6η θεματική ενότητα

Γεωμετρία

Γεωμετρία

Σε αυτή τη θεματική αυτή ενότητα θα ασχοληθούμε με τη Γεωμετρία.

Η Γεωμετρία σε πρωτόγονη και εντελώς πρακτική μορφή φαίνεται πως προέκυψε στην αρχαία εποχή από την ανάγκη των ανθρώπων να οροθετήσουν την περιουσία τους.

Ο Ηρόδοτος, για παράδειγμα, (5ος αιώνας π.Χ.) αναφέρει πως στην αρχαία Αίγυπτο μετά τις ετήσιες πλημμύρες του Νείλου ο βασιλιάς έστελνε τους «μετρητές» οι οποίοι όριζαν ξανά τα σύνορα των χωραφιών των Αιγυπτίων αγροτών που είχαν χαθεί με τις πλημμύρες. Από την ανάγκη αυτή, κατά μια εκδοχή, ξεπήδησαν οι πρώτες πρακτικές γνώσεις της Γεωμετρίας.

Παρόμοιες γνώσεις φαίνεται πως είχαν και άλλοι αρχαίοι πολιτισμοί. Από αρχαίες πινακίδες των Χαλδαίων μαθαίνουμε γνώριζαν να ορίζουν όρια και να τα προσδιορίζουν στις αγοραπωλησίες οικοπέδων.

Όλες όμως αυτές οι γνώσεις φαίνεται πως είχαν πρακτικό χαρακτήρα και ήταν περισσότερο τέχνη παρά επιστήμη.

Η Γεωμετρία αναπτύχθηκε ως επιστήμη στην αρχαία Ελλάδα. Οι πρώτοι Έλληνες σοφοί που ασχολήθηκαν με τα Μαθηματικά ήταν ο Θαλής ο Μιλήσιος (640-546 π.Χ.) και ο Πυθαγόρας ο Σάμιος (580-490 π.Χ.). Ο Θαλής γνώριζε τη σφαιρικότητα της γης, προέβλεπε τις εκλείψεις και χώριζε το έτος σε 365 ημέρες. Ο Πυθαγόρας θεωρούσε σαν τελειότερο γεωμετρικό σχήμα τον κύκλο και τελειότερο στερεό τη σφαίρα.

Αργότερα, άλλοι μεγάλοι Έλληνες μαθηματικοί όπως ο Πυθαγόρας, ο Ευκλείδης και ο Δημόκριτος μελέτησαν τα σχήματα με τις ιδιότητές τους και σταδιακά διαμόρφωσαν την επιστήμη της Γεωμετρίας με τη μορφή που τη γνωρίζουμε σήμερα.

Κεφάλαιο 56ο

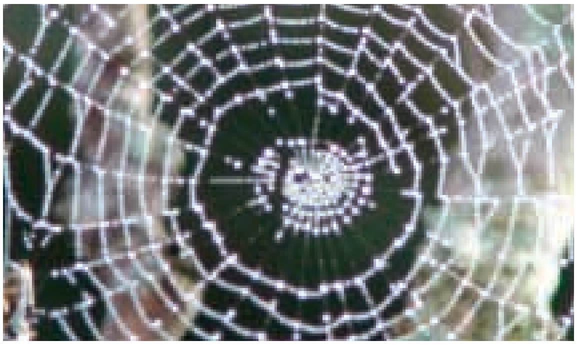
Γεωμετρικά σχήματα - Πολύγωνα

Τα σχήματα του κόσμου!

Αναγνωρίζω γεωμετρικά σχήματα.
Χαράζω γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων.

Δραστηριότητα 1η

Ο κόσμος μας είναι γεμάτος σχήματα. Κάποια από αυτά είναι δημιουργήματα της φύσης και άλλα είναι δικές μας κατασκευές.



- Στην αριστερή εικόνα φαίνεται ένας ιστός. Να «πατήσεις» με χρωματιστό μολύβι τρία από τα σχήματα που διακρίνεις σε αυτόν και να γράψεις τι σχήματα είναι:

  ....

- Διακρίνεις κάποιο παραλληλόγραμμο ή κανονικό σχήμα;..
- Στη δεξιά εικόνα φαίνεται ένα σκίτσο από το «Πεντάγωνο», το κτήριο διοίκησης του Αμερικανικού Υπουργείου Άμυνας, ένα από τα μεγαλύτερα κτήρια στον κόσμο. Γιατί νομίζεις ότι ονομάστηκε έτσι;

  ....

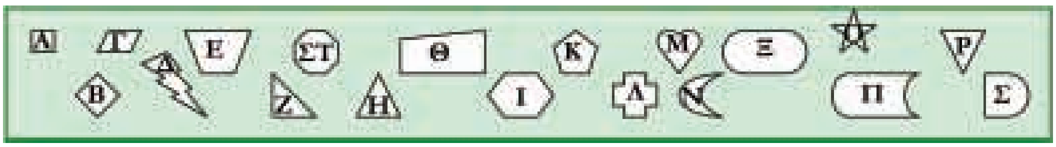
- Η περίμετρός του είναι 1,6 χμ. Μπορείς να βρεις το μήκος κάθε εξωτερικού τοίχου;

  ....

- Τι είναι αυτό που σε βοηθάει να το υπολογίσεις;..

Δραστηριότητα 2η

Ξεχώρισε όσα από τα παρακάτω σχήματα είναι πολύγωνα και ταξινόμησέ τα στον πίνακα που ακολουθεί.



Τρίγωνα	Τετράπλευρα	Πεντάγωνα	Εξάγωνα	Επτάγωνα	Οκτάγωνα	Δεκάγωνα

- Σε τι διαφέρουν τα σχήματα που ονομάζουμε πολύγωνα από τα άλλα;
- Είναι όλα τα πολύγωνα κανονικά; Πώς θα αναγνωρίσεις ένα κανονικό πολύγωνο;
- Να εργαστείς με την ομάδα σου: Σταθείτε όρθιοι κρατώντας ένα κλειστό κομμάτι σχοινί. Προσπαθήστε να φτιάξετε όσα πολύγωνα μπορείτε. Γράψε ποια φτιάξατε:

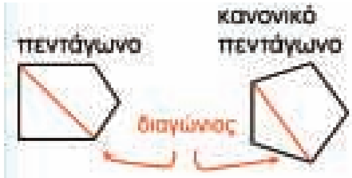
  ....

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι στο περιβάλλον μας μπορούμε να διακρίνουμε διάφορα σχήματα και να τα ταξινομήσουμε σύμφωνα με τις ιδιότητές τους.

Γεωμετρικά σχήματα

Τα κλειστά σχήματα που έχουν τουλάχιστον 3 πλευρές και 3 γωνίες λέγονται πολύγωνα. Τα πολύγωνα που έχουν όλες τις πλευρές και τις γωνίες τους ίσες μεταξύ τους λέγονται **κανονικά πολύγωνα.** Στα πολύγωνα το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο κορυφές, όταν δεν είναι πλευρά, λέγεται **διαγώνιος.**

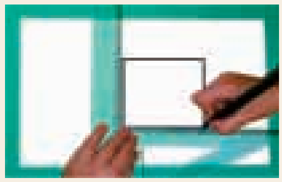
Παραδείγματα

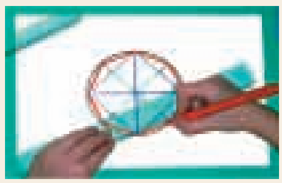


Τα ονόματα των πολυγώνων, εκτός από το τετράπλευρο, σχηματίζονται από τον αριθμό των γωνιών που έχουν και την κατάληξη **-γωνο**.

Εφαρμογή ***Σχεδιάζω πολύγωνα***

Σχεδίασε με όργανα (κανόνα, γνώμονα, διαβήτη) διάφορα πολύγωνα σε χρωματιστά χαρτιά, κόψε και κόλλησε τα, ώστε να δημιουργήσεις ένα σχέδιο.





Λύση - Απάντηση:
Για να σχεδιάσω ένα τετράγωνο σχεδιάζω δύο παράλληλες γραμμές και μετά τραβώ ανάμεσα μια κάθετη σε αυτές. Προσέχω όλες οι πλευρές να είναι ίσες. Με παρόμοιο τρόπο, αλλά με τις απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες ανά δύο, σχεδιάζω ένα ορθογώνιο ή πλάγιο παραλληλόγραμμο.
Για να σχεδιάσω κανονικό εξάγωνο σχεδιάζω πρώτα έναν κύκλο στον οποίο σημειώνω τμήματα ίσα με την ακτίνα του. Μετά ενώνω το κάθε σημείο με το διπλανό του.
Για ένα οκτάγωνο, τραβώ δύο κάθετες διαγώνιες στον κύκλο, ενώνω τις άκρες τους και έτσι έχω ένα τετράγωνο. Συνεχίζω βρίσκοντας τη μέση των πλευρών του και τραβώ άλλες δύο κάθετες διαγώνιους που να περνούν από τα σημεία αυτά. Ενώνω όλα τα σημεία και έτσι έχω ένα κανονικό οκτάγωνο.

Μπορείς να κάνεις αυτά ή άλλα σχήματα και με άλλους τρόπους!

Σημείωση: *Προσπάθησε να κάνεις ένα παρόμοιο σχέδιο στον υπολογιστή.*

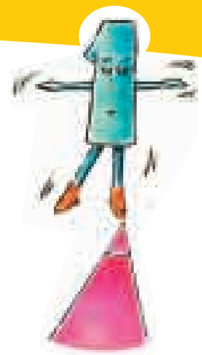
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **πολύγωνο, κανονικό πολύγωνο** και **διαγώνιος**. Να αναφέρεις σχήματα που συναντάς στο περιβάλλον.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Σε ένα εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ μπορώ να τραβήξω από μια κορυφή 6 διαγώνιες.	❒	❒
Σε ένα τρίγωνο δεν μπορώ να τραβήξω καμία διαγώνιο.	❒	❒
Για να σχεδιάσω ένα πολύγωνο με όργανα, πρέπει να ξέρω τις ιδιότητές του.	❒	❒

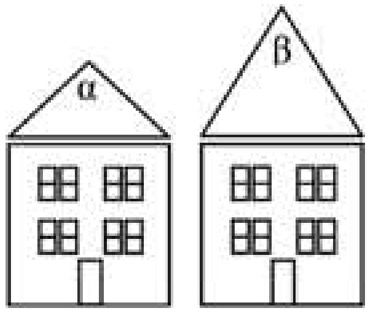
Κεφάλαιο 57ο **Γωνίες**



Μεγάλη α...γωνία στη γωνία!

Συγκρίνω γωνίες.
Μετρώ γωνίες.

Δραστηριότητα 1η



Τα διπλανά σχέδια είναι για δύο ίδια σπίτια που θα χτιστούν σε διαφορετικές περιοχές. Η μόνη τους διαφορά είναι στις στέγες μια και διέφερε το μέγιστο ύψος δόμησης που επιτρεπόταν στις δύο περιοχές.

- Ποια από τις δύο γωνίες (α, β) νομίζεις ότι είναι μεγαλύτερη; ......
- Αποτύπωσε τις γωνίες α και β σε διαφανή χαρτιά και βάλε τη μία πάνω στην άλλη για να τις συγκρίνεις. Ποιο τμήμα των γωνιών πρέπει να συμπέσει για να κάνεις τη σύγκριση;

  ....
- Ποια είναι η μεγαλύτερη; ....
- Με ποιους άλλους τρόπους μπορούμε να τις συγκρίνουμε;..

  ....
- Το μέγεθος των γωνιών, δηλαδή το «άνοιγμά» τους, εξαρτάται από το μήκος των πλευρών τους;

  ....

Δραστηριότητα 2η

Οι ζωγράφοι και οι γλύπτες είναι καλλιτέχνες που χρειάζεται να υπολογίζουν τις γωνίες με ακρίβεια για να κατασκευάσουν αγάλματα ή ζωγραφικά αντίγραφα.

Ένας καλλιτέχνης ζωγραφίζει τον πύργο της Πίζας στην Ιταλία.

- Είναι η γωνία που σχηματίζει ο Πύργος με το έδαφος ορθή, οξεία ή αμβλεία;

  ....
- Με τι μπορείς να συγκρίνεις τη γωνία αυτή, ώστε να κάνεις τη διαπίστωσή σου;

  ....
- Αρκεί αυτή η διαπίστωση στο ζωγράφο ώστε να φτιάξει ένα πιστό ζωγραφικό αντίγραφο του Πύργου;

  ....
- Τι πιστεύεις ότι πρέπει να κάνει;...

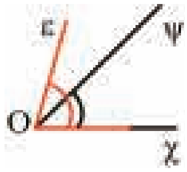
  ....

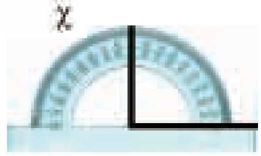
Οι παραπάνω δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε ότι το μέγεθος μιας γωνίας εξαρτάται από το άνοιγμα των πλευρών της και όχι από το μήκος τους.

Σύγκριση και μέτρηση γωνιών

Μπορούμε να συγκρίνουμε δύο γωνίες μεταξύ τους αν τοποθετήσουμε τη μία πάνω στην άλλη, με την κορυφή και τη μία πλευρά τους να συμπίπτουν.
Για να μετρήσουμε μία γωνία αρκεί να βάλουμε επάνω της το **μοιρογνωμόνιο.** Μονάδα μέτρησης των γωνιών είναι η **μοίρα** (1^o): $1^o = 60'$ (πρώτα λεπτά), $1' = 60''$ (δεύτερα λεπτά).
Μία γωνία μπορεί να είναι οξεία (μικρότερη από 90^o), ορθή (ίση με 90^o) ή αμβλεία (μεγαλύτερη από 90^o).

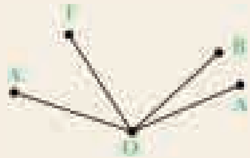
Παραδείγματα



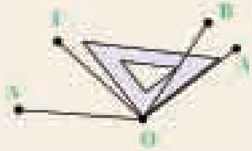


Εφαρμογή 1η Συγκρίνω γωνίες

Στο διπλανό σχήμα να συγκρίνεις τις γωνίες $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$ μεταξύ τους και με την ορθή γωνία. Να γράψεις τι είδους γωνία είναι η καθεμία και να τις βάλεις με φθίνουσα σειρά.
Να εξηγήσεις τον τρόπο που εργάστηκες.



Λύση - Απάντηση:
Για να συγκρίνω τις γωνίες $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$ μεταξύ τους δεν χρειάζεται να τις αποτυπώσω σε διαφανές χαρτί, καθώς με τον τρόπο που είναι σχεδιασμένες συμπίπτει η κορυφή (Ο) και η μία πλευρά τους (ΑΟ). Είναι φανερό ότι είναι $A\hat{O}\Delta > A\hat{O}\Gamma > A\hat{O}B$.
Για να τις συγκρίνω με την ορθή γωνία αρκεί να βάλω το γνώμονα να συμπέσει στην κορυφή και στην κοινή πλευρά τους. Έτσι διαπιστώνω ότι : η $A\hat{O}B$ είναι οξεία, ενώ οι $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$ είναι αμβλείες.

