

2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^ο ΒΑΘΜΟΥ

Η εξίσωση $ax + \beta = 0$

Στο Γυμνάσιο μάθαμε τον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων της μορφής $ax + \beta = 0$ για συγκεκριμένους αριθμούς a, β , με $a \neq 0$

Γενικότερα τώρα, θα δούμε πώς με την βοήθεια των ιδιοτήτων των πράξεων, επιλύουμε την παραπάνω εξίσωση, οποιοδήποτε και αν είναι οι αριθμοί a, β .

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} ax + \beta = 0 &\Leftrightarrow ax + \beta - \beta = -\beta \\ &\Leftrightarrow ax = -\beta \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Αν $a \neq 0$ τότε:

$$ax = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{a}$$

Επομένως, αν $a \neq 0$ η εξίσωση έχει **ακριβώς μία λύση**, την $x = -\frac{\beta}{a}$.

- Αν $a = 0$, τότε η εξίσωση $ax = -\beta$ γίνεται $0x = -\beta$, η οποία:
 - i) αν είναι $\beta \neq 0$ δεν έχει λύση και γι αυτό λέμε ότι είναι **αδύνατη**, ενώ
 - ii) αν είναι $\beta = 0$ έχει τη μορφή $0x = 0$ και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x δηλαδή είναι **ταυτότητα**.

Η λύση της εξίσωσης $ax + \beta = 0$ και γενικά κάθε εξίσωσης λέγεται και **ρίζα** αυτής.

Για παράδειγμα

- ✓ Για την εξίσωση $4(x-5) = x-5$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 4(x-5) = x-5 &\Leftrightarrow 4x-20 = x-5 \\
 &\Leftrightarrow 4x-x = 20-5 \\
 &\Leftrightarrow 3x = 15 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{15}{3} = 5.
 \end{aligned}$$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x=5$.

- ✓ Για την εξίσωση $3x-x-3=2x$ Έχουμε

$$3x-x-3=2x \Leftrightarrow 3x-x-2x=3 \Leftrightarrow 0x=3$$
 που είναι αδύνατη.
- ✓ Για τη εξίσωση $4(x-5)-x=3x-20$ έχουμε

$$4x-20-x=3x-20 \Leftrightarrow 4x-x-3x=20-20 \Leftrightarrow 0x=0$$
 που είναι ταυτότητα.

ΣΧΟΛΙΟ

Όπως βλέπουμε στα παραπάνω παραδείγματα, κάθε φορά καταλήγουμε σε εξίσωση της μορφής $ax+\beta=0$, της οποίας οι συντελεστές a και β είναι συγκεκριμένοι αριθμοί και μπορούμε αμέσως να δούμε ποια από τις προηγούμενες περιπτώσεις ισχύει. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο, αν οι συντελεστές a και β της εξίσωσης $ax+\beta=0$ εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων. Σε τέτοιες περιπτώσεις, τα γράμματα αυτά λέγονται **παράμετροι**, η εξίσωση λέγεται **παραμετρική** και η εργασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της λέγεται **διερεύνηση**.

Για παράδειγμα η εξίσωση

$$(\lambda^2-1)x-\lambda+1=0, \lambda \in \mathbb{R}$$

έχει παράμετρο το λ και γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
 (\lambda^2-1)x-\lambda+1=0 &\Leftrightarrow (\lambda^2-1)x=\lambda-1 \\
 &\Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-1)x=\lambda-1
 \end{aligned}$$

Επομένως

- ✓ Αν $\lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 1$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την

$$x = \frac{\lambda-1}{(\lambda+1)(\lambda-1)} = \frac{1}{\lambda+1}$$

- ✓ Αν $\lambda = -1$, η εξίσωση γίνεται $0x = -2$ και είναι αδύνατη.
- ✓ Αν $\lambda = 1$, η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένας ποδηλάτης πήγε από μια πόλη Α σε μία πόλη Β και επέστρεψε από τον ίδιο δρόμο. Στην μετάβαση οδηγούσε με μέση ταχύτητα 25km/h και ξεκουράστηκε ενδιάμεσα 1 ώρα. Στην επιστροφή οδηγούσε με μέση ταχύτητα 20 km/h και δεν έκανε καμία στάση. Αν ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν 10 ώρες, να υπολογιστεί το μήκος της διαδρομής ΑΒ.

ΛΥΣΗ

Αν x km είναι η απόσταση ΑΒ, τότε ο ποδηλάτης χρειάστηκε $\frac{x}{25}$ ώρες για να πάει από το Α στο Β και $\frac{x}{20}$ ώρες για να επιστρέψει. Αφού ξεκουράστηκε και 1 ώρα ,

ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν $\frac{x}{25} + \frac{x}{20} + 1$

Επειδή ο χρόνος αυτός είναι 10 ώρες έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{25} + \frac{x}{20} + 1 = 10$$

Λύνουμε την εξίσωση και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{x}{25} + \frac{x}{20} + 1 = 10 &\Leftrightarrow 4x + 5x + 100 = 1000 \\ &\Leftrightarrow 9x = 900 \\ &\Leftrightarrow x = 100 \end{aligned}$$

Άρα το μήκος της διαδρομής είναι 100 km.

