r_2=0{,}927$, $r_3=0{,}768$, $r_4=0{,}512$, $r_5=0{,}476$, $r_6=0{,}415$, $r_7=0{,}402$, $r_8=0{,}378$, $r_9=r_{10}=0{,}341$, $r_{11}=0{,}329$, $r_{12}=0{,}317$, $r_{13}=0{,}305$, $r_{14}=293$, $r_{15}=r_{16}=0{,}256$, $r_{17}=0{,}207$, $r_{18}=0{,}195$, $r_{19}=0{,}171$, $r_{20}=r_{21}=r_{22}=0{,}159$, $r_{23}=134$, $r_{24}=r_{25}=\dots\dots\dots=r_{125}=0$.

Από τη σχέση **(1)** της Παραγράφου 3 και με τη βοήθεια υπολογιστή βρήκαμε ότι ο βαθμός των αντιφάσεων της ομάδας είναι ST=1,023.

Ύστερα από μερικές ημέρες επαναλάβαμε το ίδιο πείραμα με μια ομάδα 30 σπουδαστών ενός άλλου τμήματος. Αυτή τη φορά προέκυψε ότι:

$A_1=\{(a, 0), (b, \frac{6}{30}), (c, \frac{15}{30}), (d, \frac{9}{30}), (e, 0)\}$,

$A_2=\{(a, \frac{6}{30}), (b, \frac{8}{30}), (c, \frac{16}{30}), (d, 0), (e, 0)\}$,

$A_3=\{(a, \frac{12}{30}), (b, \frac{9}{30}), (c, \frac{9}{30}), (d, 0), (e, 0)\}$.

Υπολογίζοντας τους βαθμούς συμμετοχής όλων των πιθανών καταστάσεων των σπουδαστών της ομάδας (βλ. στήλη του $m_s(2)$ στον Πίνακα 1 παρακάτω), προκύπτει ότι η κατάσταση (c, c, a) έχει το μέγιστο βαθμό συμμετοχής 0,107 και κατά συνέπεια η δυνατότητα κάθε κατάστασης είναι $r_s = \frac{m_s}{0{,}107}$ (βλ. στήλη του $r_s(2)$ στον Πίνακα 1 παρακάτω).

Ακόμη βρίσκουμε ότι ST=1,010.

Συγκρίνοντας τις τιμές του ST για τις δύο ομάδες καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η δεύτερη ομάδα αφομοίωσε το νέο γνωστικό αντικείμενο (ορισμένο ολοκλήρωμα) κάπως καλύτερα από την πρώτη. Αυτό συνέβη παρά το γεγονός ότι η κατάσταση (*c, c, c*) με τη μεγαλύτερη δυνατότητα εμφάνισης για την πρώτη ομάδα είναι ικανοποιητικότερη από την αντίστοιχη κατάσταση (*c, c, a*) για τη δεύτερη ομάδα.

Στη συνέχεια και προκειμένου να μελετήσουμε το συνδυασμένο αποτέλεσμα της συμπεριφοράς των δύο ομάδων, εισάγουμε τις ασαφείς μεταβλητές $A_i(t)$, με $i=1, 2, 3$ και $t=1, 2$ και υπολογίζουμε τη ψευδοσυχνότητα $f(s) = m_s(1) + m_s(2)$ εμφάνισης της κάθε κατάστασης (βλ. στήλη του $f(s)$ στον Πίνακα 1 παρακάτω). Όπως διαπιστώνεται η κατάσταση (*c, c, a*) έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης 0,183 και κατά συνέπεια για τις δυνατότητες έχουμε $r(s)=\frac{f(s)}{0,183}$. Οι δυνατότητες όλων των καταστάσεων, που έχουν συχνότητα εμφάνισης διάφορη του 0, δίδονται στην τελευταία στήλη του Πίνακα 1.

5. Τελικά Συμπεράσματα

Από τη σύγκριση του μοντέλου πιθανότητας με το ασαφές μοντέλο για τη μάθηση, που περιγράψαμε παραπάνω, καθώς και από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων, που προέκυψαν από τα πειράματα εφαρμογής τους μέσα στην τάξη – τα οποία πραγματοποιήθηκαν κάτω από τις ίδιες συνθήκες - προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

Τα δύο μοντέλα έχουν ως κοινή αφετηρία τη θεωρία του Voss (1987) για το χαρακτήρα της μάθησης.

Είναι προφανές ότι, πέρα από τα μαθηματικά, τα δύο μοντέλα μπορούν - με τις κατάλληλες αναπροσαρμογές κάθε φορά - να χρησιμοποιηθούν στην πράξη κατά τη διδασκαλία οποιουδήποτε άλλου γνωστικού αντικειμένου.

Και τα δύο μοντέλα δίδουν κάποιες ποσοτικές πληροφορίες, που μπορούν να βοηθήσουν αποτελεσματικά το δάσκαλο στο να σχηματίσει μια συγκεντρωτική εικόνα του βαθμού αφομοίωσης μιας νέας γνωστικής ενότητας από τους μαθητές του και κατά συνέπεια να αναπροσαρμόσει ανάλογα τον τρόπο και το υλικό της διδασκαλίας του.