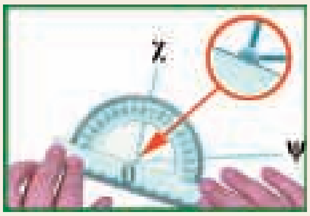


Εφαρμογή 2η Μετρώ γωνίες

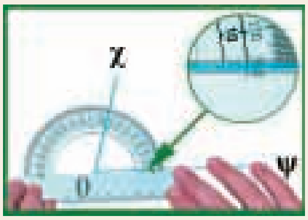
Χρησιμοποιώντας το μοιρογνωμόνιο να βρεις πόσες μοίρες ακριβώς είναι η γωνία $\chi\hat{O}\psi$.

Λύση

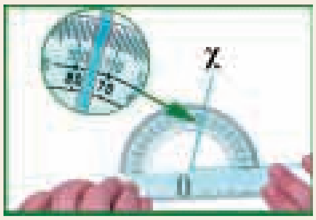
1ο βήμα: Βάζω σημάδι που έχει το μοιρογνωμόνιο στο κέντρο του, πάνω στην κορυφή της γωνίας.



2ο βήμα: Βάζω την ένδειξη 0^o στη μια πλευρά της γωνίας. (Μπορεί να χρειαστεί να προεκτείνω τις πλευρές)



3ο βήμα: Διαβάζω την ένδειξη στην άλλη πλευρά της γωνίας. Προσοχή: Διαβάζω την κλίμακα στην οποία ανήκει το 0^o που χρησιμοποίησα.



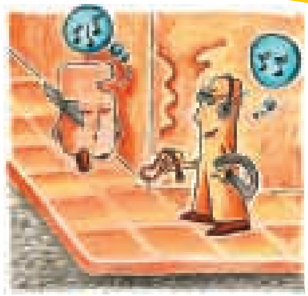
Απάντηση: Η γωνία $\chi\hat{O}\psi$ είναι 75^o.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **οξεία γωνία, ορθή γωνία, αμβλεία γωνία** και **μοιρογνωμόνιο**. Να αναφέρεις παραδείγματα γωνιών από το περιβάλλον σου.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
➻ *Το άνοιγμα των πλευρών μιας γωνίας 100º είναι μεγαλύτερο από το άνοιγμα των κάθετων πλευρών του γνώμονα.*	❐	❐
➻ *Το μοιρογνωμόνιο είναι ένα όργανο που μετρά το μήκος των πλευρών της γωνίας.*	❐	❐

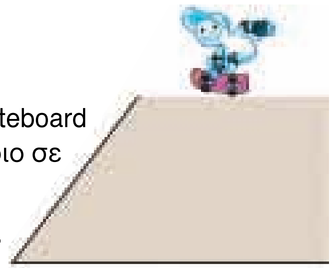
Κεφάλαιο 58ο Σχεδιάζω γωνίες



Συνάντηση κορυφής!

Σχεδιάζω γωνίες με τη βοήθεια του μοιρογνωμόνιου.
Προσθέτω ή αφαιρώ γωνίες.
Βρίσκω το άθροισμα των γωνιών τριγώνου και τετραπλεύρου.

Δραστηριότητα 1η

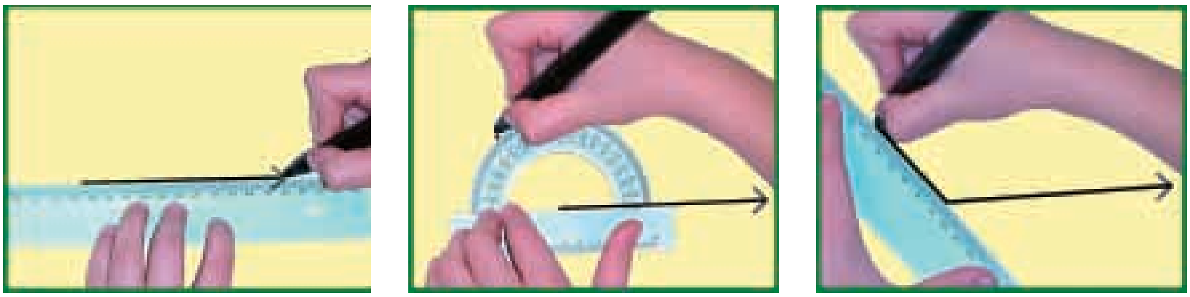


Ο Λευτέρης προσπαθεί να αποφασίσει αν είναι ασφαλές να κατεβεί με το skateboard αυτό το επικλινές επίπεδο. Γνωρίζει ότι είναι επικίνδυνο να κάνει κάτι τέτοιο σε κλίση μεγαλύτερη από 20°.

- Εσύ θα κατέβαινες από αυτό το επίπεδο; .... Γιατί; ....
- Μπορείς να υπολογίσεις το μέγεθος της γωνίας; ....

Το δημοτικό συμβούλιο αποφάσισε να κατασκευάσει ένα επικλινές επίπεδο με κλίση 20° για να παίζουν τα παιδιά με το skateboard με ασφάλεια.

- Πώς μπορείς να κατασκευάσεις μία γωνία που να δείχνει πώς θα είναι το επίπεδο αυτό; ....
- Με τη βοήθεια των παρακάτω εικόνων και όσα γνωρίζεις για τον τρόπο που χρησιμοποιείται το μοιρογνωμόνιο για τη μέτρηση των γωνιών γράψε τη διαδικασία της κατασκευής μιας γωνίας 130°.

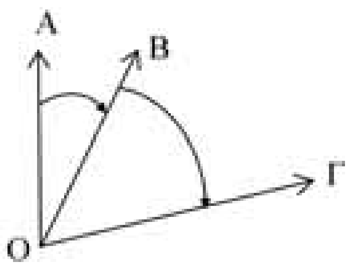


....

....

....

Δραστηριότητα 2η



Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο γωνίες, η $A\hat{O}B$ και η $B\hat{O}\Gamma$, που είναι δύο διαδοχικές στροφές στην πορεία ενός καραβιού.

- Εξήγησε με ποιον τρόπο ή με ποιους τρόπους μπορούμε να βρούμε το άθροισμά τους, για να βρούμε πόσες μοίρες συνολικά ήταν η στροφή από την αρχική πορεία:

....

- Μπορείς να σκεφτείς έναν τρόπο για να βρούμε τη διαφορά των δύο γωνιών;

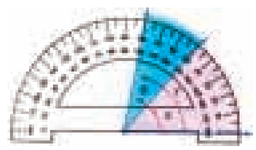
....

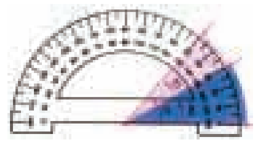
Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να σχεδιάσουμε γωνίες στο μέγεθος που θέλουμε και ακόμα ότι μπορούμε να βρίσκουμε το άθροισμα ή τη διαφορά γωνιών.

Κατασκευή γωνιών, άθροισμα και διαφορά γωνιών

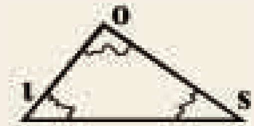
Μπορούμε να σχεδιάσουμε γωνίες στο μέγεθος που θέλουμε χρησιμοποιώντας το μοιρογνωμόνιο και το χάρακα.
Βρίσκουμε το άθροισμα δύο ή περισσότερων γωνιών αν αθροίσουμε τα μεγέθη τους ή αν τις τοποθετήσουμε τη μία δίπλα στην άλλη και μετρήσουμε το συνολικό μέγεθος.
Βρίσκουμε τη διαφορά δύο γωνιών αν αφαιρέσουμε το μέγεθος της μιας από το μέγεθος της άλλης ή αν τις τοποθετήσουμε τη μία πάνω στην άλλη και μετρήσουμε τη διαφορά τους.

Παραδείγματα





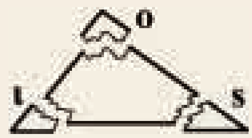
Εφαρμογή 1η ***Άθροισμα γωνιών τριγώνου***



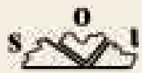
Να σχεδιάσεις ένα τρίγωνο και να υπολογίσεις το άθροισμα των γωνιών του. Να εξηγήσεις τον τρόπο που εργάστηκες.

Λύση:

Σχεδιάζουμε ένα τυχαίο τρίγωνο.
Όπως μάθαμε, υπάρχουν δύο τρόποι για να μετρήσουμε τις γωνίες του. Ο ένας είναι να μετρήσουμε κάθε γωνία και να αθροίσουμε τα μεγέθη τους. Έτσι έχουμε:
$\hat{o} = 65^o$, $\hat{\imath} = 60^o$, $\hat{s} = 55^o$. Άρα $65^o + 60^o + 55^o = 180^o$.



Ο άλλος τρόπος είναι να κόψουμε τις γωνίες του και να τις τοποθετήσουμε τη μία δίπλα στην άλλη, όπως φαίνεται στην εικόνα.
Τότε παρατηρούμε ότι όλες μαζί έχουν άθροισμα 180^o.

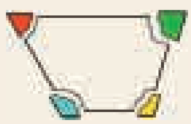


Αν σχεδιάσουμε κι άλλα τρίγωνα και αθροίσουμε τις γωνίες τους, διαπιστώνουμε ότι όλα τα τρίγωνα έχουν άθροισμα γωνιών 180^o.
Απάντηση: Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 180^o.

Εφαρμογή 2η ***Άθροισμα γωνιών τετραπλεύρου***

Να κατασκευάσεις ένα τετράπλευρο και να υπολογίσεις το άθροισμα των γωνιών του. Να εξηγήσεις τον τρόπο που εργάστηκες.

Λύση:



Σχεδιάζουμε ένα τυχαίο τετράπλευρο.
Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο όπως στο τρίγωνο. Μπορούμε και σ' αυτό το σχήμα να αθροίσουμε τις γωνίες του με δύο τρόπους. Διαπιστώνουμε ότι το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου είναι ίσο με 360^o.

Αν σχεδιάσουμε κι άλλα τετράπλευρα και αθροίσουμε τις γωνίες τους, διαπιστώνουμε ότι όλα τα τετράπλευρα έχουν άθροισμα γωνιών 360^o.
Απάντηση: Το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου είναι 360^o.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε να **σχεδιάζουμε γωνίες** με μοιρογνωμόνιο και να βρίσκουμε το **άθροισμα** και τη **διαφορά** γωνιών. Να αναφέρεις δικά σου παραδείγματα.

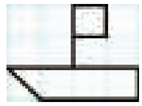
Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο με άθροισμα γωνιών 160^o.	❐	❐
Το άθροισμα των γωνιών οποιουδήποτε τετραπλεύρου είναι 360^o.	❐	❐
Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία γωνία είναι αμβλεία.	❐	❐

Κεφάλαιο 59ο Μεγεθύνω – μικραίνω σχήματα

Έχω μεγάλα σχέδια!

Μεταφέρω σχήματα σε μιλιμετρέ χαρτί.
Μεγαλώνω και μικραίνω σχήματα.
Σχεδιάζω με κλίμακα.

Δραστηριότητα 1η



- Να σχεδιάσεις στην αριστερή μεριά του μιλιμετρέ χαρτιού το διπλανό καραβάκι, του οποίου η βάση είναι ένα τετράπλευρο και πάνω του έχει ένα τετράγωνο για σημαία.
- Να σχεδιάσεις στη δεξιά μεριά ένα καραβάκι με διπλάσιες ή τριπλάσιες διαστάσεις.

- Εξήγησε τον τρόπο που εργάστηκες για να διπλασιάσεις ή να τριπλασιάσεις το σχήμα: ....

  ....

- Οι γωνίες του δεύτερου σχήματος τι σχέση έχουν με τις γωνίες του πρώτου σχήματος;

  ....

Δραστηριότητα 2η

Δίπλα φαίνεται το σχέδιο μιας πισίνας κολυμβητηρίου. Ο αρχιτέκτονας που έφτιαξε το σχέδιο γνώριζε ότι οι πραγματικές διαστάσεις της πισίνας θα είναι οι εξής: μήκος 50 μ. και πλάτος 30 μ.

- Εξήγησε με ποιον τρόπο εργάστηκε ο αρχιτέκτονας για να μικρύνει τις πραγματικές διαστάσεις ώστε να φτιάξει το σχέδιό του :

  ....

- Όπως είναι το σχέδιο, μπορεί ο κατασκευαστής να βρει ποιες είναι οι πραγματικές διαστάσεις για να κατασκευάσει την πισίνα; ....

- Τι πρέπει να γράψει ο αρχιτέκτονας επάνω στο σχέδιο, ώστε να μπορεί ο καθένας να υπολογίσει τις πραγματικές διαστάσεις της πισίνας; ....

  ....

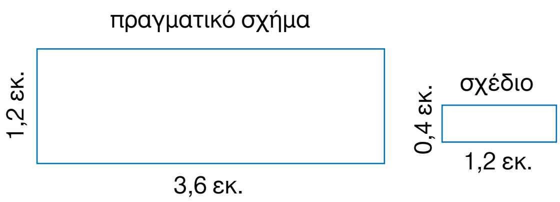
Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι, όταν μεταφέρουμε ένα σχήμα στο χαρτί, μπορούμε να διατηρήσουμε τις πραγματικές του διαστάσεις, μπορούμε όμως να το σχεδιάσουμε είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο απ' ότι είναι πραγματικά.

Μεγαλώνω ή μικραίνω σχήματα - Κλίμακα

Για να μεγεθύνουμε ή να μικρύνουμε ένα σχήμα πρέπει να κρατήσουμε την αναλογία, σύμφωνα με τη σχέση που θέλουμε να έχει το σχέδιό μας με το πραγματικό σχήμα.

Κλίμακα ονομάζουμε το λόγο, δηλαδή τη σχέση, της απόστασης δύο σημείων του σχεδίου προς την πραγματική απόσταση. Γράφουμε πάντα την κλίμακα πάνω στο σχέδιο, με μορφή διαίρεσης ή κλάσματος

Παραδείγματα



Κλίμακα 1:3

Εφαρμογή 1η

Στη χώρα των «Λιλιπούτειων» τα πάντα έχουν διαστάσεις 4 φορές μικρότερες σε σχέση με αυτά της δικής μας χώρας. Χρησιμοποιείστε το γραμματόσημο που φαίνεται στην εικόνα, για να σχεδιάσετε ένα αντίστοιχο γραμματόσημο της χώρας των «Λιλιπούτειων».

Λύση:

Οι διαστάσεις του γραμματόσημου είναι μήκος 3,6 εκ. και πλάτος 3,2 εκ. Για να βρω τις διαστάσεις του «λιλιπούτειου» γραμματόσημου, μπορώ να διαιρέσω με το 4 ή να σχηματίσω την αναλογία.

Διαιρώντας με το 4, βρίσκω ότι το μήκος θα γίνει 3,6 : 4 = 0,9 εκ. ενώ το πλάτος θα γίνει 3,2 : 4 = 0,8 εκ.

Αν θέλεις μπορείς να δοκιμάσεις εφαρμόζοντας και την αναλογία $= \frac{\text{λιλιπούτειο μέγεθος}}{\text{ανθρώπινο μέγεθος}} = \frac{1}{4}$.

Απάντηση: Το «λιλιπούτειο» γραμματόσημο θα έχει μήκος 0,9 εκ. και πλάτος 0,8 εκ.

Εφαρμογή 2η

Χρησιμοποιείστε την κλίμακα του σχεδίου, για να υπολογίσετε τις πραγματικές διαστάσεις του υπνοδωματίου.

Λύση:

Μετράμε τις διαστάσεις στο σχέδιο: πλάτος 3 εκ. και μήκος 2 εκ.