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού

Στην συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, πώς μπορούμε να επιλύσουμε εξισώσεις οι οποίες δεν είναι μεν εξισώσεις 1^{ου} βαθμού, αλλά, με κατάλληλη διαδικασία, ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1^ο

Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{x^2}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x-1} - 1 &= \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1) \frac{x^2}{x-1} - (x-1) = (x-1) \frac{1}{x-1} \\ &\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0, \quad \text{αφού } x \neq 1. \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2^ο

Να λυθεί η εξίσωση

$$|2x-1| = |x+3|$$

ΛΥΣΗ

Από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών έχουμε:

$$|2x-1| = |x+3| \Leftrightarrow 2x-1 = x+3 \quad \text{ή} \quad 2x-1 = -(x+3)$$

Όμως:

$$\checkmark \quad 2x-1 = x+3 \Leftrightarrow 2x-x = 4 \Leftrightarrow x = 4$$

$$\checkmark \quad 2x-1 = -(x+3) \Leftrightarrow 2x+x = -3+1 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}.$$

Επομένως η εξίσωση έχει δυο λύσεις, τους αριθμούς 4 και $-\frac{2}{3}$.

ΣΧΟΛΙΟ

Με τον ίδιο τρόπο λύνουμε κάθε εξίσωση της μορφής $|f(x)| = |g(x)|$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3^ο

Να λυθεί η εξίσωση

$$|2x-3| = 3x-2$$

ΛΥΣΗ

Επειδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι μη αρνητικό, για να έχει λύση η εξίσωση αυτή πρέπει και το δεύτερο μέλος της να είναι μη αρνητικό. Δηλαδή, πρέπει:

$$3x-2 \geq 0 \tag{1}$$

Με αυτόν τον περιορισμό, λόγω των ιδιοτήτων των απόλυτων τιμών, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 |2x-3| &= 3x-2 \Leftrightarrow 2x-3=3x-2 & \text{ή} & \quad 2x-3=2-3x \\
 &\Leftrightarrow 2x-3x=-2+3 & \text{ή} & \quad 2x+3x=2+3 \\
 &\Leftrightarrow -x=1 & \text{ή} & \quad 5x=5 \\
 &\Leftrightarrow x=-1 & \text{ή} & \quad x=1
 \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω λύσεις δεκτή είναι μόνο η $x=1$, διότι μόνο αυτή ικανοποιεί τον περιορισμό (1).

ΣΧΟΛΙΟ

Με τον ίδιο τρόπο λύνουμε εξισώσεις της μορφής $|f(x)| = g(x)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**A' ΟΜΑΔΑΣ**

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $4x - 3(2x - 1) = 7x - 42$

ii) $\frac{1-4x}{5} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-4}{20} + \frac{5}{4}$

iii) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{4} - \frac{x}{5} - \frac{49}{60}$

iv) $1,2(x+1) - 2,5 + 1,5x = 8,6$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2(3x-1) - 3(2x-1) = 4$

ii) $2x - \frac{5-x}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{7x}{3}$.

3. Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) $(\lambda-1)x = \lambda-1$

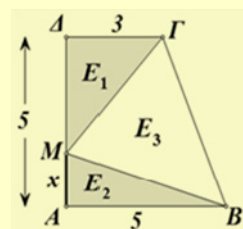
ii) $(\lambda-2)x = \lambda$

iii) $\lambda(\lambda-1)x = \lambda-1$

iv) $\lambda(\lambda-1)x = \lambda^2 + \lambda$

4. Στο διπλανό ορθογώνιο τραπέζιο να βρεθεί η θέση του σημείου M στην AD ώστε για τα εμβαδά $E_1 = (M \hat{A} \Gamma)$, $E_2 = (M \hat{A} B)$ και $E_3 = (M \hat{B} \Gamma)$ να ισχύει:

i) $E_1 + E_2 = E_3$ ii) $E_1 = E_2$



5. Από κεφάλαιο 4000 € ένα μέρος του κατατέθηκε σε μια τράπεζα προς 5% και το υπόλοιπο σε μια άλλη τράπεζα προς 3%. Ύστερα από 1 χρόνο εισπράχθηκαν συνολικά 175€ τόκοι. Ποιο ποσό τοκίστηκε προς 5% και ποιο προς 3%;

6. Να επιλυθούν οι παρακάτω τύποι ως προς την αναφερόμενη μεταβλητή:

i) $v = v_0 + at, \quad a \neq 0$ (ως προς το t) ii) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (ως προς το R_1).

7. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0$.

ii) $(x-2)^2 - (2-x)(4+x) = 0$.

8. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x(x^2-1) - x^3 + x^2 = 0$

ii) $(x+1)^2 + x^2 - 1 = 0$.

9. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

ii) $(x^2-4)(x-1) = (x^2-1)(x-2)$.

10. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

ii) $x^3 - 2x^2 - (2x-1)(x-2) = 0$.

11. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x^2-x}$

ii) $\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0$.

12. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$

ii) $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x}$

iii) $\frac{1}{x+2} = \frac{x}{x^2-4}$

iv) $\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1}$.

13. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς ακέραιους τέτοιους ώστε το άθροισμα τους να ισούται με το γινόμενο τους.

14. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $|2x-3|=5$

ii) $|2x-4|=|x-1|$

iii) $|x-2|=2x-1$

iv) $|2x-1|=x-2$.

15. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i)} \quad \frac{|x|+4}{3} - \frac{|x|+4}{5} = \frac{2}{3},$$

$$\text{ii)} \quad \frac{2|x|+1}{3} - \frac{|x|-1}{2} = \frac{1}{2}$$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i)} \quad \left| \frac{3-x}{3+x} \right| = 4$$

$$\text{ii)} \quad |x-1||x-2| = |x-1|$$

B' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad (x+\alpha)^2 - (x-\beta)^2 = 2\alpha(\alpha+\beta) \quad \text{ii)} \quad \frac{x-\alpha}{\beta} = \frac{x-\beta}{\alpha}$$

έχουν πάντα λύση, οποιοδήποτε και αν είναι οι πραγματικοί αριθμοί α, β .

2. Ποιοί περιορισμοί πρέπει να ισχύουν για τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να έχει λύση η

$$\text{εξίσωση } \frac{x}{\alpha} - \frac{x}{\beta} = 1;$$

3. Πόσο καθαρό οινόπνευμα πρέπει να προσθέσει ένας φαρμακοποιός σε 200ml διάλυμα οινοπνεύματος περιεκτικότητας 15%, για να πάρει διάλυμα οινοπνεύματος περιεκτικότητας 32%;

4. Ένα αυτοκίνητο Α κινείται με 100km/h. Ένα δεύτερο αυτοκίνητο Β που κινείται με 120km/h προσπερνάει το Α. Σε πόσα λεπτά τα δυο αυτοκίνητα θα απέχουν 1km;

5. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x+\alpha}{x-\alpha} = \frac{x^2}{x^2-\alpha^2}$ για όλες τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^3-8}{x-2} = x^2+4$.

7. Να λύσετε την εξίσωση $|2|x|-1| = 3$.

8. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^2-2x+1} = |3x-5|$.

2.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^v = a$

- Έστω η εξίσωση $x^3 = 8$. Όπως αναφέραμε στον ορισμό της v -οστής ρίζας μη αρνητικού αριθμού, η εξίσωση $x^3 = 8$ έχει ακριβώς μια θετική λύση, την $\sqrt[3]{8} = 2$. Η εξίσωση αυτή δεν έχει μη αρνητικές λύσεις, γιατί, για κάθε $x \leq 0$ ισχύει $x^3 \leq 0$.

Επομένως η εξίσωση $x^3 = 8$ έχει ακριβώς μια λύση, την $\sqrt[3]{8}$.

Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^v = a$, με $a > 0$ και v περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $\sqrt[v]{a}$.

- Έστω η εξίσωση $x^4 = 16$. Όπως και προηγουμένως η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια θετική λύση την $\sqrt[4]{16} = 2$. Η εξίσωση αυτή όμως έχει ως λύση και την $-\sqrt[4]{16} = -2$, αφού $(-\sqrt[4]{16})^4 = (\sqrt[4]{16})^4 = 16$.

Επομένως η εξίσωση $x^4 = 16$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, την $\sqrt[4]{16} = 2$ και την $-\sqrt[4]{16} = -2$.

Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^v = a$, με $a > 0$ και v άρτιο φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $\sqrt[v]{a}$ και $-\sqrt[v]{a}$.

- Έστω η εξίσωση $x^3 = -8$. Έχουμε διαδοχικά:

$$x^3 = -8 \Leftrightarrow -x^3 = 8 \Leftrightarrow (-x)^3 = 8 \Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2.$$

Επομένως η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια λύση, την $-\sqrt[3]{8} = -2$.

Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^v = a$, με $a < 0$ και v περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $-\sqrt[v]{|a|}$.

- Έστω η εξίσωση $x^4 = -4$. Επειδή για κάθε x ισχύει $x^4 \geq 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη.

Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^v = a$, με $a < 0$ και v άρτιο φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη.

