ΕΞΩΦΥΛΛΟ

4-1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην προσπάθειά μας να απλοποιήσουμε τη μελέτη της κίνησης των σωμάτων, αντιμετωπίσαμε ως τώρα τα σώματα ως **υλικά σημεία**. Το υλικό σημείο ορίζεται ως σώμα που έχει όλες τις άλλες ιδιότητες της ύλης εκτός από διαστάσεις. Ένα υλικό σημείο, μη έχοντας διαστάσεις, έχει τη δυνατότητα να εκτελεί μόνο μεταφορικές κινήσεις.

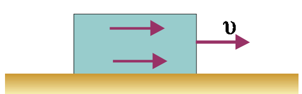
Στην πραγματικότητα όλα τα σώματα έχουν διαστάσεις και γι' αυτό, εκτός από το να εκτελούν μεταφορική κίνηση, μπορούν να αλλάζουν προσανατολισμό στο χώρο, να εκτελούν δηλαδή περιστροφική (στροφική) ή, ακόμη, σύνθετη κίνηση, δηλαδή συνδυασμό μεταφορικής και στροφικής κίνησης.

Αν σε κάποιο στερεό σώμα ασκηθούν δυνάμεις το σώμα παραμορφώνεται, λίγο ή πολύ και μόνιμα ή προσωρινά. Τα υποθετικά στερεά που δεν παραμορφώνονται όταν τους ασκούνται δυνάμεις λέγονται **μηχανικά στερεά**.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη μελέτη της ισορροπίας και της κίνησης μηχανικών στερεών. Όπου αναφερόμαστε σε στερεό θα εννοούμε μηχανικό στερεό.

4-2 ΟΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

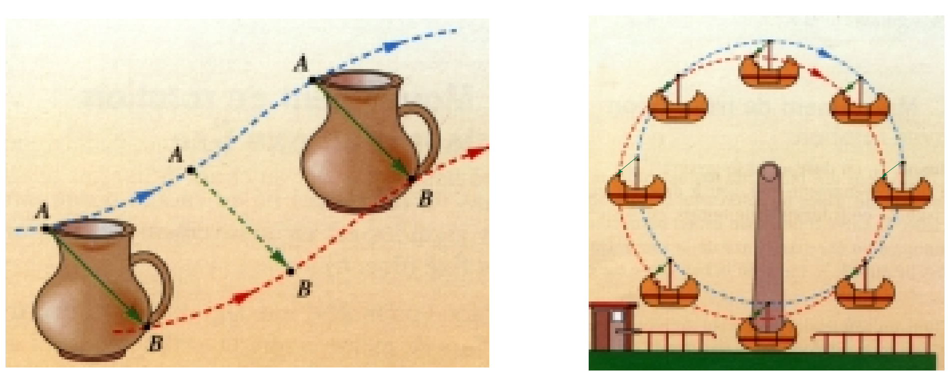
Ένα στερεό σώμα μπορεί να κάνει μεταφορική, στροφική και σύνθετη κίνηση.



Σχ. 4.1 Το κιβώτιο εκτελεί μεταφορική κίνηση. Όλα του τα σημεία έχουν την ίδια ταχύτητα.

Στη μεταφορική κίνηση κάθε στιγμή όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα. Παράδειγμα τέτοιας κίνησης είναι η κίνηση ενός κιβωτίου που ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Στη μεταφορική κίνηση των στερεών ισχύουν οι νόμοι που διέπουν την κίνηση των υλικών σημείων.

Μεταφορική μπορεί να είναι και μια καμπυλόγραμμη κίνηση. Το σώμα του σχήματος 4.2α κάνει μεταφορική κίνηση αν η ταχύτητα του σημείου Α είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου Β. Αυτό είναι δυνατό. Όταν ένα στερεό κάνει μεταφορική κίνηση, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία του μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του. Μεταφορική είναι και η κίνηση που εκτελούν οι θαλαμίσκοι στον τροχό του λούνα πάρκ (σχ.4.2β).



(α) (β)

Σχ. 4.2 (α) Η τροχιά κάθε σημείου είναι καμπύλη. Η κίνηση του σώματος είναι μεταφορική αφού το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ παραμένει διαρκώς παράλληλο προς τον εαυτό του. (β) Ο τροχός του λούνα πάρκ κάνει στροφική κίνηση. Ωστόσο κάθε θαλαμίσκος κάνει μεταφορική κίνηση.