Σύμφωνα με την κλίμακα, 1 εκατοστό στο σχέδιο αντιπροσωπεύει 100 εκατοστά στην πραγματικότητα. Άρα το πλάτος είναι 3 • 100 = 300 εκατοστά ενώ το μήκος είναι 2 • 100 = 200 εκατοστά.

Απάντηση: Οι πραγματικές διαστάσεις του υπνοδωματίου είναι: πλάτος 3 μέτρα και μήκος 2 μέτρα.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε να **μεγαλώνουμε** και να **μικραίνουμε σχήματα** και να σχεδιάζουμε με **κλίμακα**. Να αναφέρεις παραδείγματα σχεδίων με κλίμακα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Για να σχεδιάσω κάτι με κλίμακα 1:1000, διαιρώ το πραγματικό μήκος δια 1.000.	❒	❒
Όταν ένα σχέδιο έχει τριπλάσιες διαστάσεις από τις πραγματικές, για να υπολογίσω τις πραγματικές πολλαπλασιάζω με το 3.	❒	❒

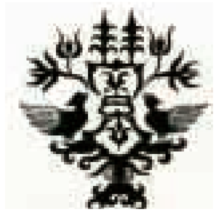
Κεφάλαιο 6ο **Αξονική συμμετρία**

Αντανακλάσεις

Αναγνωρίζω σχήματα με άξονα συμμετρίας.
Βρίσκω τους άξονες συμμετρίας των σχημάτων.
Σχεδιάζω σχήματα που είναι συμμετρικά ως προς άξονα.

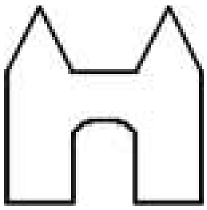
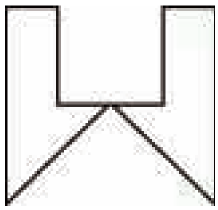
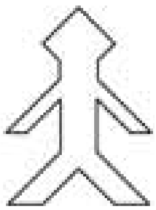
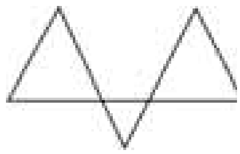
Δραστηριότητα 1η

Οι εικόνες που βλέπεις έχουν όλες ένα κοινό χαρακτηριστικό.

- Πώς ονομάζονται τα αντικείμενα ή τα σχέδια που έχουν αυτό το χαρακτηριστικό; ....

  ....
- Αντίγραψε τα παρακάτω σχέδια σε μιλιμετρέ χαρτί και δίπλωσέ τα ώστε το ένα μέρος να τοποθετηθεί πάνω στο άλλο.

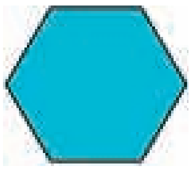
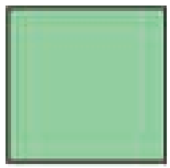
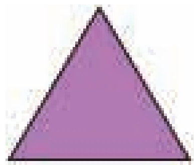
   

Τι παρατηρείς; ....

....

Δραστηριότητα 2η

- Αντίγραψε τα παρακάτω σχήματα σε διαφανές χαρτί και κόψε το περίγραμμά τους.

- Προσπάθησε να τα διπλώσεις στη μέση, έτσι που τα δύο μέρη τους να συμπίπτουν.
- Υπάρχει μόνο ένας τρόπος να τα διπλώσεις; ....
- Σχεδίασε στα παραπάνω σχήματα όλα τα ευθύγραμμα τμήματα (χρησιμοποιώντας διαφορετικό χρώμα για καθένα) που ορίζουν οι διπλώσεις που έκανες.

  Τι παρατηρείς; ....

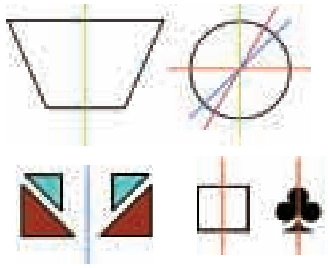
  ....
- *Σκέψου σε πόσες ευθείες θα μπορούσες να διπλώσεις έναν κύκλο* ....
- *Θα μπορούσες να διπλώσεις με τον ίδιο τρόπο ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο;* ....

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι γύρω μας, τόσο στη φύση όσο και στις ανθρώπινες κατασκευές, υπάρχουν σχήματα ή αντικείμενα που «αποτελούνται» από δύο όμοια τμήματα.

Αξονική συμμετρία

Όταν ένα σχήμα μπορεί να χωριστεί με μια ευθεία γραμμή σε δύο τμήματα, έτσι ώστε το ένα τμήμα να είναι η αντανάκλαση του άλλου, τότε το σχήμα αυτό είναι **συμμετρικό ως προς άξονα συμμετρίας.**
Η ευθεία γραμμή που χωρίζει το σχήμα αυτό στα δύο ονομάζεται **άξονας συμμετρίας.**
Ένα σχήμα μπορεί να έχει πολλούς άξονες συμμετρίας.
Κάποια συμμετρικά σχήματα έχουν άξονα συμμετρίας που τα τέμνει, ενώ άλλα είναι συμμετρικά ως προς άξονα συμμετρίας που βρίσκεται έξω από αυτά.

Παραδείγματα

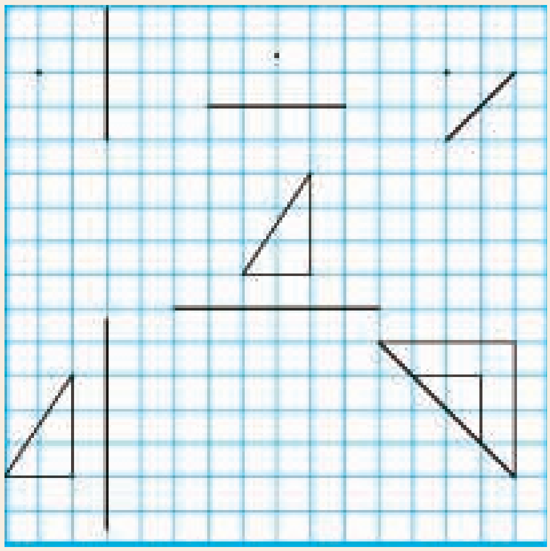


Εφαρμογή 1η Βρίσκω τον άξονα συμμετρίας

Στα παρακάτω σχήματα να χαράξεις με χρωματιστή γραμμή τον άξονα συμμετρίας.

Εφαρμογή 2η Σχεδιάζω συμμετρικά σχήματα

Στο παρακάτω μιλιμετρέ χαρτί να σχεδιάσεις τα συμμετρικά των σχημάτων ως προς τον άξονα συμμετρίας.



Λύση - Απάντηση: Αυτό που πρέπει να προσέξουμε στα συμμετρικά σχήματα είναι αν όλα τα σημεία του ενός μέρους είναι συμμετρικά με τα αντίστοιχα σημεία του άλλο (δηλαδή αν τραβώντας μια κάθετη γραμμή προς τον άξονα συμμετρίας απέχουν το ίδιο).

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **άξονας συμμετρίας** και **συμμετρικά σχήματα ως προς άξονα**. Να αναφέρεις παραδείγματα αντικειμένων ή σχημάτων συμμετρικών ως προς άξονα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Μόνο τα γεωμετρικά σχήματα έχουν άξονα συμμετρίας.	❐	❐
Ο άξονας συμμετρίας πάντα τέμνει ένα σχήμα.	❐	❐
Τα δύο μέρη ενός συμμετρικού σχήματος είναι μεταξύ τους ίσα.	❐	❐

Κεφάλαιο 61ο Μετρώ επιφάνειες

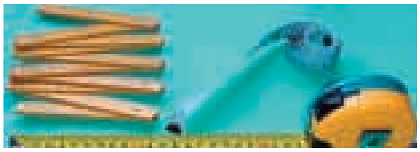
Καλύπτω, βάφω, σκεπάζω

Κατανοώ τη μέτρηση της επιφάνειας, υπολογίζω το εμβαδό ορθογώνιου.
Γράφω και διαβάζω μετρήσεις επιφανειών με δεκαδικούς, συμμιγείς και κλασματικούς αριθμούς.
Λύνω προβλήματα σχετικά με μετρήσεις επιφανειών.

Δραστηριότητα 1η

Γνωρίζεις ότι η μονάδα μέτρησης της επιφάνειας είναι ένα τετράγωνο του οποίου κάθε πλευρά είναι ένα μέτρο και ονομάζεται τετραγωνικό μέτρο.
Υποδιαιρέσεις του είναι το τετραγωνικό χιλιοστό, το τετραγωνικό εκατοστό και το τετραγωνικό δεκατόμετρο.

- Σχεδίασε σε χαρτόνι ένα τετραγωνικό εκατοστό (δηλαδή ένα τετράγωνο του οποίου κάθε πλευρά είναι ίση με ένα εκατοστό) και κόψε το περίγραμμά του.
- Σχεδίασε τώρα ένα τετραγωνικό δεκατόμετρο και κόψε κι αυτό.



  Για να μετρήσουμε το μήκος χρησιμοποιούμε ένα εργαλείο (π.χ. ένα μέτρο, μια μετροταινία ή μια μεζούρα).
- Για να μετρήσεις το μήκος του θρανίου σου τι χρησιμοποιείς;

  ....

- Είναι εύκολο να μετρήσεις την επιφάνειά του χρησιμοποιώντας το τετραγωνικό εκατοστό ή το τετραγωνικό δεκατόμετρο που έχεις;

  ....

- Υπάρχει άλλος τρόπος για να υπολογίσεις την επιφάνεια του θρανίου σου;

  Εξήγησε: ....

  ....

Δραστηριότητα 2η

- Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα. Για κάθε αντικείμενο διάλεξε την κατάλληλη υποδιαίρεση του τετραγωνικού μέτρου. Πρώτα κάνε μια εκτίμηση κάθε επιφάνειας με το νου και μετά υπολόγισε την ακριβώς μετρώντας τις διαστάσεις.

Αντικείμενο	Μονάδα μέτρησης (τ.εκ., τ.δεκ., τ.μ.)	Εκτίμηση με το νου	Υπολογισμός με μέτρηση
Η σελίδα του βιβλίου			
Η επιφάνεια του θρανίου			
Ο πίνακας της τάξης			
Το πάτωμα της τάξης			

- Αν θέλεις να συγκρίνεις τους αριθμούς που εκφράζουν εμβαδό ή να κάνεις πράξεις ανάμεσά τους τι θα πρέπει να προσέξεις;...

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι, για να μετρήσουμε την επιφάνεια ενός ορθογώνιου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα εργαλείο μέτρησης. Ωστόσο είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε το εμβαδό πολλαπλασιάζοντας το μήκος επί το πλάτος του.

Μέτρηση επιφάνειας - εμβαδό

Εμβαδό μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ο αριθμός που εκφράζει το αποτέλεσμα της μέτρησής της.
Μονάδα μέτρησης επιφανειών είναι το **τετραγωνικό μέτρο** (τ.μ.).
Υποδιαιρέσεις του τ.μ. είναι: το τετραγωνικό δεκατόμετρο (τ.δεκ.), το τετραγωνικό εκατοστόμετρο (τ.εκ.) και το τετραγωνικό χιλιοστόμετρο (τ.χιλ.) (1 τ.μ. = 100 τ.δεκ. = 10.000 τ.εκ. = 1.000.000 τ.χιλ.). Πολλαπλάσιο του τ.μ. είναι το τετραγωνικό χιλιόμετρο (τ.χμ.) (1 τ.χμ. = 1.000.000 τ.μ.)

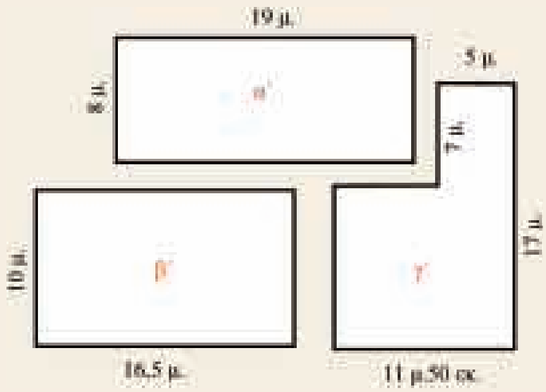
Παραδείγματα

Για να εκφράσουμε το εμβαδό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε συμμιγή, δεκαδικό, φυσικό, μεικτό ή κλασματικό αριθμό. Για να κάνουμε όμως πράξεις ανάμεσα στις μετρήσεις πρέπει αυτές να εκφράζονται με την ίδια μορφή αριθμού και στην ίδια υποδιαίρεση.

14 τ.μ. 5.000 τ.εκ.
14,5 τ.μ.
145.000 τ.εκ.
$14\ ^{5000}/_{10000}$ ή $14\ ^{5}/_{10}$ τ.μ.

Εφαρμογή

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τρία γειτονικά οικόπεδα που πουλιούνται. Να βρείτε ποιο είναι το μεγαλύτερο και πόσο θα πουληθεί, αν το τετραγωνικό μέτρο στοιχίζει 250 €.



Λύση:
Για να βρούμε ποιο είναι το πιο μεγάλο από τα τρία οικόπεδα, πρέπει να βρούμε την επιφάνεια που καλύπτει το καθένα απ' αυτά.

α΄ οικόπεδο: 19 • 8 = ... τ.μ.

β΄ οικόπεδο: 10 • 16,5 = ... τ.μ.

Για το γ΄ οικόπεδο μπορούμε να τραβήξουμε μια νοητή γραμμή που θα το χωρίζει σε δύο ορθογώνια, να υπολογίσουμε την επιφάνεια του καθενός και να προσθέσουμε τα δύο. Επομένως θα έχουμε

5 • .... = ... τ.μ. και .... • (17 - 7) = ... • 10 = ... τ.μ.

Άρα γ΄ οικόπεδο: .... + ... = ... τ.μ.
Απάντηση: Το πιο μεγάλο είναι το .....΄ οικόπεδο.
Θα στοιχίσει .... • 250 = ... €
Να συμπληρώσεις τώρα τον πίνακα :

	περίμετρος	εμβαδό
α΄ οικόπεδο		
β΄ οικόπεδο		
γ΄ οικόπεδο		

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **μέτρηση επιφάνειας, εμβαδό** και **τετραγωνικό μέτρο** με τις υποδιαιρέσεις και το πολλαπλάσιό του. Να εκφράσεις μια μέτρηση επιφάνειας με διαφορετικής μορφής αριθμούς.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Το εμβαδό ενός ορθογωνίου εξαρτάται από την περίμετρό του.	❒	❒
Το εμβαδό ενός ορθογωνίου εξαρτάται από το μήκος και το πλάτος του.	❒	❒
20 τ.μ. = 2.000 τ.δεκ. = 200.000 τ.εκ.	❒	❒

Κεφάλαιο 62ο

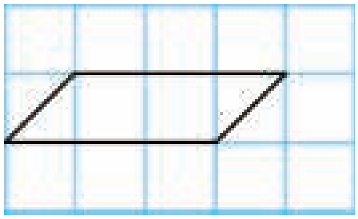
Βρίσκω το εμβαδό παραλληλογράμμου

Πλαγιάζω, αλλά δεν αλλάζω!

Διαπιστώνω ότι διαφορετικά σχήματα μπορεί να έχουν το ίδιο εμβαδό.
Υπολογίζω εμβαδό οποιουδήποτε παραλληλογράμμου με τη βοήθεια τύπου.
Λύνω προβλήματα υπολογισμού εμβαδού παραλληλογράμμου.