Από τα παραπάνω συμπεράσματα και από το γεγονός ότι η εξίσωση $x^v = a^v$, με $v \in \mathbb{N}^*$, έχει προφανή λύση την $x = a$, προκύπτει ότι:

- Αν ο v περιττός, τότε η εξίσωση $x^v = a^v$ έχει μοναδική λύση, την $x = a$
- Αν ο v άρτιος, τότε η εξίσωση $x^v = a^v$ έχει δύο λύσεις, τις $x_1 = a$ και $x_2 = -a$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί η εξίσωση $x^4 + 8x = 0$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} x^4 + 8x = 0 &\Leftrightarrow x(x^3 + 8) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x^3 = -8 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt[3]{8} = -2 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

- Να λύσετε τις εξισώσεις
 i) $x^3 - 125 = 0$ ii) $x^5 - 243 = 0$ iii) $x^7 - 1 = 0$.
- Να λύσετε τις εξισώσεις
 i) $x^3 + 125 = 0$ ii) $x^5 + 243 = 0$ iii) $x^7 + 1 = 0$.
- Να λύσετε τις εξισώσεις
 i) $x^2 - 64 = 0$ ii) $x^4 - 81 = 0$ iii) $x^6 - 64 = 0$
- Να λύσετε τις εξισώσεις
 i) $x^5 - 8x^2 = 0$ ii) $x^4 + x = 0$ iii) $x^5 + 16x = 0$.
- Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο $81m^3$ και διαστάσεις x , x και $3x$. Να βρείτε τις διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου.
- Να λύσετε τις εξισώσεις
 i) $(x+1)^3 = 64$ ii) $1+125x^3 = 0$ iii) $(x-1)^4 - 27(x-1) = 0$.

2.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^ο ΒΑΘΜΟΥ

Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$

Η λύση πολλών προβλημάτων της Γεωμετρίας, της Φυσικής καθώς και άλλων επιστημών ανάγεται στην επίλυση μιας εξίσωσης της μορφής:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \text{με } a \neq 0 \quad (1)$$

η οποία λέγεται εξίσωση **δευτέρου βαθμού**.

Για παράδειγμα, έστω ο τύπος $S = v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2$, όπου S το διάστημα που διανύει κινητό σε χρόνο t , με αρχική ταχύτητα v_0 και επιτάχυνση γ . Αν θεωρήσουμε ως άγνωστο τον χρόνο t , τότε προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{1}{2} \gamma t^2 + v_0 t - S = 0,$$

η οποία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού.

Στη συνέχεια θα επιλύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή με τη μέθοδο της «**συμπλήρωσης του τετραγώνου**».

Έχουμε:

$$\begin{aligned} ax^2 + \beta x + \gamma = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{a}x + \frac{\gamma}{a} = 0 && [\text{αφού } a \neq 0] \\ &\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{a}x = -\frac{\gamma}{a} \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{\beta}{2a} = -\frac{\gamma}{a} \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{\beta}{2a} + \frac{\beta^2}{4a^2} = -\frac{\gamma}{a} + \frac{\beta^2}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4a\gamma}{4a^2} \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$, τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad (2)$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\Delta > 0$, τότε έχουμε:

$$x + \frac{\beta}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ή} \quad x + \frac{\beta}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

δηλαδή

$$x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Επομένως η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), έχει δύο λύσεις άνισες τις:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Για συντομία οι λύσεις αυτές γράφονται

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} .$$

- Αν $\Delta = 0$, τότε η εξίσωση (2) γράφεται:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) \cdot \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \quad \text{ή} \quad x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\beta}{2\alpha} \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση έχει **διπλή ρίζα** την $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

- Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι **αδύνατη** στο \mathbb{R} .

Η αλγεβρική παράσταση $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, από την τιμή της οποίας εξαρτάται το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$, ονομάζεται **διακρίνουσα** αυτής.

Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$
$\Delta > 0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta = 0$	Έχει μια διπλή ρίζα τη $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta < 0$	Είναι αδύνατη στο \mathbb{R} .

Για παράδειγμα

- ✓ Η εξίσωση $2x^2 - 3x + 1 = 0$ έχει $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$, οπότε έχει δυο ρίζες τις $x_1 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = 1$ και $x_2 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$.
- ✓ Η εξίσωση $x^2 - 4x + 4 = 0$ έχει $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$, οπότε έχει μια διπλή ρίζα την $x = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$.
- Η παραπάνω εξίσωση λύνεται σύντομα ως εξής:
 $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (διπλή ρίζα).
- ✓ Η εξίσωση $2x^2 - 3x + 4 = 0$ έχει $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -23 < 0$, οπότε δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Στην περίπτωση που η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 , έχουμε:

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$, τότε έχουμε τους τύπους:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

που είναι γνωστοί ως τύποι του Vieta.

Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, με την βοήθεια των τύπων του Vieta, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + \gamma = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0 \end{aligned}$$

Η τελευταία μορφή της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ μας δίνει τη δυνατότητα να την κατασκευάσουμε, όταν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.