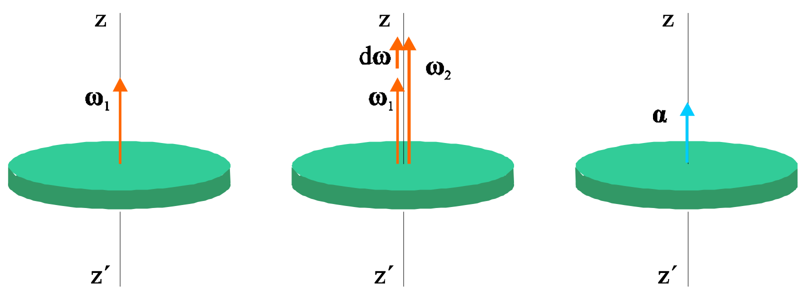
Στη στροφική κίνηση το σώμα αλλάζει προσανατολισμό. Στη στροφική κίνηση υπάρχει μια ευθεία – **ο άξονας περιστροφής** - που όλα της τα σημεία παραμένουν ακίνητα ενώ τα υπόλοιπα σημεία του σώματος κάνουν κυκλική κίνηση.

Κατάλληλο μέγεθος για να περιγράψει το πόσο γρήγορα περιστρέφεται ένα σώμα κάποια στιγμή, είναι η **γωνιακή ταχύτητα ω**. Η γωνιακή ταχύτητα είναι διάνυσμα πάνω στον άξονα περιστροφής.

Στο σώμα που στρέφεται, κάθε σημείο κινείται με γωνιακή ταχύτητα ω και γραμμική ταχύτητα που υπολογίζεται από τη σχέση $\upsilon = \omega r$, όπου r η απόσταση του από τον άξονα περιστροφής.

Αν η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που περιστρέφεται είναι σταθερή θα λέμε ότι κάνει **ομαλή στροφική κίνηση**.

Ας υποθέσουμε ότι ο δίσκος του σχήματος 4.3 τη χρονική στιγμή t_1 έχει γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}_1$ ενώ τη χρονική στιγμή $t_2=t_1+dt$ η γωνιακή του ταχύτητα γίνεται $\boldsymbol{\omega}_2=\boldsymbol{\omega}_1+d\boldsymbol{\omega}$



Σχ. 4.3 (α) Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου αυξάνεται κατά d**ω** . Ο δίσκος έχει γωνιακή επιτάχυνση **α**.

Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του σώματος τη στιγμή t, ονομάζεται γωνιακή επιτάχυνση του σώματος.

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση έχει την κατεύθυνση του διανύσματος dω και μονάδα 1 rad/s^2.

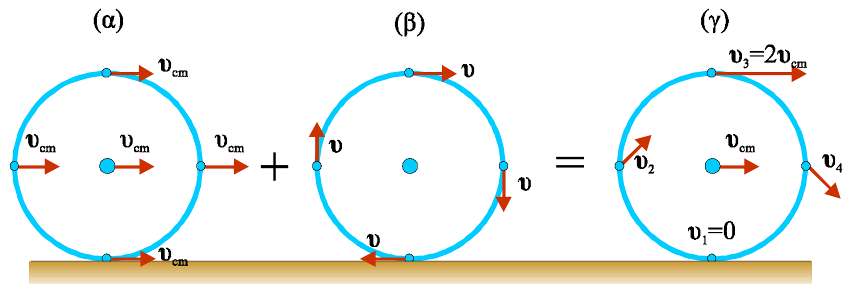
<u>Προσοχή</u> : τη γωνιακή επιτάχυνση τη συμβολίζουμε με το ελληνικό α ενώ την επιτάχυνση που αντιστοιχεί στη μεταφορική κίνηση του σώματος (γραμμική επιτάχυνση) με το λατινικό a .

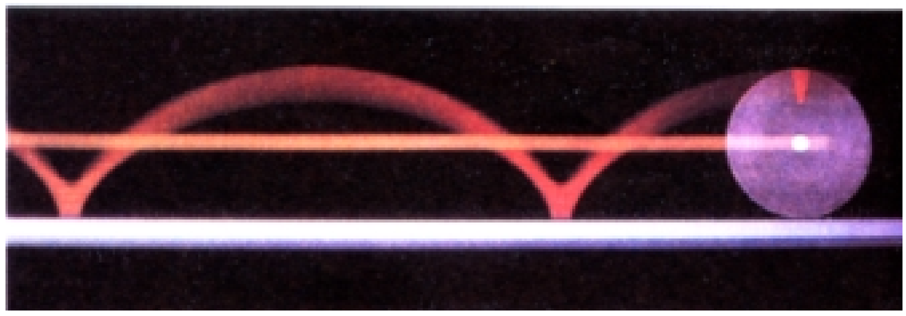
Όταν ένα σώμα μετακινείται στο χώρο και ταυτόχρονα αλλάζει ο προσανατολισμός του λέμε ότι κάνει σύνθετη κίνηση. Τέτοια κίνηση κάνει π.χ. ο τροχός ενός αυτοκινήτου, όταν κινείται το αυτοκίνητο. Όπως συμβαίνει και με το υπόλοιπο αυτοκίνητο, ο τροχός αλλάζει θέση στο χώρο (μεταφορική κίνηση) και ταυτόχρονα περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του. Σύνθετη κίνηση είναι και η κίνηση που κάνει μια ρακέτα αν κρατώντας τη από τη λαβή την πετάξουμε ψηλά. **Η σύνθετη κίνηση μπορεί να μελετηθεί ως το αποτέλεσμα της επαλληλίας μιας μεταφορικής και μιας περιστροφικής κίνησης**.