Δραστηριότητα 1η

Η Ιφιγένεια σχεδίασε αυτό το παραλληλόγραμμο σε μιλιμετρέ χαρτί. Κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά 1 εκατοστόμετρο. Η ίδια λέει ότι το παραλληλόγραμμο έχει εμβαδό 3 τ.εκ.

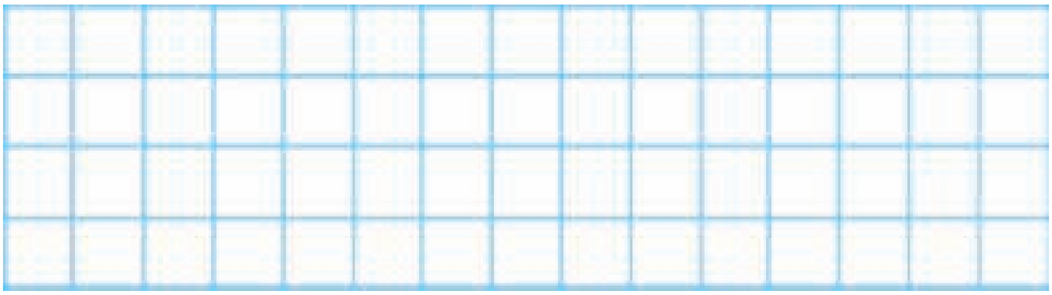


- Έχει δίκιο; ....
- Εξήγησε γιατί:..

  ....

Δραστηριότητα 2η

- Σχεδίασε παρακάτω ένα παραλληλόγραμμο που να μην είναι ορθογώνιο. Χρησιμοποίησε διαφορετικό χρώμα για κάθε ζευγάρι παράλληλων πλευρών.



- Μέσα στο παραλληλόγραμμο σχεδίασε μία γραμμή κάθετη στο ένα ζευγάρι από παράλληλες πλευρές. Οι δύο αυτές παράλληλες γραμμές τώρα ονομάζονται βάσεις του παραλληλογράμμου αυτού.
- Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα πώς ονομάζεται;..
- Μετάφερε το σχήμα σου σε ένα άλλο μιλιμετρέ χαρτί και κόψε το περίγραμμά του.
- Μετά κόψε το παραλληλόγραμμο σε δύο κομμάτια κατά μήκος της κάθετης γραμμής που σχεδίασες.
- Σχημάτισε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με τα δύο αυτά κομμάτια και σημείωσε το μήκος, το πλάτος και το εμβαδό του.
- Τι σχέση έχουν το μήκος και το πλάτος του ορθογώνιου που σχηματίστηκε με τη βάση και το ύψος του αρχικού παραλληλογράμμου;
- ....
- Ποιο είναι το εμβαδό του αρχικού σου παραλληλογράμμου; ....
- Εξήγησε πώς μπορείς να βρεις το εμβαδό ενός πλάγιου παραλληλογράμμου, χωρίς να το κόψεις:

  ....

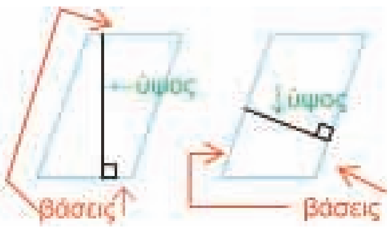
Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο με βάση **β** και ύψος **υ** έχει την ίδια επιφάνεια με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις ίσες με **β** και **υ**.

Εμβαδό παραλληλογράμμου

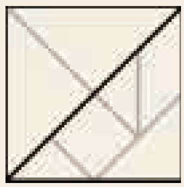
Το **εμβαδό** ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο μιας βάσης του επί το αντίστοιχο ύψος.
Αυτό εκφράζεται σύντομα με τον τύπο
$E_{(\text{παραλληλογράμμου})} = β \cdot υ$

Για να βρούμε το ύψος του παραλληλογράμμου, πρέπει να τραβήξουμε ένα κάθετο ευθύγραμμο τμήμα προς ένα από τα ζευγάρια των παράλληλων πλευρών του. Αυτές οι πλευρές τότε λέγονται βάσεις του και το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, ύψος.

Παραδείγματα

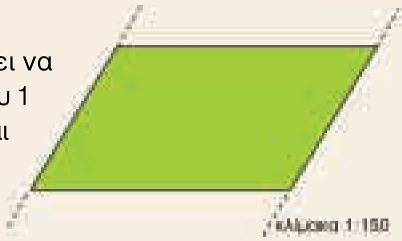


Εφαρμογή 1η



Στη διαπίστωση ότι ένα σχήμα μπορεί να χωριστεί σε κομμάτια και αυτά να τοποθετηθούν με διαφορετική διάταξη δημιουργώντας νέα σχήματα που θα έχουν το ίδιο εμβαδό με το αρχικό σχήμα στηρίζεται το αρχαίο κινεζικό παιχνίδι **TAN GRAM**. Αντίγραψέ το σε ένα χαρτόνι, κόψε κατά μήκος της διαγώνιας γραμμής και δημιούργησε το πρώτο νέο σχήμα: ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο με επιφάνεια ίση με του αρχικού σχήματος!

Εφαρμογή 2η



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το κομμάτι ενός πάρκου που πρέπει να στρωθεί με έτοιμο χλοοτάπητα, ο οποίος πουλιέται σε κομμάτια του 1 τ.μ. και στοιχίζει 20 € το κομμάτι. Πόσα κομμάτια θα χρειαστούν και πόσο θα στοιχίσει;

Λύση:

Για να βρούμε το εμβαδό του κομματιού αυτού:

1. Φέρνουμε πρώτα το ύψος του.
2. Μετράμε πόσα εκατοστά είναι στο σχέδιο η βάση και το ύψος και υπολογίζουμε σύμφωνα με την κλίμακα τις πραγματικές τους διαστάσεις.

   βάση .... ύψος ....
3. Εφαρμόζουμε τον τύπο που μας δίνει το εμβαδό του παραλληλογράμμου.

   ....

Το εμβαδό του κομματιού δείχνει και τον αριθμό των κομματιών χλοοτάπητα, αφού το μετράμε σε τετραγωνικά μέτρα και κάθε κομμάτι χλοοτάπητα είναι 1 τετραγωνικό μέτρο.

Για να βρούμε πόσο θα στοιχίσει ο χλοοτάπητας θα πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό τον κομματιών με το 20, γιατί 20 € είναι η τιμή κάθε κομματιού χλοοτάπητα. ....

Απάντηση: Θα χρειαστούν .... κομμάτια χλοοτάπητα και θα στοιχίσει .... €.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **εμβαδό παραλληλογράμμου, βάση** και **ύψος**. Να σχεδιάσεις ένα παραλληλόγραμμο και να βρεις όλα τα ύψη και τις αντίστοιχες βάσεις του.

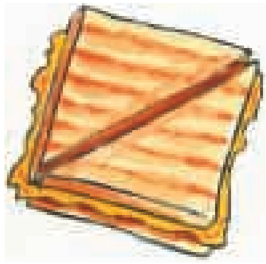
Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Σε ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο βάση ορίζεται η κάθετη πλευρά στο ύψος.	❒	❒
Για να βρω το εμβαδό ενός πλάγιου παραλληλογράμμου πολλαπλασιάζω τη μια πλευρά με την άλλη.	❒	❒

Κεφάλαιο 63ο — Βρίσκω το εμβαδό τριγώνου

Αδυνάτισα! Μισός έμεινα!

Κατανοώ τη διαδικασία εύρεσης του εμβαδού του τριγώνου.
Υπολογίζω εμβαδό τριγώνου με τη βοήθεια τύπου.
Λύνω προβλήματα εμβαδών τριγώνου.

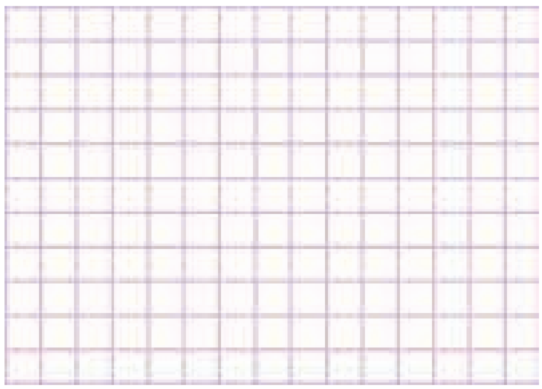
Δραστηριότητα 1η



Ένα τοστ έχει σχήμα ορθογώνιου. Πολλές τοστιέρες όταν ψήνουν το τοστ το χωρίζουν στα δύο, όπως δείχνει το σκίτσο.

- Ποια είναι η σχέση του καθενός από τα δύο κομμάτια με το αρχικό τοστ;
  ....
- Πως θα έβρισκες την έκταση της επιφάνειας (το εμβαδό) του αρχικού τοστ;
  ....
- Πόσο από αυτό το εμβαδό αντιστοιχεί σε καθένα από τα δύο τριγωνικά κομμάτια στα οποία μοιράστηκε το αρχικό τοστ; ....

Δραστηριότητα 2η



- Σχεδίασε δίπλα ένα τρίγωνο.
- Ξεκίνα από οποιαδήποτε κορυφή και φέρε την κάθετη προς την απέναντι πλευρά.

Η πλευρά αυτή λέγεται τώρα **βάση** ενώ η κάθετη που έφερες ονομάζεται **ύψος** του τριγώνου.

- Χρωμάτισε τη βάση με ένα χρώμα.
- Μέτρησε το ύψος και τη βάση του τριγώνου και κατάγραψε τις μετρήσεις σου.
  ....
- Αντίγραψε το τρίγωνο δύο φορές σε ένα άλλο χαρτί και κόψε αυτά τα δύο τρίγωνα.
- Τακτοποίησε τα τρίγωνα που έκοψες με τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργηθεί ένα παραλληλόγραμμο.
- Βρες το ύψος και τη βάση του παραλληλογράμμου και υπολόγισε το εμβαδό του.
  ....
- Τι σχέση έχει το εμβαδό του παραλληλογράμμου με το εμβαδό του ενός τριγώνου;
  ....
- Ποιο είναι το εμβαδό του τριγώνου; ....
- Τι σχέση έχουν η βάση και το ύψος του παραλληλογράμμου που σχηματίστηκε με τη βάση και το ύψος του αρχικού τριγώνου; ....
- Προσπάθησε να εκφράσεις ένα γενικό κανόνα για τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου:
  ....
- Δοκίμασε να εφαρμόσεις τον κανόνα φέρνοντας κάποιο άλλο ύψος στο τρίγωνο.

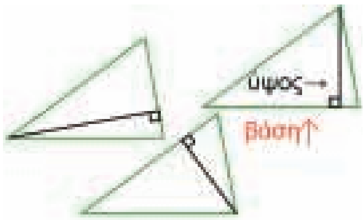
Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι ένα τρίγωνο με βάση **β** και ύψος **υ** έχει τη μισή επιφάνεια από ένα παραλληλόγραμμο με διαστάσεις ίσες με **β** και **υ**.

Εμβαδό τριγώνου

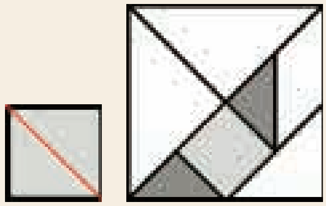
Το **εμβαδό** ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινόμενου της βάσης του επί το αντίστοιχο ύψος.
Αυτό εκφράζεται σύντομα με τον τύπο $\mathbf{E_{(τριγώνου)} = (β \cdot υ) : 2}$

Για να βρούμε το ύψος του τριγώνου, πρέπει να τραβήξουμε μια κάθετη γραμμή από μία από τις κορυφές του προς την απέναντι πλευρά. Αυτή η πλευρά του τότε λέγεται βάση του.

Παραδείγματα



Εφαρμογή 1η



Στο **TAN GRAM** που κατασκεύασες στο προηγούμενο μάθημα, αφού κόψεις όλα τα κομμάτια, βρες ποια είναι η σχέση που έχει το εμβαδό των δύο μικρών τριγώνων με το μικρό τετράγωνο.

Λύση - Απάντηση:

Βάζουμε τα τρίγωνα το ένα δίπλα στο άλλο επάνω στο τετράγωνο.
Παρατηρούμε ότι το καλύπτουν ακριβώς. Άρα, το εμβαδό κάθε τριγώνου είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του αρχικού τετραγώνου.

Εφαρμογή 2η

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το παρτέρι στη νησίδα ανάμεσα σε δύο δρόμους στη Θεσσαλονίκη. Κάθε άνοιξη ο Δήμος αλλάζει τα λουλούδια στα παρτέρια του και χρειάζεται να υπολογίζει τις επιφάνειες των παρτεριών.
Αν αυτή η εργασία κοστίζει κατά μέσο όρο 3 € το τετραγωνικό μέτρο, πόσο κοστίζει η αλλαγή των λουλουδιών σ' αυτή τη νησίδα;

Λύση:

Πρέπει πρώτα να βρούμε το εμβαδό του κομματιού αυτού:

1. Φέρνουμε το ύψος του.
2. Μετράμε πόσα εκατοστά είναι στο σχέδιο η βάση και το ύψος και υπολογίζουμε σύμφωνα με την κλίμακα τις πραγματικές τους διαστάσεις.

   βάση .... ύψος ....
3. Εφαρμόζουμε τον τύπο που μας δίνει το εμβαδό του τριγώνου.

   ....

   Για να βρούμε πόσο θα στοιχίσει η αλλαγή των λουλουδιών θα πολλαπλασιάσουμε τα τετραγωνικά μέτρα με το 3, γιατί 3 € είναι το κόστος κάθε τετραγωνικού μέτρου.

....

Απάντηση: Η αλλαγή των λουλουδιών στη νησίδα αυτή κοστίζει .... €.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **εμβαδό τριγώνου, βάση** και **ύψος τριγώνου**. Εξήγησε τους όρους αυτούς σε ένα τρίγωνο που θα σχεδιάσεις εσύ.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
Σε όλα τα τρίγωνα μπορώ να φέρω τρία ύψη.	❒	❒
Υπάρχει περίπτωση το ένα ύψος να βρίσκεται έξω από το τρίγωνο.	❒	❒

Κεφάλαιο 64ο **Βρίσκω το εμβαδό τραπεζίου**

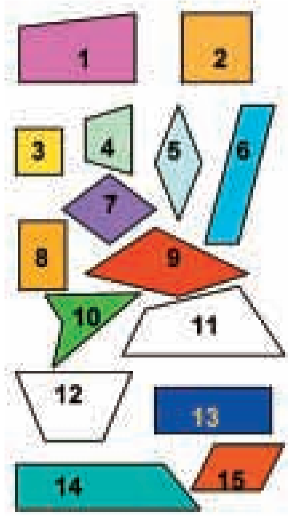
Το εμβαδό του τραπεζίου;;

Αναγνωρίζω το τραπέζιο και κατανοώ τη διαδικασία εύρεσης του εμβαδού του.
Βρίσκω το εμβαδό του τραπεζίου με τη βοήθεια τύπου.
Λύνω προβλήματα εμβαδών τραπεζίου και άλλων πολυγώνων.