Για παράδειγμα η εξίσωση με άθροισμα ριζών 3 και γινόμενο $\sqrt{2}$ είναι η $x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1^η Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x + 4\sqrt{3} = 0$

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = 4(\sqrt{3} + 1)^2 - 4 \cdot 4\sqrt{3} = 4[(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1] = 4(\sqrt{3} - 1)^2$$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x_{1,2} = \frac{2(\sqrt{3} + 1) \pm \sqrt{4(\sqrt{3} - 1)^2}}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 2 \pm 2(\sqrt{3} - 1)}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{array} \right.$$

2^η Ένας βράχος βρίσκεται στην κορυφή της χαράδρας ενός ποταμού, η οποία έχει βάθος 300m. Πόσος χρόνος απαιτείται μέχρι τη στιγμή, που ο βράχος θα αγγίξει το νερό του ποταμού, αν ο βράχος

i) πέσει από την κορυφή;

ii) εκσφενδονιστεί κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα 50 m/sec;

Δίδεται ότι $g \approx 10 \text{ m/sec}^2$.

ΛΥΣΗ

i) Είναι γνωστό από την Φυσική ότι το διάστημα S που διανύει ένα σώμα στην ελεύθερη πτώση σε χρόνο t sec είναι: $S = \frac{1}{2}gt^2$

Επειδή $S = 300\text{m}$ και $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$, έχουμε:

$$\frac{1}{2}10t^2 = 300 \Leftrightarrow 5t^2 = 300 \Leftrightarrow t^2 = 60 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{60} \Leftrightarrow t \approx \pm 7,75$$

Η αρνητική ρίζα δεν είναι αποδεκτή, διότι ο χρόνος στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν μπορεί να είναι αρνητικός. Άρα $t \approx 7,75\text{sec}$.

ii) Όταν το σώμα έχει αρχική ταχύτητα v_0 , το διάστημα που διανύει σε χρόνο t sec είναι $S = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$.

Επειδή $v_0 = 50 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ και $t > 0$ θα έχουμε:

$$\frac{1}{2}10t^2 + 50t = 300 \Leftrightarrow 5t^2 + 50t - 300 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 10t - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-10 + \sqrt{100 + 4 \cdot 60}}{2} \approx \frac{-10 + 18,43}{2} = 4,22\text{sec}.$$

Άρα, ο ζητούμενος χρόνος είναι περίπου 4,22sec.

ΣΧΟΛΙΟ

Κατά την επίλυση ενός προβλήματος, όπως είδαμε και παραπάνω, δεν πρέπει να ξεχνάμε να ελέγχουμε, αν οι λύσεις που βρήκαμε είναι εύλογες.

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού

Στη συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, πώς μπορούμε να επιλύσουμε εξισώσεις οι οποίες δεν είναι μεν 2ου βαθμού, αλλά, με κατάλληλη διαδικασία, ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1^ο:

Να λυθεί η εξίσωση

$$x^2 - 2|x| - 3 = 0.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή $x^2 = |x|^2$, η εξίσωση γράφεται:

$$|x|^2 - 2|x| - 3 = 0$$

Αν θέσουμε $|x| = \omega$, τότε η εξίσωση γίνεται

$$\omega^2 - 2\omega - 3 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τις $\omega_1 = 3$ και $\omega_2 = -1$. Από αυτές δεκτή είναι μόνο η θετική, αφού $\omega = |x| \geq 0$. Επομένως $|x| = 3$, που σημαίνει $x = -3$ ή $x = 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2^ο:

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{2x^2+x-1}{x^2-x}.$$

ΛΥΣΗ

Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $x-1 \neq 0$ και $x^2-x \neq 0$, δηλαδή $x \neq 0$ και $x \neq 1$. Με αυτούς τους περιορισμούς του x έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{x-1} - \frac{2}{x} &= \frac{2x^2+x-1}{x^2-x} \Leftrightarrow x(x-1)\frac{3x-1}{x-1} - x(x-1)\frac{2}{x} = x(x-1)\frac{2x^2+x-1}{x(x-1)} \\ &\Leftrightarrow x(3x-1) - (x-1)2 = 2x^2+x-1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $x_1=1$ και $x_2=3$. Από αυτές, λόγω του περιορισμού, δεκτή είναι μόνο η $x_2=3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3^ο:

Να λυθεί η εξίσωση:

$$2x^4 - 7x^2 - 4 = 0 \quad (1)$$

ΛΥΣΗ

Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται:

$$2y^2 - 7y - 4 = 0 \quad (2)$$

Η εξίσωση $2y^2 - 7y - 4 = 0$ έχει ρίζες τις $y_1=4$ και $y_2=-\frac{1}{2}$. Επειδή $y=x^2 \geq 0$, δεκτή είναι μόνο η $y_1=4$.