Το σχήμα 4.4 δείχνει ένα τροχό που κυλίεται. Η κίνησή του μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της επαλληλίας μιας μεταφορικής κίνησης, στην οποία όλα τα σημεία του τροχού, κάθε στιγμή, έχουν την ίδια ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}_{cm}$ (σχ. 4.4α) και μιας περιστροφικής κίνησης, γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο του τροχού και είναι κάθετος σ΄ αυτόν (σχ. 4.4β). Στην περιστροφική κίνηση όλα τα σημεία του τροχού που απέχουν το ίδιο από τον άξονα περιστροφής έχουν ταχύτητες με το ίδιο μέτρο υ, εφαπτόμενες στην κυκλική τους τροχιά. Η ταχύτητα κάθε σημείου του τροχού είναι η συνισταμένη της ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon}_{cm}$ λόγω μεταφορικής κίνησης και της $\boldsymbol{\upsilon}$ λόγω της περιστροφικής (σχ. 4.4γ).

Σχ. 4.4 Η κύλιση του τροχού (γ) είναι επαλληλία της μεταφορικής κίνησης (α) και της στροφικής κίνησης (β). Η ταχύτητα κάθε σημείου του τροχού είναι η συνισταμένη της ταχύτητας που έχει λόγω μεταφορικής κίνησης ($\boldsymbol{\upsilon}_{cm}$) και της ταχύτητας λόγω περιστροφής ($\boldsymbol{\upsilon}$).

.





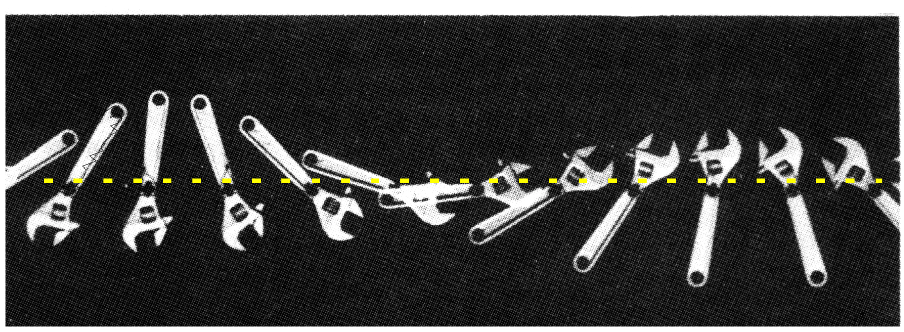
Εικ. 4.1 Η τροχιά ενός μικρού λαμπτήρα που τοποθετήθηκε στην περιφέρεια κυλιόμενου τροχού. Το κέντρο του τροχού κινείται ευθύγραμμα.

.

Το κέντρο μάζας.

Μια έννοια που απλοποιεί τη μελέτη του στερεού σώματος είναι η έννοια του **κέντρου μάζας** του σώματος.

Στην εικόνα 4.2 φαίνεται η κίνηση ενός κλειδιού πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο μετά από μία ώθηση που δέχτηκε. Η συνολική δύναμη που ασκείται στο κλειδί είναι μηδέν. Αν το κλειδί ήταν υλικό σημείο θα έκανε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Παρατηρήστε ότι υπάρχει ένα σημείο του που κάνει ακριβώς τέτοια κίνηση. Το σημείο αυτό είναι το κέντρο μάζας του κλειδιού.



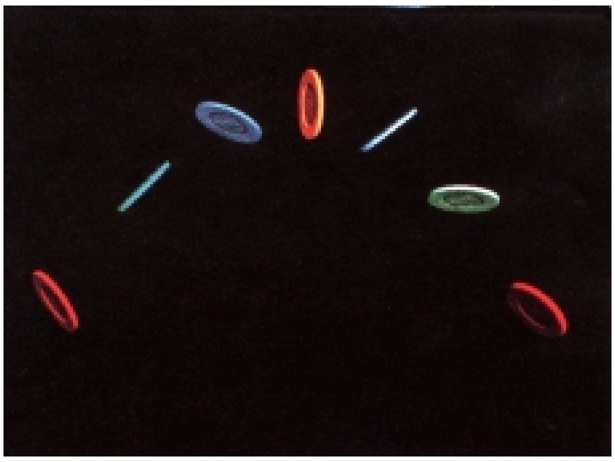
Εικ. 4.2 Το κλειδί της φωτογραφίας κάνει σύνθετη κίνηση. Το κέντρο μάζας του όμως κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

.