Δραστηριότητα 1η

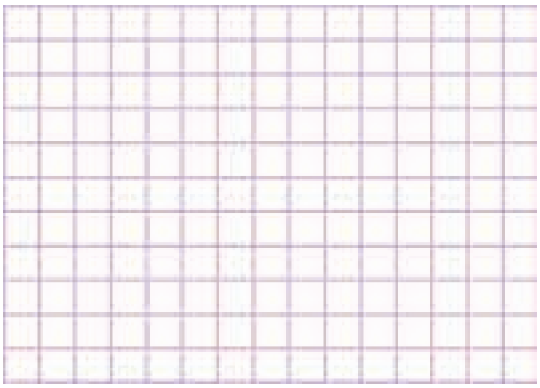
- Πώς ονομάζονται τα σχήματα που έχουν τέσσερις πλευρές; ....
- Όλα τα σχήματα που φαίνονται δίπλα έχουν τέσσερις πλευρές. Ταξινόμησέ τα σύμφωνα με κάποιο άλλο χαρακτηριστικό τους και συμπλήρωσε τον ακόλουθο πίνακα:

Ονομασία	Ειδικό χαρακτηριστικό	Σχήματα
Τετράγωνο	....	2, 3
Ορθογώνιο	....	
Ρόμβος	....	
Παραλληλόγραμμο	....	
Τραπέζιο	....	
Άλλο τετράπλευρο	Τέσσερις πλευρές..................	9, ...



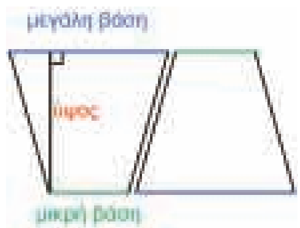
Δραστηριότητα 2η

- Σχεδίασε δίπλα, ένα τραπέζιο.
- Κάνε μια εκτίμηση με το νου για το εμβαδό του: ....
- Αντίγραψε το τραπέζιο σε ένα άλλο χαρτί δύο φορές και κόψε τα δύο αυτά σχήματα.
- Βάλε τα δύο τραπέζια με τέτοιο τρόπο, ώστε να σχηματιστεί ένα παραλληλόγραμμο.
- Βρες το εμβαδό του παραλληλογράμμου εφαρμόζοντας τον τύπο.



- Μπορείς τώρα να πεις πόσο είναι το εμβαδό του αρχικού σου τραπεζίου; ....
....

- Το σχήμα που έφτιαξες μοιάζει με το διπλανό σχήμα. Με τη βοήθειά του προσπάθησε να εξηγήσεις τη σχέση που έχει η βάση του παραλληλογράμμου, με τις βάσεις του τραπεζίου: ....
....
....



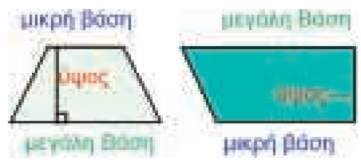
Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι, δύο ίδια τραπέζια είναι δυνατό να τοποθετηθούν το ένα δίπλα στο άλλο έτσι ώστε να σχηματίσουν ένα παραλληλόγραμμο που θα έχει βάση το άθροισμα των βάσεων του τραπεζίου και ύψος το ύψος του τραπεζίου.

Εμβαδό τραπεζίου

Το **εμβαδό** ενός τραπεζίου είναι ίσο με το άθροισμα μικρής και μεγάλης βάσης του επί το ύψος του δια δύο.
Αυτό εκφράζεται σύντομα με τον τύπο $\mathbf{E_{(τραπεζίου)} = (β + Β) \cdot υ : 2}$

Βάσεις του τραπεζίου είναι οι δύο παράλληλες πλευρές του και ύψος του το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα ανάμεσά τους.

Παραδείγματα



Εφαρμογή 1η

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η «κάτοψη» ενός συνεταιριστικού ελαιοτριβείου. Τα μέλη του συνεταιρισμού χρειάζονται ένα δάνειο για επέκταση των εγκαταστάσεων. Πρέπει να δηλώσουν το εμβαδό του εργοστασίου. Πόσο είναι;

Λύση:

Μελετώντας την κάτοψη, διαπιστώνουμε ότι το σχήμα του κτηρίου είναι τραπέζιο.
Οι βάσεις του είναι οι δύο παράλληλες πλευρές του και το ύψος του είναι η κάθετη πλευρά στις δύο βάσεις.
Υπολογίζουμε, σύμφωνα με την κλίμακα του σχεδίου, τις πραγματικές διαστάσεις των πλευρών που μας χρειάζονται και εφαρμόζουμε τον τύπο που μας δίνει το εμβαδό του τραπεζίου. Βρες τα μήκη των βάσεων και του ύψους :

Βάση μεγάλη:...
βάση μικρή: ....
Ύψος: ....
Εμβαδό:...

Απάντηση: Το εμβαδό του κτηρίου είναι ……..…….. τ.μ.

Εφαρμογή 2η

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η κάτοψη του εργοστασίου μετά την επέκταση που πραγματοποιήθηκε στο κτήριο. Πόσο είναι τώρα το εμβαδό του κτηρίου;

Λύση:

Για να βρούμε το εμβαδό ενός σχήματος, μπορούμε να το χωρίσουμε σε πολύγωνα των οποίων ξέρουμε να υπολογίζουμε το εμβαδό. Το σχήμα του εργοστασίου όπως έγινε μετά την επέκταση μπορεί να χωριστεί σε ένα τραπέζιο και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
Το εμβαδό του τραπεζίου το έχουμε ήδη βρει, άρα τώρα θα βρούμε μόνο το εμβαδό του παραλληλογράμμου και θα προσθέσουμε τα δύο εμβαδά.

βάση: ……………………….., ύψος: ……………………….., εμβαδό: ………………………..

Συνολικό εμβαδό κτηρίου: εμβαδό τραπεζίου + εμβαδό παραλληλογράμμου = ……………

Απάντηση: Το εμβαδό του κτηρίου τώρα είναι ……..…….. τ.μ.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **εμβαδό τραπεζίου, μικρή βάση, μεγάλη βάση** και **ύψος τραπεζίου**. Εξήγησε τους όρους αυτούς σε ένα τραπέζιο που θα σχεδιάσεις εσύ.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Στο τραπέζιο μπορώ να φέρω ύψος σε οποιαδήποτε από τις 4 πλευρές.	❒	❒
Για να βρω το εμβαδό ενός σχήματος μπορώ να το χωρίσω σε γνωστά σχήματα.	❒	❒

Βρίσκω το εμβαδό κυκλικού δίσκου

Κόβω κύκλους!

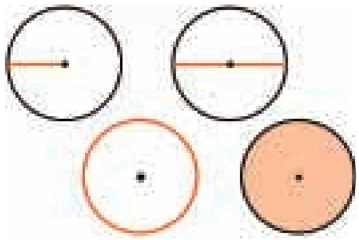
Κατανοώ τη διαδικασία εύρεσης του εμβαδού του κυκλικού δίσκου.
Βρίσκω το εμβαδό του κυκλικού δίσκου με τη βοήθεια τύπου.
Λύνω προβλήματα με εμβαδά κυκλικών σκων.

Δραστηριότητα 1η

Ο κύκλος είναι ένα από τα σχήματα που συναντάς καθημερινά στη ζωή σου.

- Ανάφερε κάποια κυκλικά αντικείμενα:..

  ....



Μπορούμε να κάνουμε τουλάχιστο 4 μετρήσεις που μας χρησιμεύουν στο να περιγράψουμε το μέγεθος ενός κύκλου. Συγκεκριμένα μπορούμε να μετρήσουμε την ακτίνα, τη διάμετρο, το μήκος του κύκλου και το εμβαδό.

- Ποιες από τις παραπάνω μετρήσεις γίνονται ευκολότερα;

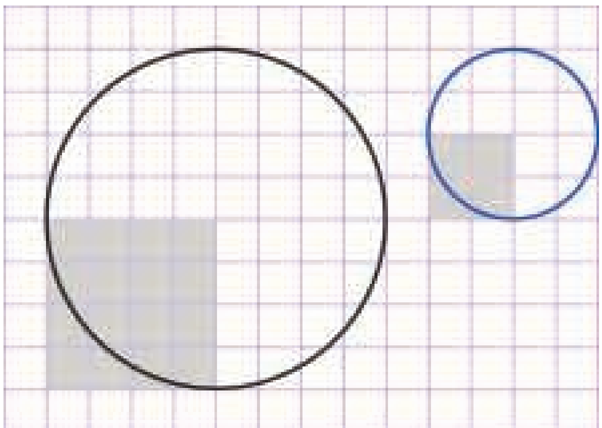
  ....

Οι άνθρωποι που μελέτησαν τον κύκλο από τα αρχαία χρόνια ανακάλυψαν τη σχέση που έχει η διάμετρος του κύκλου με το μήκος του: μήκος κύκλου = 3,14 • διάμετρος. Μπορείς να βεβαιωθείς για τη σχέση αυτή μετρώντας διάφορους κύκλους.

Δραστηριότητα 2η

- Προσπάθησε να κάνεις μια εκτίμηση με όποιον τρόπο νομίζεις για το πιθανό εμβαδό του μεγαλύτερου από τους πιο κάτω κύκλους.
- Πιστεύεις ότι υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στο εμβαδό και την ακτίνα του κύκλου; ....
- Ο κύκλος με τη μισή ακτίνα θα έχει το μισό εμβαδό;

  ....



- Στο διπλανό σχήμα βλέπεις σκιασμένο ένα τετράγωνο. Θα το ονομάσουμε «τετράγωνο της ακτίνας». Γιατί; ....

  ....
- Κόψε μερικά τέτοια τετράγωνα και προσπάθησε να ανακαλύψεις πόσα χρειάζονται για να καλυφθεί η επιφάνεια του κυκλικού δίσκου.
- Πόσα χρειάζονται; (Μπορείς να απαντήσεις πόσα περίπου, αν δεν μπορείς ακριβώς.)

  ....
- Επανέλαβε το ίδιο και για άλλους κύκλους, σημειώνοντας πάντα το αποτέλεσμα.
- Διακρίνεις κάτι που ισχύει και πάλι για τους κύκλους ανεξάρτητα από το μέγεθός τους;

  ....
- Μπορείς τώρα να πεις πώς μπορούμε να βρούμε το εμβαδό του κυκλικού δίσκου χωρίς να κόβουμε τετράγωνα; ....

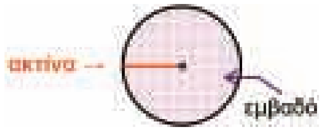
  ....

Από τα παραπάνω διαπιστώσαμε ότι το εμβαδό του κυκλικού δίσκου είναι περίπου 3 φορές το τετράγωνο της ακτίνας. Επίσης γνωρίζουμε ότι το μήκος του κύκλου είναι περίπου 3 φορές η διάμετρος. Αυτός ο αριθμός, ο «περίπου 3» ονομάζεται π και είναι στην πραγματικότητα ένας αριθμός με πάρα πολλά δεκαδικά ψηφία, ωστόσο για ευκολία χρησιμοποιούμε μόνο τα δύο: λέμε $\pi = 3{,}14$.

Εμβαδό κυκλικού δίσκου

Το **εμβαδό** ενός κυκλικού δίσκου είναι ίσο με το γινόμενο του αριθμού π επί το τετράγωνο της ακτίνας του.
Αυτό εκφράζεται σύντομα με τον τύπο $\mathbf{E}_{(\text{κυκλικού δίσκου})} = \pi \cdot \alpha^2$

Παραδείγματα



Εφαρμογή 1η

Μία εταιρία κινητής τηλεφωνίας έβαλε την κεραία της στο σημείο που φαίνεται στο χάρτη. Η κεραία έχει εμβέλεια (δηλαδή στέλνει σήμα) σε απόσταση 25 χιλιομέτρων. Σημείωσε πάνω στο χάρτη την περιοχή της εμβέλειας και υπολόγισε το εμβαδό της περιοχής αυτής.

Λύση
Αφού γνωρίζουμε ότι όλα τα σημεία που βρίσκονται σε απόσταση μέχρι 25 χμ. βρίσκονται μέσα στην περιοχή εμβέλειας, για να οριοθετήσουμε την περιοχή αυτή, θα σχεδιάσουμε έναν κύκλο με κέντρο την κεραία και ακτίνα 25 χμ., αφού υπολογίσουμε πόση θα είναι η απόσταση αυτή πάνω στο χάρτη σύμφωνα με την κλίμακα. ..

....

Απάντηση: Το εμβαδό της περιοχής είναι :

Εφαρμογή 2η

Στον αρχαιολογικό χώρο της Βεργίνας βρέθηκε το αρχαίο θέατρο στο οποίο ο βασιλιάς της Μακεδονίας Φίλιππος ο Β΄ δολοφονήθηκε το 336 π.Χ. Το θέατρο διέθετε ημικυκλική ορχήστρα διαμέτρου 28 μέτρων. Να υπολογίσετε το εμβαδό της.

Λύση
Για να βρούμε το εμβαδό ενός ημικύκλιου, αρκεί να βρούμε το εμβαδό του κυκλικού δίσκου με την ίδια ακτίνα και να το διαιρέσουμε δια 2. Αφού η διάμετρος είναι 28 μ., η ακτίνα είναι 28 : 2 = 14 μ.

Άρα το εμβαδό του κυκλικού δίσκου θα είναι: .... και του ημικύκλιου : ....

Απάντηση: Το εμβαδό της ορχήστρας του αρχαίου θεάτρου είναι .... τ.μ.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **εμβαδό κυκλικού δίσκου** και π. Εξήγησε γιατί γνωρίζοντας μόνο την ακτίνα ενός κυκλικού δίσκου μπορούμε να βρούμε το εμβαδό του.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Όταν γνωρίζω το εμβαδό ενός κυκλικού δίσκου, μπορώ να βρω την ακτίνα του.	❒	❒
Το εμβαδό ενός κυκλικού δίσκου με ακτίνα 3μ. είναι $3{,}14 \cdot 3^2 = 3{,}14 \cdot 6 = 18{,}84$ *τ.μ.*	❒	❒

Κεφάλαιο 66ο **Κύβος και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο: έδρες και αναπτύγματα**

Να το κάνω πακέτο;

Σχεδιάζω αναπτύγματα και κατασκευάζω κύβους και ορθογώνια παραλληλεπίπεδα.
Παρατηρώ και αναγνωρίζω ομοιότητες και διαφορές στην επιφάνεια του κύβου και του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.
Κατανοώ τη διαδικασία εύρεσης του εμβαδού των βάσεων, της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας του κύβου και του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

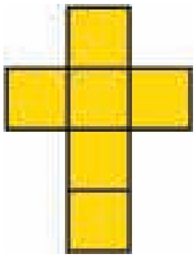
Δραστηριότητα 1η

Ο κύβος είναι ένα γεωμετρικό στερεό σώμα με επίπεδες επιφάνειες που έχουν σχήμα τετραγώνου και λέγονται έδρες.

- Το ζάρι είναι ένας κύβος. Πόσες έδρες έχει; ....
- Γιατί πιστεύεις ότι το ζάρι έχει τη μορφή κύβου και όχι κάποιου άλλου στερεού σώματος; ....

  ....
- Ανάφερε κάποια άλλα αντικείμενα που είναι κύβοι: ....

  ....



Στο διπλανό σχέδιο φαίνεται ένας τρόπος για να κατασκευάσουμε ζάρι από χαρτί. Αυτό το σχέδιο λέγεται ανάπτυγμα.