Επομένως, οι ρίζες της (1) είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2=4$, δηλαδή οι $x_1=-2$ και $x_2=2$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η μέθοδος που ακολουθήσαμε στο παραπάνω παράδειγμα εφαρμόζεται και για την επίλυση κάθε εξίσωσης της μορφής:

$$ax^4 + bx^2 + \gamma = 0, \text{ με } a \neq 0$$

Οι εξισώσεις της μορφής αυτής ονομάζονται **διτετράγωνες** εξισώσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**Α' ΟΜΑΔΑΣ**

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ii) $x^2 - 6x + 9 = 0$ iii) $3x^2 + 4x + 2 = 0$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^2 - 1,69 = 0$ ii) $0,5x^2 - x = 0$ iii) $3x^2 + 27 = 0$.

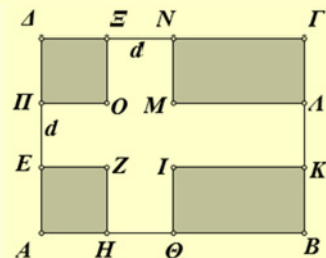
3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες:

i) $\lambda x^2 + 2x - (\lambda - 2) = 0, \lambda \neq 0$ ii) $ax^2 + (a + \beta)x + \beta = 0, a \neq 0$.

4. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $\mu x^2 + 2x + \mu = 0, \mu \neq 0$ έχει διπλή ρίζα.

5. Αν $\alpha \neq \beta$, να δείξετε ότι είναι αδύνατη στο \mathbb{R} η εξίσωση $(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + 2(\alpha + \beta)x + 2 = 0$. Να εξετάσετε την περίπτωση που είναι $\alpha = \beta$.
6. Να βρείτε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς
 i) 2 και 3 ii) 1 και $\frac{1}{2}$ iii) $5 - 2\sqrt{6}$ και $5 + 2\sqrt{6}$.
7. Να βρείτε δυο αριθμούς, εφόσον υπάρχουν, που να έχουν
 i) Άθροισμα 2 και γινόμενο -15 .
 ii) άθροισμα 9 και γινόμενο 10.
8. Να λύσετε τις εξισώσεις
 i) $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{3})x + \sqrt{15} = 0$ ii) $x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$.
9. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + \alpha^2 = \beta^2 - 2\alpha x$, για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
10. Να βρείτε τις πλευρές ενός ορθογώνιου με περίμετρο 68cm και διαγώνιο 26cm.
11. Να λύσετε τις εξισώσεις
 i) $x^2 - 7|x| + 12 = 0$ ii) $x^2 + 2|x| - 35 = 0$ iii) $x^2 - 8|x| + 12 = 0$.
12. Να λύσετε την εξίσωση $(x-1)^2 + 4|x-1| - 5 = 0$.
13. Να λύσετε την εξίσωση $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$.
14. Να λύσετε τις εξισώσεις
 i) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{13}{6}$ ii) $\frac{2}{x} + \frac{2x-3}{x-2} + \frac{2-x^2}{x^2-2x} = 0$.
15. Να λύσετε τις εξισώσεις
 i) $x^4 + 6x^2 - 40 = 0$ ii) $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$ iii) $2x^4 + 7x^2 + 3 = 0$.

B' ΟΜΑΔΑΣ

- Δίνεται η εξίσωση $\alpha^2 x^2 - 2\alpha^3 x + \alpha^4 - 1 = 0$, με $\alpha \neq 0$.
 - Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = 4\alpha^2$.
 - Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}$ και $\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}$.
- Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (5 - \sqrt{2})x + 6 - 3\sqrt{2} = 0$.
 - Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (1 + \sqrt{2})^2$
 - Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι 3 και $2 - \sqrt{2}$.
- Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $2x^2 + (\alpha - 9)x + \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$ έχει διπλή ρίζα.
- Αν ο αριθμός ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι η ρίζα της εξίσωσης $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$.
- Να λύσετε τις εξισώσεις:
 - $x + \frac{1}{a} = a + \frac{1}{x}$, $a \neq 0$
 - $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{a}$, $\alpha, \beta \neq 0$.
- Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x - 8 = 0$
 - Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Αν η μια ρίζα της εξίσωσης ισούται με το τετράγωνο της άλλης, τότε να βρεθούν οι ρίζες και η τιμή του λ .
- Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι που να είναι μήκη πλευρών ορθογώνιου τριγώνου.
- Η σημαία του διπλανού σχήματος έχει διαστάσεις $4m$ και $3m$ αντιστοίχως. Να βρείτε πλάτος d του σταυρού, αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του είναι ίσο με το εμβαδόν του υπόλοιπου μέρους της σημαίας.
 