Το μοντέλο πιθανότητας γίνεται εύκολα κατανοητό και είναι απλό στη χρήση του για τον κάθε εκπαιδευτικό, που θέλει να το εφαρμόσει στην πράξη. Περιορίζεται ωστόσο μόνο στο να δίδει συγκεντρωτικά ορισμένες ποσοτικές πληροφορίες, που αφορούν τη μέτρηση κάποιων δεικτών, που σχετίζονται με τις ικανότητες μάθησης ενός γνωστικού αντικειμένου από μια ομάδα διδασκομένων.

Πίνακας 1

A_1	A_2	A_3	$m_s(1)$	$r_s(1)$	$m_s(2)$	$r_s(2)$	f(s)	r(s)
b	b	b	0	0	0,016	0,150	0,016	0,087
b	b	a	0	0	0,021	0,196	0,021	0,115
b	a	a	0	0	0,016	0,150	0,016	0,087
c	c	c	0,082	1	0,080	0,748	0,162	0,885
c	c	a	0,076	0,927	0,107	1	0,183	1
c	c	b	0,063	0,768	0,008	0,075	0,071	0,388
c	a	a	0,028	0,341	0,040	0,374	0,068	0,372
c	b	a	0,028	0,341	0,053	0,495	0,081	0,443
c	b	b	0,024	0,293	0,040	0,374	0,064	0,350
d	d	a	0,016	0,495	0	0	0,016	0,087
d	d	b	0,013	0,159	0	0	0,013	0,074
d	d	c	0,021	0,256	0	0	0,021	0,115
d	a	a	0,013	0,159	0,024	0,224	0,037	0,202
d	b	a	0,013	0,159	0,032	0,299	0,045	0,246
d	b	b	0,011	0,134	0,024	0,224	0,035	0,191
d	c	a	0,031	0,378	0,064	0,598	0,095	0,519
d	c	b	0,026	0,317	0,048	0,449	0,074	0,404
d	c	c	0,034	0,415	0,048	0,449	0,082	0,448
e	a	a	0,017	0,207	0	0	0,017	0,093
e	b	b	0,014	0,171	0	0	0,014	0,077
e	c	a	0,039	0,476	0	0	0,039	0,213
e	c	b	0,033	0,402	0	0	0,033	0,180
e	c	c	0,042	0,512	0	0	0,042	0,230
e	d	a	0,025	0,305	0	0	0,025	0,137
e	d	b	0,021	0,256	0	0	0,021	0,115
e	d	c	0,027	0,329	0	0	0,027	0,148

Οι τιμές του πίνακα έχουν υπολογισθεί με ακρίβεια χιλιοστού

Αντίθετα το ασαφές πρότυπο, αν και κάπως δυσνόητο και πολύπλοκο στη χρήση του, δεν περιορίζεται μόνο στις ποσοτικές πληροφορίες (δυνατότητες, τιμή του ST κ.λ.π.), αλλά δίδει και μια ποιοτική εικόνα της συμπεριφοράς της ομάδας διδασκομένων, αφού μελετά όλες τις πιθανές καταστάσεις των μελών της. Από την άποψη αυτή είναι πιο χρήσιμο για τον ερευνητή της εκπαίδευσης από το μοντέλο πιθανότητας.

Ένα άλλο πλεονέκτημα του ασαφούς μοντέλου είναι ότι δίδει τη δυνατότητα της μελέτης – μέσω του υπολογισμού των ψευδοσυχνοτήτων των διαφόρων καταστάσεων - των συνδυασμένων αποτελεσμάτων της συμπεριφοράς δύο, ή και περισσοτέρων ομάδων διδασκομένων κατά τη διαδικασία της μάθησης της ίδιας γνωστικής ενότητας.

Τέλος, γίνεται φανερό ότι, με εντελώς ανάλογο τρόπο μπορούν, με τη βοήθεια του ασαφούς προτύπου, να μελετηθούν τα συνδυασμένα αποτελέσματα της συμπεριφοράς της ίδιας ομάδας διδασκομένων κατά τη διαδικασία μάθησης δύο, ή και περισσοτέρων, νέων γνωστικών ενοτήτων.

Βιβλιογραφία

Βόσκογλου, Μ. (2002), Μέτρηση των ικανοτήτων μάθησης στα Μαθηματικά, *Μέντορας*, 5, 3-13.

Anderson, R. C. (1984), Some reflections on the acquisition of knowledge, *Educational Researcher*, 13, 5-10.

Klir, G., J. & Folger, T. A. (1988) , *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information*, London: Prentice Hall Int.

Klir, G. R. & Wierman, M. J. (1998), *Uncertainty-Based Information: Elements of Generalized Information Theory,* Heidelberg: Physica – Verlag.

Shackle, G. L. S. (1961), *Decision, Order and Time in Human Affairs,* Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Voss, J. F. (1987), Learning and transfer in subject matter learning: A problem solving model, *Int. J. Educ. Research*, 11, 607-622.

Zadeh, L. A. (1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, 338-353.

Το άρθρο υποβλήθηκε στις 7/2/2007 *Έγινε αποδεκτό στις 22/10/2008*