- Φτιάξε ένα ίδιο και κατασκεύασε ένα ζάρι. Πρόσεξε πώς θα βάλεις τους αριθμούς στις έδρες του. Οι απέναντι έδρες πρέπει να έχουν άθροισμα 7.
- Προσπάθησε να βρεις και κάποιο άλλο ανάπτυγμα για να κατασκευάσεις το ζάρι.

Δραστηριότητα 2η

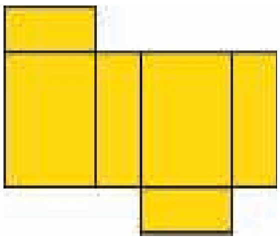
Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, όπως ο κύβος, είναι ένα γεωμετρικό στερεό σώμα με επίπεδες επιφάνειες που λέγονται έδρες.

- Στη διπλανή εικόνα φαίνεται ένα κουτί από δημητριακά που συνηθίζονται για πρωινό. Το κουτί αυτό είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Πόσες έδρες έχει;
- Ποια είναι η διαφορά που έχουν οι έδρες του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου από τις έδρες του κύβου;

  ....

  ....
- Ανάφερε κάποια άλλα αντικείμενα που είναι ορθογώνια παραλληλεπίπεδα: ....

  ....



Στο διπλανό σχέδιο φαίνεται το ανάπτυγμα του κουτιού των δημητριακών.

- Φτιάξε ένα ίδιο και κατασκεύασε ένα δικό σου κουτί για δημητριακά. Μετά προσπάθησε να βρεις και κάποιο άλλο ανάπτυγμα και να κατασκευάσεις ένα ίδιο κουτί.
- Σύγκρινε τα αναπτύγματα του κύβου και του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ποιο από τα δύο στερεά νομίζεις ότι έχει περισσότερα αναπτύγματα; ....

  Γιατί; ....

Παρατηρώντας τον κύβο και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο διαπιστώνουμε ότι:

Κύβος - Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

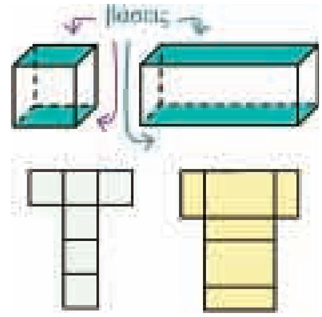
Η επιφάνεια του **κύβου** αποτελείται από **6 έδρες**. Το ίδιο και η επιφάνεια του **ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου**.

Στον κύβο όλες οι έδρες είναι τετράγωνα και είναι ίσες μεταξύ τους, ενώ στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα και είναι ίσες οι απέναντι έδρες του ανά δύο.

Η έδρα πάνω στην οποία στηρίζεται το γεωμετρικό στερεό και η απέναντί της λέγονται **βάσεις** του. Οι υπόλοιπες έδρες αποτελούν την **παράπλευρη επιφάνειά** του. Οι βάσεις και η παράπλευρη επιφάνεια μαζί αποτελούν την **ολική επιφάνεια** του στερεού.

Ανάπτυγμα ενός στερεού λέγεται το αποτύπωμα των εδρών του σε ένα επίπεδο με συνεχόμενο τρόπο, έτσι ώστε με δίπλωση να σχηματίσουν το στερεό.

Παραδείγματα



Εφαρμογή 1η ***Εμβαδό επιφάνειας κύβου***

Πόσα τετραγωνικά μέτρα ύφασμα χρειάζομαι για να «ντύσω» τον ξύλινο κύβο με ακμή 50 εκατοστά; Πόσα μέτρα θα χρειαστώ αν θέλω να ντύσω μόνο την παράπλευρη επιφάνεια;

Λύση:

Αφού οι έδρες του κύβου είναι τετράγωνα, για να βρω το εμβαδό της μιας έδρας, πολλαπλασιάζω το μήκος της μιας ακμής με τον εαυτό της: $E_{(έδρας)} = α \cdot α$.

$E_{(έδρας)}$ = ...

Για να βρω το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του κύβου πολλαπλασιάζω το εμβαδό της μιας έδρας επί 4, και για το εμβαδό της ολικής επιφάνειας επί 6.

Άρα ολική επιφάνεια = ... παράπλευρη επιφάνεια = ...

Απάντηση: Για όλη την επιφάνεια θα χρειαστώ …......... τ.μ., ενώ μόνο για την παράπλευρη επιφάνεια θα χρειαστώ .... τ.μ. ύφασμα.

Εφαρμογή 2η ***Εμβαδό επιφάνειας ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου***

Πόσα τετραγωνικά μέτρα ύφασμα χρειάζομαι για να «ντύσω» όλη την επιφάνεια του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου της διπλανής εικόνας;

Λύση:

Αφού γνωρίζω ότι οι έδρες του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι ανά δύο απέναντι ίσες, ένας τρόπος για να εργαστώ είναι ο εξής:

α. Να βρω το εμβαδό μιας έδρας από κάθε ζευγάρι ....

β. Να πολλαπλασιάσω το καθένα επί 2 ....

γ. Να προσθέσω τα τρία γινόμενα ....

Απάντηση: Για το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο χρειάζομαι …..…….. τ.μ. ύφασμα.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **κύβος, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, έδρες, βάσεις, παράπλευρη** και **ολική επιφάνεια** και **ανάπτυγμα**. Φτιάξε ένα κύβο και ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και εξήγησε τους όρους αυτούς στα στερεά σου.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
Ο κύβος έχει μόνο ένα ανάπτυγμα.	❒	❒
Για να βρούμε το εμβαδό της ολικής επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου χρειάζονται οι τρεις διαστάσεις του.	❒	❒

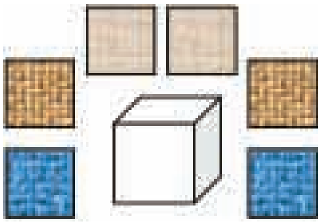
Κεφάλαιο 67ο

Κύβος και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο: ακμές και κορυφές

Συναρμολογώντας κομμάτια

Αναγνωρίζω τις ακμές και τις κορυφές των στερεών σωμάτων.
Κατασκευάζω και παρατηρώ μοντέλα κύβων και ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων.
Σχεδιάζω κύβο και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο σε χαρτί.

Δραστηριότητα 1η

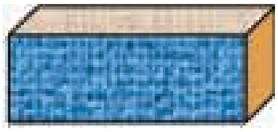


Θέλοντας να «ντύσουμε» τον κύβο με ύφασμα, κατασκευάσαμε 6 ξεχωριστά τετράγωνα και βάλαμε το καθένα πάνω σε μία έδρα. Μετά ράψαμε κάθε τετράγωνο με τα διπλανά του.

- Πόσες ραφές υπάρχουν; ....
- Εξήγησε τη σκέψη σου:..
- Αν θελήσουμε στις άκρες των ραφών να βάλουμε μία φουντίτσα, πόσες φουντίτσες θα χρειαστούμε; Εξήγησε τη σκέψη σου: ....

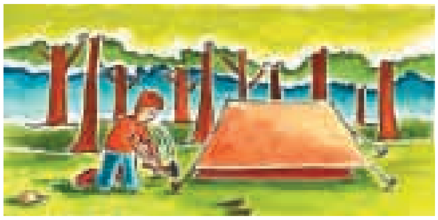
  ....

  ....



- Αν κάναμε το ίδιο πράγμα σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, πόσες ραφές θα υπήρχαν; ....
- Πόσες φουντίτσες; ....
- Γιατί; ....

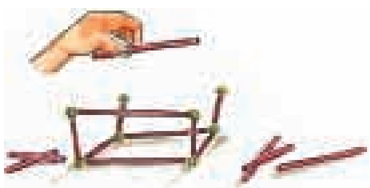
Δραστηριότητα 2η



Όταν στήνουμε μια σκηνή, αυτό που πρέπει να κάνουμε πρώτα είναι να φτιάξουμε το «σκελετό» της και μετά να τον τυλίξουμε με το ύφασμα.

- Να φτιάξεις χρησιμοποιώντας καλαμάκια και πλαστελίνη, το «σκελετό» ενός κύβου με ακμή 10 εκατοστόμετρα.

- Πόσα καλαμάκια χρησιμοποίησες; ....
- Τι είναι κάθε καλαμάκι για τον κύβο σου; ....
- Πόσες ενώσεις πλαστελίνης έκανες; ....
- Τι είναι κάθε ένωση πλαστελίνης για τον κύβο σου; ....



- Για να φτιάξεις τώρα με τα ίδια υλικά το «σκελετό» ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, σε πόσες διαφορετικές διαστάσεις πρέπει να κόψεις τα καλαμάκια; ....
- Για να διευκολυνθείς, μπορείς να διαλέξεις διαφορετικό χρώμα για κάθε διάσταση.
- Σύγκρινε τον αριθμό των ακμών και τον κορυφών ανάμεσα στις δύο κατασκευές σου.
- Τι παρατηρείς; ....

  ....

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι:

Κύβος, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

Ακμή είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο έδρες. Ο κύβος και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχουν **12 ακμές**.

Κορυφή είναι το σημείο συνάντησης τριών ακμών. Ο κύβος και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχουν **8 κορυφές**.

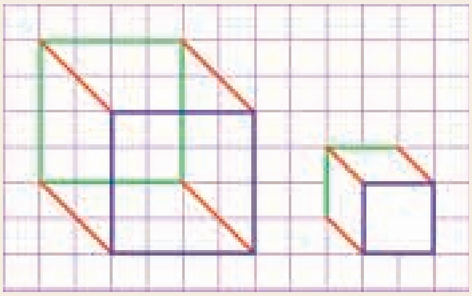
Παραδείγματα

Εφαρμογή 1η ***Σχεδιάζω κύβο και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο σε χαρτί***

Οι αρχιτέκτονες, εκτός από τα σχέδια που κάνουν για να απεικονίσουν το εσωτερικό των σπιτιών, πολλές φορές χρειάζεται να κάνουν σχέδια που να απεικονίζουν την εξωτερική όψη των κτιρίων. Πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε έναν κύβο ή ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο σε ένα χαρτί;

Λύση - Απάντηση:

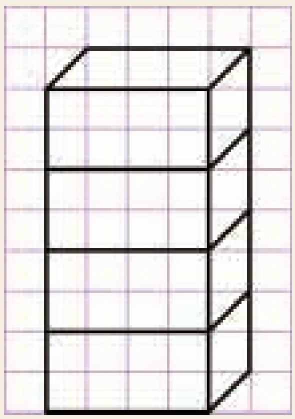
Ένας τρόπος είναι ο παρακάτω:



1. Σχεδιάζουμε τη μία έδρα.
2. Σχεδιάζουμε την απέναντί της έδρα, που είναι ίση με την πρώτη. Η μία έδρα μπορεί να επικαλύπτει την άλλη.
3. Σχεδιάζουμε τις ακμές που λείπουν, ενώνοντας μ' αυτές τις δύο έδρες. Μπορούμε να σχεδιάσουμε με διακεκομμένη γραμμή τις ακμές που δεν φαίνονται στην πραγματικότητα, αν θέλουμε το στερεό να φαίνεται διαφανές, ή να τις σβήσουμε, αν θέλουμε το στερεό να φαίνεται αδιαφανές.

Εφαρμογή 2η

Σύμφωνα με τον παραπάνω τρόπο σχεδιάστε μια πολυκατοικία που το ύψος της να είναι 20 μέτρα και το μήκος της πρόσοψής της να είναι 10 μέτρα, με κλίμακα 1 : 500



Λύση - Απάντηση:

Πρώτα υπολογίζουμε τις διαστάσεις στο σχέδιο σύμφωνα με την κλίμακα:

20 **:** 500 = ... μ. δηλ. .... εκ.

10 **:** 500 = ... μ. δηλ. .... εκ.

Σύμφωνα με τις διαστάσεις αυτές, σχεδιάζουμε το ορθογώνιο που θα είναι η μία έδρα του παραλληλεπιπέδου.

Μετά σχεδιάζουμε το ορθογώνιο που θα είναι η απέναντι έδρα, όσο πίσω θέλουμε να φαίνεται στο σχέδιό μας. Προσέχουμε να σβήσουμε τις ακμές που ενώνουν τις δύο αυτές έδρες, όπου δεν φαίνονται στην πραγματικότητα. Μπορούμε να συμπληρώσουμε το σχέδιο σχεδιάζοντας τα μπαλκόνια ή την πόρτα της πολυκατοικίας.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **ακμή** και **κορυφή**. Εξήγησε τους όρους αυτούς σε ένα κύβο και ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Κάθε έδρα του κύβου έχει 4 ακμές Άρα, αφού ο κύβος έχει 6 έδρες, έχει 24 ακμές.	❐	❐
Η κορυφή στον κύβο είναι πάντα η συνάντηση 3 ακμών.	❐	❐

Κεφάλαιο 68ο Κύλινδρος

Να το τυλίξω;

Σχεδιάζω το ανάπτυγμα και κατασκευάζω κύλινδρο.
Κατανοώ τη διαδικασία εύρεσης του εμβαδού των βάσεων, της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.
Σχεδιάζω κύλινδρο σε επίπεδη επιφάνεια.

Δραστηριότητα 1η

Ο κύλινδρος είναι ένα γεωμετρικό στερεό με μια καμπύλη επιφάνεια και δύο παράλληλες βάσεις σε σχήμα κυκλικού δίσκου.
Πολλά αντικείμενα καθημερινής χρήσης είναι κύλινδροι.

- Ανάφερε κάποια αντικείμενα που να είναι κύλινδροι: ....

  ....
- Για να «ντύσεις» έναν κύλινδρο με χαρτί, πόσα κομμάτια χαρτί θα χρησιμοποιήσεις (το λιγότερο) και τι σχήμα θα έχει το καθένα; ....

  ....
- Σχεδίασε αυτά τα κομμάτια σε μια σειρά, ώστε να αποτελούν το ανάπτυγμα ενός κυλίνδρου.
- Αν αντιγράψεις το ανάπτυγμα που έφτιαξες σε χαρτί και το κόψεις, θα γίνει κύλινδρος; ....

  ....

  Τι σχέση πρέπει να έχει η βάση με την παράπλευρη επιφάνεια, ώστε το ανάπτυγμα που θα σχεδιάσεις να μπορεί να γίνει κύλινδρος; ....

  ....

Δραστηριότητα 2η

- Σχεδίασε ένα ανάπτυγμα για ένα κύλινδρο με τις διαστάσεις που θέλεις.
- Για να υπολογίσουμε πόσο χαρτί θα χρειαστεί για την κατασκευή αυτού του κυλίνδρου, τι πρέπει να υπολογίσουμε; ....
- Πώς θα υπολογίσεις, με τη βοήθεια του αναπτύγματος που έφτιαξες, την επιφάνεια του κυλίνδρου (βάσεις, παράπλευρη και ολική;)...................

  ....

  ....

  ....
- Ποιες μετρήσεις είναι απαραίτητες για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την επιφάνεια (βάσεις, παράπλευρη και ολική) του κυλίνδρου, χωρίς να βλέπουμε το ανάπτυγμά του;

  ....

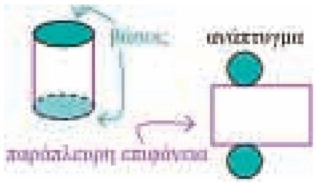
  ....