9. Μια κατασκευαστική εταιρεία διαθέτει δυο μηχανήματα A και B. Το μηχάνημα B χρειάζεται 12 ώρες περισσότερο από ότι το μηχάνημα A για να τελειώσει ένα συγκεκριμένο έργο. Ο χρόνος που απαιτείται για να τελειώσει το έργο, αν χρησιμοποιηθούν και τα δυο μηχανήματα μαζί είναι 8 ώρες. Να βρείτε το χρόνο που θα χρειαζόταν το κάθε μηχάνημα για να τελειώσει το έργο αυτό αν εργαζόταν μόνο του.
10. Είναι γνωστό ότι μια ρίζα της εξίσωσης $x^4 - 10x^2 + a = 0$ είναι ο αριθμός 1. Να βρείτε το a και να λύσετε την εξίσωση.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- I. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα A, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς a , β και γ . Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.
1. Η εξίσωση $(a-1)x = a(a-1)$ έχει μοναδική λύση την $x = a$. A Ψ
 2. Η εξίσωση $(|x|+1)(|x|+2) = 0$ είναι αδύνατη. A Ψ
 3. Η εξίσωση $(|x|-1)(|x|-2) = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες. A Ψ
 4. Η εξίσωση $(|x|-1)(|x|+2) = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες. A Ψ
 5. Η εξίσωση $|x| = x - 2$ έχει μοναδική λύση. A Ψ
 6. Η εξίσωση $|x| = 2 - x$ έχει μοναδική λύση. A Ψ
 7. Αν οι συντελεστές a και γ της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι ετερόσημοι, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες. A Ψ
 8. Αν δύο εξισώσεις 2^{ου} βαθμού έχουν τις ίδιες ρίζες, τότε οι συντελεστές των ίσων δυνάμεων του x των εξισώσεων αυτών είναι ίσοι. A Ψ
 9. Η εξίσωση $ax^2 + 2x - a = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. A Ψ

10. Η εξίσωση $x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$, με $a \neq 0$, έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. A Ψ
11. Η εξίσωση $a^2x^2 - 2ax + 2 = 0$, με $a \neq 0$, δεν έχει πραγματικές ρίζες. A Ψ
12. Η εξίσωση $2x^2 + 3ax + a^2 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. A Ψ
13. Η εξίσωση $x^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)x + 1 = 0$, με $\alpha \neq 0, 1$ έχει δύο άνισες και αντίστροφες πραγματικές ρίζες. A Ψ
14. Οι εξισώσεις $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0$ και $x^2 - 3x + 2 = 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. A Ψ
15. Οι εξισώσεις $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = 5$ και $(2x^2 + 3x + 1) = 5(x^2 - 1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις. A Ψ
16. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα $S = -10$ και γινόμενο $P = 16$. A Ψ
17. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα $S = 10$ και γινόμενο $P = 25$. A Ψ
18. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα $S = 2$ και γινόμενο $P = 2$. A Ψ

II. Να εντοπίσετε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:

1. Η εξίσωση $(2x - 1)(x + 2) = (3 - 2x)(x + 2)$ γράφεται ισοδύναμα:
 $(2x - 1)(x + 2) = (3 - 2x)(x + 2) \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 - 2x \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$.
 Όμως και ο αριθμός $x = -2$ επαληθεύει τη δοθείσα εξίσωση.
2. Η εξίσωση $|2x - 1| = x - 2$ γράφεται ισοδύναμα:
 $|2x - 1| = x - 2 \Leftrightarrow 2x - 1 = x - 2$ ή $2x - 1 = 2 - x \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$.
 Όμως καμία από τις τιμές αυτές του x δεν επαληθεύει τη δοθείσα εξίσωση.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Από τα αρχαία χρόνια οι μαθηματικοί χρησιμοποίησαν διάφορες τεχνικές για να λύσουν μια εξίσωση 2ου βαθμού.

Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποίησαν γεωμετρικές μεθόδους, ίσως λόγω των δυσκολιών που είχαν με τους άρρητους αριθμούς, αλλά και λόγω πρακτικών δυσκολιών που προέκυπταν από τα ελληνικά ψηφία.

Οι Ινδοί και οι Άραβες χρησιμοποίησαν μια μέθοδο όμοια με τη σημερινή διαδικασία «συμπλήρωσης τετραγώνου», περιγράφοντας όμως λεκτικά τον τρόπο εύρεσης των λύσεων. Αυτοί θεωρούσαν ως διαφορετικού τύπου κάθε μία από τις εξισώσεις

$$x^2 + px = q, \quad x^2 - px = q, \quad x^2 - px = -q.$$

Σήμερα όμως γράφουμε τις εξισώσεις αυτές με τη γενική μορφή

$$ax^2 + bx + \gamma = 0$$

Ο σύγχρονος συμβολισμός άρχισε να εμφανίζεται περί το 1500 μ.Χ, και οι δυνατότητες χρησιμοποίησης αρνητικών ριζών και ακόμα μιγαδικών ριζών προτάθηκαν από τους Cardano και Girard. Η γεωμετρική παράσταση των αρνητικών ριζών από τον Descartes και των μιγαδικών αριθμών από τους Wessel, Argand και Gauss έκαμε τους αριθμούς αυτούς περισσότερο αποδεκτούς ως ρίζες μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Όμως η ποικιλία των επιλύσεων που αναπτύχθηκε τα αρχαία χρόνια μας ενέπνευσε να αναπτύξουμε μερικούς τρόπους εξαγωγής του τύπου

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\gamma}}{2a}$$

που δίνει τις ρίζες της γενικής εξίσωσης 2ου βαθμού

$$ax^2 + bx + \gamma = 0, \quad a \neq 0.$$

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τρεις μεθόδους επίλυσης μίας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού.

Μέθοδος των Ινδών

Η επίλυση αυτή που επινοήθηκε στην Ινδία, αποδίδεται στον Sridhara (1025 μ.Χ. περίπου).

Έχουμε διαδοχικά:

$$ax^2 + bx + \gamma = 0$$

$$ax^2 + bx = -\gamma$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με $4a$ και ύστερα προσθέτουμε το β^2 και στα δύο μέλη, για να προκύψει ένα «τέλειο» τετράγωνο στο αριστερό μέλος. Δηλαδή

$$\begin{aligned}
 4a^2x^2 + 4a\beta x &= -4a\gamma \\
 4a^2x^2 + 4a\beta x + \beta^2 &= \beta^2 - 4a\gamma \\
 (2ax + \beta)^2 &= \beta^2 - 4a\gamma \\
 2ax + \beta &= \pm\sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}, \quad \text{εφόσον } \beta^2 - 4a\gamma \geq 0.
 \end{aligned}$$

Έτσι προκύπτει ότι: $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a}$

Σχόλιο: Η απλότητα της μεθόδου των Ινδών χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι το κλάσμα δεν εμφανίζεται. παρά μόνο στο τελευταίο βήμα.

Μέθοδος του Vieta

Η εξίσωση 2^{ου} βαθμού $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$ μπορεί να λυθεί ευκολότερα, αν δεν περιέχει τον πρωτοβάθμιο όρο βx , πράγμα που μπορεί εύκολα να επιτευχθεί με την αντικατάσταση

$$x = y - \frac{\beta}{2a} \quad (1)$$

Τότε η εξίσωση γίνεται: $a\left(y - \frac{\beta}{2a}\right)^2 + \beta\left(y - \frac{\beta}{2a}\right) + \gamma = 0$ η οποία όταν απλοποιηθεί γίνεται:

$$ay^2 + \frac{-\beta + 4a\gamma}{4a} = 0.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι $y = \frac{\pm\sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a}$ εφόσον $\beta^2 - 4a\gamma \geq 0$

Για να βρούμε τις ρίζες της αρχικής εξίσωσης αντικαθιστούμε την παραπάνω τιμή του y στην (1) και έχουμε:

$$x = y - \frac{\beta}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a} - \frac{\beta}{2a}$$

Οπότε

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a}.$$

Σχόλιο: Η μέθοδος αυτή του Vieta είναι ενδιαφέρουσα, γιατί είναι ο προάγγελος της τεχνικής για την επίλυση της γενικής τριτοβάθμιας καθώς και της διτετραγωνής εξίσωσης. Για παράδειγμα, το πρώτο βήμα στην επίλυση της εξίσωσης $ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$, είναι η αντικατάσταση $x = y - \frac{\beta}{3a}$ που απαλλάσσει την εξίσωση από το δευτεροβάθμιο όρο.

Μέθοδος του Harriot

Ο μαθηματικός Thomas **Harriot** (1560-1621) εφάρμοσε τη μέθοδο της παραγοντοποίησης, για να βρει τις λύσεις μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού, στο μεγάλο έργο του για την άλγεβρα «Artis Analytical Praxis». Η τεχνική του είναι η εξής περίπτωση:

Υποθέτουμε ότι x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$ax^2 + bx + \gamma = 0, \quad a \neq 0 \quad (1).$$

Σχηματίζουμε τώρα μία εξίσωση με ρίζες x_1 και x_2 . Αυτή είναι η $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ ή, ισοδύναμα, η

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0 \quad (2)$$

Με διαίρεση των μελών της (1) με $a \neq 0$, βρίσκουμε:

$$x^2 + \frac{\beta}{a}x + \frac{\gamma}{a} = 0 \quad (3)$$

Επειδή οι εξισώσεις (2) και (3) είναι ίδιες, οι αντίστοιχοι συντελεστές πρέπει να είναι ίσοι. Επομένως:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} \quad \text{και} \quad x_1x_2 = \frac{\gamma}{a} \quad (4)$$

Η ταυτότητα $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$ σε συνδυασμό με την (4) δίνει

$$x_1 - x_2 = \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{a}, \quad [\text{εφόσον } \beta^2 - 4a\gamma \geq 0] \quad (5)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (4) και (5) έχουμε:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a}$$

Σχόλιο: Είναι αρκετό να θεωρήσουμε μόνο τη θετική τετραγωνική ρίζα της (5). Η αρνητική ρίζα απλώς εναλλάσσει τη διάταξη των x_1 και x_2 .