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι:

Κύλινδρος

Ο **κύλινδρος** είναι το γεωμετρικό στερεό σώμα που έχει δύο παράλληλες και ίσες μεταξύ τους **κυκλικές βάσεις** και **καμπύλη παράπλευρη επιφάνεια**. Η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου είναι η επιφάνεια ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου, του οποίου η μία διάσταση είναι ίση με το ύψος του κυλίνδρου και η άλλη είναι ίση με το μήκος του κύκλου της βάσης.

Παραδείγματα



Για να βρούμε το εμβαδό της επιφάνειας του κυλίνδρου (παράπλευρης, βάσεων και ολικής), αρκεί να γνωρίζουμε το μήκος της ακτίνας του κύκλου και το ύψος του κυλίνδρου.

Εφαρμογή 1η

Ένα κυλινδρικό κουτί για αναψυκτικό έχει τις εξής διαστάσεις: ύψος 12 εκ. και διάμετρο βάσης 6 εκ. Πόσα τετραγωνικά εκατοστά αλουμίνιο χρειάζονται για να κατασκευαστεί;

Λύση:

Χρειάζεται να βρούμε την ολική επιφάνεια του κυλίνδρου.

Εμβαδό βάσης: $E_{(κυκλικού\ δίσκου)} = \pi \cdot \alpha^2$. Η ακτίνα της βάσης είναι 6 : 2 = 3 εκ. Άρα το εμβαδό είναι $3{,}14 \cdot 3^2 = 3{,}14 \cdot 9 = 28{,}26$ τ.εκ.

Εμβαδό παράπλευρης επιφάνειας: $E_{(παραλληλογράμμου)} = 6 \cdot υ$.
Η βάση του είναι ίση με $\pi \cdot δ = 3{,}14 \cdot 6 = 18{,}84$ εκ. Άρα το εμβαδό του είναι $18{,}84 \cdot 12 = 226{,}08$ τ.εκ.

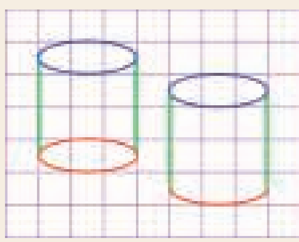
Εμβαδό ολικής επιφάνειας = εμβαδό βάσεων + εμβαδό παράπλευρης επιφάνειας. Άρα αφού οι βάσεις είναι 2 έχουμε:

Εμβαδό ολικής επιφάνειας = 28,26 · 2 + 226,08 = 56,52 + 226,08 = 282,6 τ.εκ.

Απάντηση: Για κάθε κουτί αναψυκτικό χρειάζονται 282,6 τ.εκ. αλουμίνιο.

Εφαρμογή 2η ***Σχεδιάζω κύλινδρο σε χαρτί***

Όταν χρειάζεται να απεικονίσουμε σε χαρτί ένα κύλινδρο, ακολουθούμε τα βήματα που ακολουθήσαμε και για το σχεδιασμό των παραλληλεπίπεδων στερεών.



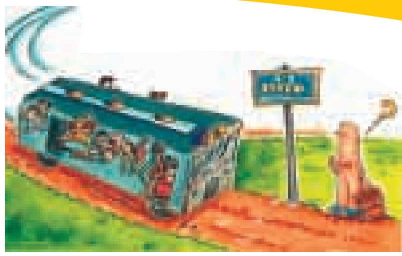
1. Σχεδιάζουμε τη μία βάση. (Ας μην ξεχνάμε ότι, όταν δεν βλέπουμε τον κύκλο ακριβώς από πάνω, δεν φαίνεται «κυκλικός».)
2. Σχεδιάζουμε δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα που θα ενώνουν τις δύο βάσεις (κάθετα σ' αυτές) και θα ορίζουν την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου.
3. Τέλος, σχεδιάζουμε την απέναντι βάση, όπως την πρώτη.
   Αν θέλουμε ο κύλινδρος να φαίνεται αδιαφανής, σβήνουμε το πίσω μέρος της κάτω βάσης.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **ανάπτυγμα, βάση** και **παράπλευρη επιφάνεια** κυλίνδρου. Εξήγησε τους όρους αυτούς σε έναν κύλινδρο που έφτιαξες.

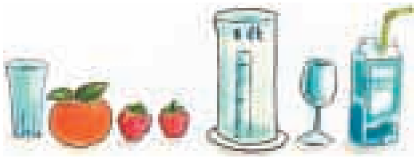
Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
➾ *Ο κύλινδρος δεν έχει ακμές και κορυφές.*	❒	❒
➾ *Όταν σχεδιάζω τον κύλινδρο σε χαρτί σχεδιάζω ημικύκλια για βάσεις.*	❒	❒

Κεφάλαιο 69ο Όγκος – Χωρητικότητα



Γέμισε; Χωράω κι εγώ;

Κατανοώ το λίτρο ως μονάδα χωρητικότητας.
Κατανοώ το κυβικό εκατοστό ως μονάδα όγκου και μαθαίνω τη σχέση του με τα πολλαπλάσιά του.
Εκφράζω τις μετρήσεις όγκου με φυσικούς, δεκαδικούς και συμμιγείς αριθμούς.
Λύνω προβλήματα που αναφέρονται σε όγκους.



Δραστηριότητα 1η

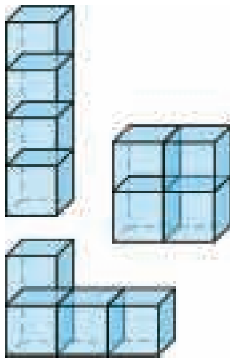
Σε μια συνταγή για παγωτό φρούτων διαβάζουμε:

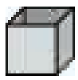
> **Χτυπήστε στο μίξερ:**
> 1 λιωμένη μπανάνα
> 1 ποτήρι λιωμένες φράουλες
> 1 ποτήρι γάλα
> και συμπληρώστε με χυμό πορτοκάλι μέχρι να γίνει 1 λίτρο

- Πώς θα ξέρεις ότι έγινε 1 λίτρο; ....
- Πόσα ποτήρια νομίζεις ότι «έχει» περίπου το 1 λίτρο; ....
- Αν χρειαζόσουν 40 ποτήρια χυμό για ένα πάρτι, πόσα λίτρα χυμός είναι περίπου; ....
- Έχουν το ίδιο βάρος 1 λίτρο γάλα και 1 λίτρο χυμός; ....
- Τι κοινό έχουν; ....
- Ανέφερε κάποια άλλα «δοχεία» με τα οποία μετράμε υγρά: ....
- Τα δοχεία που χωράνε την ίδια ποσότητα υγρού λέμε ότι έχουν την ίδια ....

Δραστηριότητα 2η

- Με ένα ανάπτυγμα κύβου να κατασκευάσεις ένα κυβικό εκατοστό, δηλαδή έναν κύβο του οποίου κάθε ακμή θα είναι ίση με 1 εκατοστό.
- Χρησιμοποιώντας το κυβικό εκατοστό που έφτιαξε ο καθένας στην ομάδα «χτίστε» έναν πύργο.
- Πόσα κυβικά εκατοστά είναι ο πύργος που φτιάξατε; ....
- Τι πληροφορία δίνει αυτή η μέτρηση σε κάποιον για τον πύργο σας; Επιλέξτε το σωστό: το βάρος του, το μήκος του, το ύψος του, το πλάτος του, το χώρο που καταλαμβάνει.
- Κάθε στερεό σώμα καταλαμβάνει χώρο. Πόσο χώρο καταλαμβάνει ο πύργος σας; ....





- Χρησιμοποιώντας όλους τους κύβους δοκιμάστε να τους βάλετε με άλλη διάταξη ώστε να φτιάξετε άλλες κατασκευές.
- Πόσο χώρο καταλαμβάνει κάθε σας κατασκευή;...

  Το κυβικό εκατοστό που έφτιαξες μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως δοχείο.
- Αν το γεμίσουμε με νερό ποια νομίζεις ότι είναι η χωρητικότητά του; ....
- Πόσα τέτοια κυβικά εκατοστά θα χρειαζόταν για να γεμίσει με νερό το ποτήρι του χυμού της προηγούμενης δραστηριότητας; ....
- Πόσα κυβικά εκατοστά ισοδυναμούν με 1 λίτρο νερό; ....
- Ζυγίστε 1 λίτρο νερό και γράψτε πόσο βάρος έχει. ....

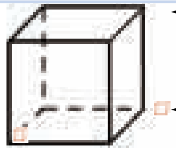
Οι παραπάνω δραστηριότητες μας βοηθούν να διαπιστώσουμε ότι:

Όγκος, χωρητικότητα

Ο χώρος που καταλαμβάνει ένα στερεό σώμα ονομάζεται **όγκος**.
Μονάδα μέτρησης του όγκου είναι το **κυβικό μέτρο (κ.μ.)**. Ένα κ. μ. είναι ένας κύβος με ακμή ίση με ένα μέτρο.
Υποδιαιρέσεις του κ. μ. που χρησιμοποιούμε για μικρότερες μετρήσεις είναι το κυβικό δεκατόμετρο (κ. δεκ.), το κυβικό εκατοστόμετρο (κ. εκ.) και το κυβικό χιλιοστόμετρο
1 κ. μ. = 1.000 κ. δεκ = 1.000.000 κ. εκ. = 1.000.000.000 κ. χιλ.

Χωρητικότητα ενός δοχείου είναι ο όγκος της ποσότητας που μπορεί να χωρέσει το δοχείο.
Η ποσότητα του υγρού ή αερίου που χωράει σε 1 κυβικό δεκατόμετρο ονομάζεται **1 λίτρο**. 1 λίτρο νερό ζυγίζει 1 κιλό.

Παραδείγματα



Για να εκφράσουμε τον όγκο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε φυσικό, δεκαδικό ή συμμιγή αριθμό.

2.570.050 κ.εκ. = 2,57005 κ.μ.
= 2 κ.μ. 570 κ.δεκ. 50 κ.εκ.

Εφαρμογή 1η

Κάνοντας μια ομαδική εργασία για την κατανάλωση νερού τα παιδιά έφεραν πληροφορίες για την τελευταία κατανάλωση της οικογένειάς τους και κατέγραψαν τα στοιχεία σε πίνακες. Παρακάτω φαίνεται η εργασία μιας ομάδας.

Οικογένεια	**Όγκος νερού που καταναλώθηκε το τελευταίο τρίμηνο**		
	Δεκαδικός αριθμός	***Συμμιγής αριθμός***	***Φυσικός αριθμός***
Μογιού	14,752 κ. μ.		
Σφαντού		8 κ. μ. 50 κ. δεκ.	
Κείσαρη			11. 450.900 κ. εκ.
Παπάντου			8.560 κ. δεκ.
Συνολική κατανάλωση οικογενειών της ομάδας			

Να συμπληρώσετε τα κενά στον πίνακα μετατρέποντας τους αριθμούς στις υπόλοιπες μορφές και να βρείτε τα σύνολα.

Εφαρμογή 2η

Το μικρό μπουκάλι με νερό χωράει 0,5 λίτρα. Όταν άδειασε το ζύγισα και διαπίστωσα ότι άδειο ζύγιζε 15 γραμμάρια. Αν το ζύγιζα γεμάτο, πόσο θα ζύγιζε;
Λύση
Αφού το 1 λίτρο νερό ζυγίζει 1 κιλό, τα 0,5 λίτρα ζυγίζουν 0,5 κιλά, δηλαδή 500 γραμμάρια.
Προσθέτω και το βάρος του μπουκαλιού: 500 + 15 = 515 γραμμάρια.
Απάντηση: Θα ζύγιζε 515 γραμμάρια.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **χωρητικότητα, λίτρο, όγκος** και **κυβικό μέτρο** με τις υποδιαιρέσεις του. Να εκφράσεις μια μέτρηση όγκου με διαφορετικούς τρόπους.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
1.000 κ. εκ. νερό είναι 1 λίτρο.	❐	❐
Όλα τα στερεά σώματα έχουν χωρητικότητα.	❐	❐
350 κ. δεκ. = 350.000 κ.εκ.	❐	❐

Κεφάλαιο 70ό

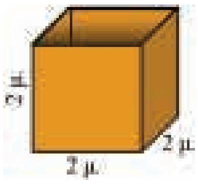
Όγκος κύβου και ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Κύβοι και κιβώτια

Κατανοώ τη διαδικασία υπολογισμού του όγκου κύβου και ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.
Υπολογίζω τον όγκο κύβου και ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με τύπο.
Λύνω προβλήματα με όγκους κύβων και ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων.

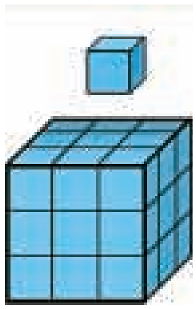
Δραστηριότητα 1η

Γνωρίζεις ότι ως μονάδα μέτρησης του όγκου χρησιμοποιείται ένας κύβος που η ακμή του είναι ένα μέτρο και ονομάζεται κυβικό μέτρο. Για μικρότερες μετρήσεις χρησιμοποιείται το κυβικό δεκατόμετρο ή το κυβικό εκατοστόμετρο.



- Ποιο εργαλείο από τα προηγούμενα θα χρησιμοποιήσεις για να μετρήσεις τον όγκο του κουτιού που φαίνεται δίπλα και με τι τρόπο θα το κάνεις; ....
- Ποιος είναι ο όγκος του; ....
- Είναι πάντοτε εύκολο να βρίσκουμε τον όγκο των σωμάτων χρησιμοποιώντας ένα εργαλείο μέτρησης όπως είναι αυτό που χρησιμοποίησες; ....
- Γιατί; ....

Δραστηριότητα 2η

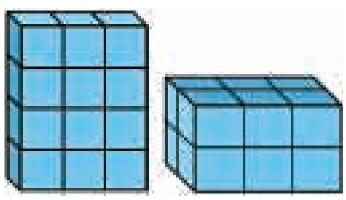


Η κατασκευή που φαίνεται στην εικόνα είναι φτιαγμένη από κύβους με ακμή ίση με 1 εκ. Καθένας είναι ένα κυβικό εκατοστό.

- Ποιος είναι ο όγκος της κατασκευής; ....
- Εξήγησε τη σκέψη σου: ....
  ....
- Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα με στοιχεία για κατασκευές που φτιάχνονται με κυβικά εκατοστά όπως η προηγούμενη.

Μήκος	Πλάτος	Εμβαδό βάσης	Αριθμός στρώσεων	Ύψος	Όγκος
3 εκ.	3 εκ.		3	3 εκ.	
			4		
			5		

- Μελέτησε τώρα τις διπλανές κατασκευές και συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα.



Μήκος	Πλάτος	Εμβαδό βάσης	Αριθμός στρώσεων	Ύψος	Όγκος
.... εκ.	.... εκ.			.... εκ.	
.... εκ.	.... εκ.			.... εκ.	

- Πώς μπορούμε να βρούμε τον όγκο ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, χωρίς να το «χωρίσουμε» σε κυβικά εκατοστά; ....
  ....

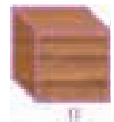
Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι, για να μετρήσουμε τον όγκο ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τις περισσότερες φορές είναι δύσκολο, αν όχι αδύνατο, να χρησιμοποιήσουμε ένα εργαλείο μέτρησης.
Μπορούμε όμως εύκολα να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού αυτού πολλαπλασιάζοντας το μήκος επί το πλάτος του, ώστε να βρούμε το εμβαδό της βάσης και μετά να πολλαπλασιάσουμε αυτό επί το ύψος του.

Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και κύβου

Ο **όγκος** ενός **ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου** είναι ίσος με το γινόμενο του μήκους επί το πλάτος επί το ύψος του.
Αυτό εκφράζεται σύντομα με τον τύπο $\mathbf{O}_{(\text{παραλληλεπιπέδου})} = \mathbf{α \cdot β \cdot γ}$.

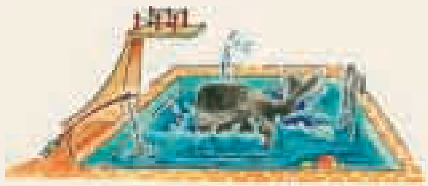
Ο **όγκος** του **κύβου** είναι ίσος με το γινόμενο των ακμών που εκφράζουν το μήκος, το πλάτος και το ύψος του.
Επειδή οι ακμές του κύβου είναι ίσες μεταξύ τους, αυτό εκφράζεται σύντομα με τον τύπο $\mathbf{O}_{(\text{κύβου})} = \mathbf{α \cdot α \cdot α}$ ή $\mathbf{O}_{(\text{κύβου})} = \mathbf{α^3}$.

Παραδείγματα



Εφαρμογή ***Φανταστείτε πόσο μεγάλη πρέπει να είναι η πισίνα για μια φάλαινα!***

Η φάλαινα που πρωταγωνίστησε στην ταινία «Ελευθερώστε το Willy», όσο ήταν μικρή ζούσε σε μια πισίνα στο Μεξικό. Οι διαστάσεις της πισίνας ήταν 28 μέτρα μήκος, 13 μέτρα πλάτος και 6 μέτρα ύψος (ή βάθος καλύτερα).



Μεγάλωσε όμως τόσο που δεν χωρούσε πια στην πισίνα αυτή. Έτσι οι υπεύθυνοι αναγκάστηκαν να τη στείλουν σε μια άλλη πόλη, το Όρεγκον, όπου κατασκευάστηκε μία πισίνα με διαστάσεις 46 μ. μήκος, 23 μ. πλάτος και 8 μ. ύψος.
Εκεί χωράει να κινείται με άνεση και μπορεί κανείς να τη δει να παίζει, αφού η καινούρια πισίνα έχει γυάλινα τμήματα στα πλαϊνά της.
Πόσο μεγαλύτερη είναι η νέα πισίνα της φάλαινας;

Λύση:
Το μέγεθος μιας πισίνας κρίνεται όχι μόνο από τις δύο διαστάσεις της που φαίνονται , αλλά και από το βάθος της, που είναι εξίσου σημαντικό. Χρειάζεται λοιπόν να βρούμε τον όγκο κάθε πισίνας για να τις συγκρίνουμε.
Ο όγκος της πρώτης πισίνας ήταν: $\mathbf{O}_{(\text{παραλληλεπιπέδου})} = \mathbf{α \cdot β \cdot γ}$
.... • .... • .... = ...
Ο όγκος της νέας πισίνας είναι: $\mathbf{O}_{(\text{παραλληλεπιπέδου})} = \mathbf{α \cdot β \cdot γ}$
.... • .... • .... = ...
Τώρα πρέπει να βρούμε τη διαφορά τους: ....
Απάντηση: Η νέα πισίνα είναι .... κ.μ. μεγαλύτερη.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **όγκος παραλληλεπιπέδου** και **όγκος κύβου** Να υπολογίσεις τον όγκο ενός παραλληλεπιπέδου που υπάρχει κοντά σου.

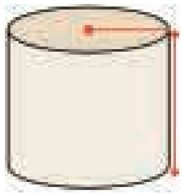
Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Για να βρούμε τον Όγκο$_{(\text{κύβου})}$ αρκεί να γνωρίζουμε το μήκος της ακμής του.	❐	❐
Για να βρούμε τον Όγκο$_{(\text{παραλληλεπιπέδου})}$ πρέπει να γνωρίζουμε και τις 3 διαστάσεις του.	❐	❐
Για να κατασκευάσω ένα μοντέλο κυβικού μέτρου χρειάζομαι 3 ξύλα του 1 μέτρου.	❐	❐

Κεφάλαιο 71ο **Όγκος κυλίνδρου**

Τύπος συντηρητικός!

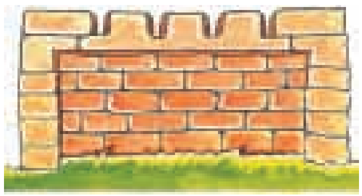
Κατανοώ τη διαδικασία υπολογισμού του όγκου του κυλίνδρου.
Υπολογίζω τον όγκο του κυλίνδρου με τύπο.
Λύνω προβλήματα με όγκους κυλίνδρων.

Δραστηριότητα 1η



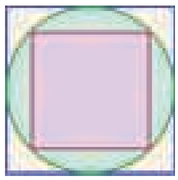
Μία αρχαιολόγος, στην έρευνά της σε αρχαία τείχη, ανακάλυψε ένα κυλινδρικό πυργίσκο που ήταν γεμάτος χώμα. Μέρος της εργασίας των αρχαιολόγων είναι να απομακρύνουν το χώμα και τα άχρηστα υλικά που συσσωρεύονται σε στρώματα στα ερείπια.

- Πιστεύεις ότι η αρχαιολόγος μπορούσε να εκτιμήσει τον όγκο του χώματος προτού τον απομακρύνουν; ....
  ....
- Σε τι μοιάζουν ένα κυλινδρικό στερεό σώμα και ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο;............................
  ....



- Σε τι διαφέρουν; ....
  ....

Δραστηριότητα 2η



Στη διπλανή εικόνα φαίνονται τρία δοχεία. Έχουμε βάλει το ένα μέσα στο άλλο και τα κοιτάζουμε από ψηλά. Το ύψος τους είναι το ίδιο.

- Ποιο από τα δύο παραλληλεπίπεδα δοχεία πιστεύεις ότι έχει μεγαλύτερο όγκο και γιατί; ....
  ....
- Κάνε τώρα μια εκτίμηση και για τον όγκο του κυλινδρικού δοχείου σε σχέση με των δύο παραλληλεπίπεδων δοχείων (πρώτα με το μεγάλο και μετά με το μικρό) και εξήγησε τη σκέψη σου:
  ....
  ....
  ....
- Πώς θα υπολόγιζες τον όγκο των παραλληλεπίπεδων αυτών σωμάτων; ....
  ....

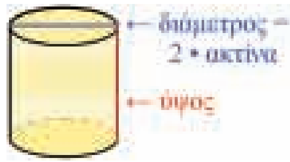
- Σκέψου πώς μπορείς να εφαρμόσεις την ίδια μέθοδο για να υπολογίσεις τον όγκο του κυλίνδρου:
  ....
  ....
  ....
  ....

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι, μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο ενός κυλινδρικού σώματος, όπως και των παραλληλεπίπεδων σωμάτων. Βρίσκουμε πρώτα το εμβαδό της βάσης και μετά το πολλαπλασιάζουμε επί το ύψος του.

Όγκος κυλίνδρου

Ο **όγκος** ενός **κυλίνδρου** είναι ίσος με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του *(δηλαδή του αριθμού* π επί το τετράγωνο της ακτίνας: **Ε(κυκλικού δίσκου)** $= \pi \cdot a^2$*)* επί το ύψος του.
Αυτό εκφράζεται με τον τύπο $O_{(κυλίνδρου)} = \pi \cdot a^2 \cdot u$.

Παραδείγματα



Εφαρμογή 1η ***Από το παραλληλεπίπεδο στον κύλινδρο***

Ο Λευτέρης βγάζει το πρωί το γάλα από το ψυγείο και το αδειάζει στο ποτήρι του, όπως φαίνεται στην εικόνα.
Καταλαβαίνει ότι το γάλα τελειώνει και το αδειάζει όλο. Διαπιστώνει με έκπληξη ότι το γάλα γεμίζει το ποτήρι ακριβώς μέχρι το χείλος. Αναρωτιέται «άραγε το κουτί με το γάλα ήταν γεμάτο;».

Λύση:

Για να κάνουμε τη σύγκριση πρέπει να βρούμε αν τα δύο σώματα (κουτί με γάλα και ποτήρι) έχουν την ίδια χωρητικότητα. Επειδή και τα δύο έχουν πολύ λεπτό τοίχωμα, θα θεωρήσουμε ότι η χωρητικότητά τους είναι ίση με τον όγκο τους.

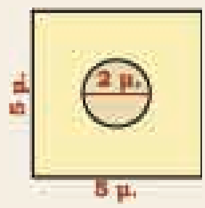
Ο όγκος του κουτιού είναι: $O_{(παραλληλεπιπέδου)} = α \cdot β \cdot γ$

$10 \cdot 7 \cdot 7 =$ ....

Ο όγκος του ποτηριού είναι: $O_{(κυλίνδρου)} = \pi \cdot a^2 \cdot u$ (α = δ/2) $3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 12 =$ ....

Απάντηση: ....

Εφαρμογή 2η



Στο κλιμακοστάσιο ενός κτιρίου με 18 μέτρα ύψος, το ασανσέρ έχει κυλινδρικό σχήμα και γύρω του υπάρχουν σκάλες, όπως φαίνεται στο σχήμα. Πόσος είναι ο όγκος που καταλαμβάνει το φρεάτιο του ασανσέρ και πόσος ο υπόλοιπος όγκος του κλιμακοστασίου;

Λύση:

Βρίσκουμε πρώτα τον όγκο του φρεατίου. $O_{(κυλίνδρου)} = \pi \cdot a^2 \cdot u$ (α = δ/2) ....

Μετά υπολογίζουμε τον όγκο όλου του κλιμακοστασίου (που συμπεριλαμβάνει τις σκάλες και το φρεάτιο του ασανσέρ): $O_{(παραλληλεπιπέδου)} = α \cdot β \cdot γ$..

Τέλος αφαιρούμε τον όγκο του φρεατίου: ....

Απάντηση: Το ασανσέρ καταλαμβάνει .... κ.μ. και οι σκάλες .... κ.μ. του κτιρίου.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **χωρητικότητα, λίτρο, όγκος** και **κυβικό μέτρο** με τις υποδιαιρέσεις του. Να εκφράσεις μια μέτρηση όγκου με διαφορετικούς τρόπους.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Για να βρούμε τον **Όγκο(κυλίνδρου)** *πολλαπλασιάζουμε την περίμετρο της βάσης επί το ύψος.*	❐	❐
Για να βρούμε τον **Όγκο(κυλίνδρου)** *αρκεί να γνωρίζουμε την ακτίνα και το ύψος του.*	❐	❐

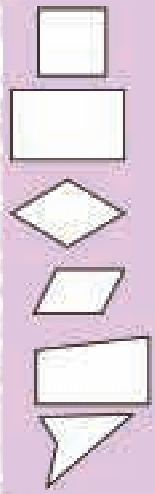
Γεωμετρία

Σχημα...τίζω άποψη

ΠΟΛΥΓΩΝΑ

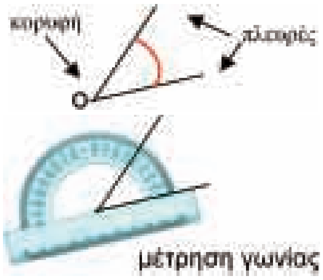
- τρίγωνο
- τετράπλευρο
- πεντάγωνο
- κανονικό πεντάγωνο
- εξάγωνο
- οκτάγωνο

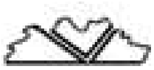
ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ



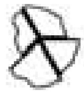
- τετράγωνο
- ορθογώνιο παραλληλόγραμμο
- ρόμβος
- παραλληλόγραμμο
- τραπέζιο
- τετράπλευρο

ΓΩΝΙΕΣ





άθροισμα γωνιών τριγώνου



άθροισμα γωνιών τετράπλευρου

ΕΜΒΑΔΟ

τετραγώνου $E = α^2$

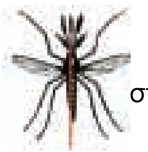
παραλληλογράμμου $E = β \cdot υ$

τριγώνου $E = (β \cdot υ) / 2$

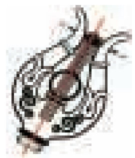
τραπεζίου $E = (β + B) \cdot υ / 2$

κυκλικού δίσκου $E = π \cdot α^2$

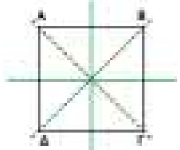
ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΜΕΓΕΘΥΝΣΗ-ΣΜΙΚΡΥΝΣΗ



στη φύση

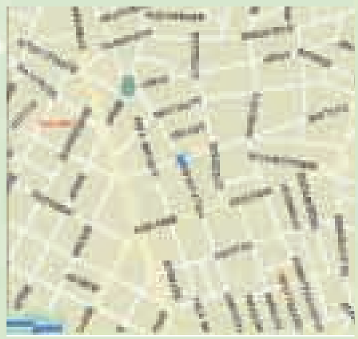


στις ανθρώπινες κατασκευές



στα σχήματα

ΚΛΙΜΑΚΑ

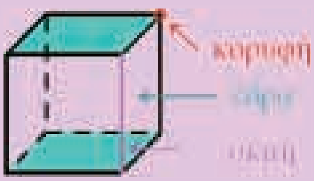


Κλίμακα είναι ο λόγος:

$$\frac{\text{απόσταση στο σχέδιο}}{\text{απόσταση στην πραγματικότητα}}$$

Για τη μεγέθυνση ή τη σμίκρυνση ενός σχήματος τηρούμε αναλογία με την κλίμακα

ΚΥΒΟΣ

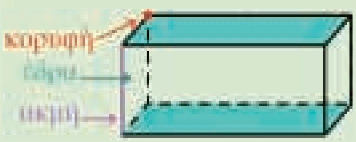


6 έδρες, 12 ακμές, 8 κορυφές

Όγκος $_{κύβου}$ (με ακμή α) = **$α^3$**

(Η **χωρητικότητα** του κ. δεκ. είναι 1 λίτρο.)

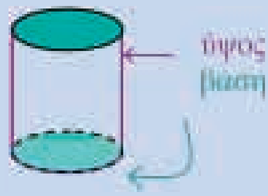
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ



6 έδρες, 12 ακμές, 8 κορυφές

Όγκος $_{ορθογωνίου\ παραλληλεπιπέδου}$ (με διαστάσεις μήκος α, πλάτος β, ύψος γ) = **$α \cdot β \cdot γ$**

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ



Όγκος κυλίνδρου (με ύψος υ και ακτίνα βάσης α) = **$π \cdot α^2 \cdot υ$**

1ο Πρόβλημα

Να υπολογίσεις (χωρίς να χρησιμοποιήσεις το μοιρογνωμόνιο) το μέγεθος των γωνιών χ και ψ στο σχήμα.

Λύση

Απάντηση: ....

2ο Πρόβλημα

Σχεδιάστε με την ομάδα σου ένα κιβώτιο για να γίνεται η διακίνηση των δημητριακών από το εργοστάσιο και εξηγήστε πόσα πακέτα δημητριακών θα χωράει.

Λύση

Απάντηση: ....

3ο Πρόβλημα

Εξήγησε ποιες μαθηματικές έννοιες είναι απαραίτητες στην κατασκευή ενός σπιτιού. και σε ποια φάση της κατασκευής είναι απαραίτητη η καθεμιά.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Αλφαβητικό ευρετήριο όρων και ονομάτων

Πίνακας Φωτογραφικών απεικονίσεων