Κέντρο μάζας (cm) ενός στερεού σώματος ονομάζεται το σημείο εκείνο του σώματος που κινείται όπως ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με τη μάζα του σώματος, αν σε αυτό ασκούνταν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

Το κέντρο μάζας ομογενών και συμμετρικών σωμάτων συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας τους. Π.χ. το κέντρο μάζας ενός κύβου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, το κέντρο μάζας μιας σφαίρας είναι το κέντρο της σφαίρας.

Το κέντρο μάζας ενός σώματος μπορεί να βρίσκεται και έξω από το σώμα. Τέτοια είναι η περίπτωση ισοπαχούς ομογενούς δακτυλίου, το κέντρο μάζας του οποίου βρίσκεται στο κέντρο του. Αν ένα σώμα βρίσκεται μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας το κέντρο μάζας του συμπίπτει με το κέντρο βάρους, το σημείο δηλαδή από το οποίο περνάει πάντα το βάρος του σώματος, όπως και να τοποθετηθεί.



Εικ. 4.3 Το κέντρο μάζας του δίσκου κινείται όπως ένα υλικό σημείο που βάλλεται πλάγια.

.

Η κύλιση του τροχού

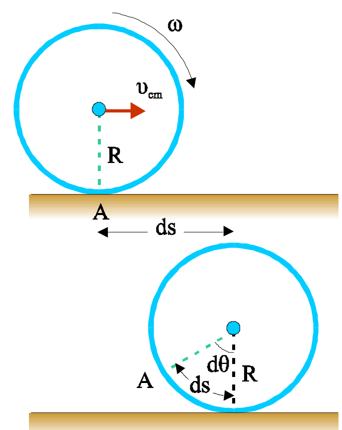
Ας επανέλθουμε στην κύλιση του τροχού (σχ. 4.5). Κατά την κύλιση κάθε σημείο του τροχού έρχεται διαδοχικά σε επαφή με το δρόμο. Έτσι, όταν ο τροχός σε χρόνο dt μετακινηθεί κατά ds, ένα σημείο Α της περιφέρειας του θα έχει στραφεί κατά τόξο μήκους ds, στο οποίο αντιστοιχεί η επίκεντρη γωνία $d\theta$. Η ταχύτητα υ_{cm} του κέντρου μάζας του τροχού είναι

$$\upsilon_{cm} = \frac{ds}{dt} \qquad (4.1)$$

όμως $d\theta = \dfrac{ds}{R}$ ή $ds = R\,d\theta$

αντικαθιστώντας στην (4.1) έχουμε $\upsilon_{cm} = R\dfrac{d\theta}{dt}$ και, επειδή $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$, τελικά παίρνουμε

$$\boxed{\upsilon_{cm} = \omega R}$$



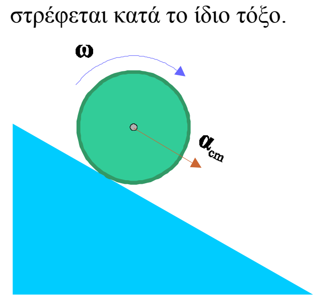
Σχ. 4.5 Όταν το κέντρο μάζας του τροχού μετακινηθεί κατά ds, κάθε σημείο στην περιφέρεια του στρέφεται κατά το ίδιο τόξο.

Έστω ένας τροχός που κυλίεται πάνω σε πλάγιο επίπεδο (σχ. 4.6). Η γωνιακή ταχύτητα του τροχού αυξάνεται, δηλαδή έχει γωνιακή επιτάχυνση. Το κέντρο μάζας του τροχού εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Αν η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού κάποια στιγμή είναι υ_{cm}, θα ισχύει

$\upsilon_{cm} = \omega R$ οπότε $\dfrac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt}R$ και τελικά

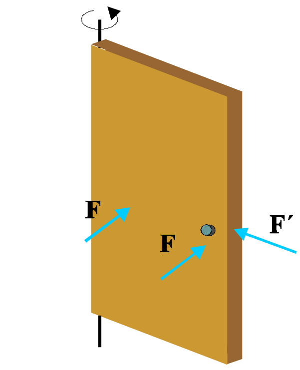
$$\boxed{a_{cm} = \alpha R}$$

όπου a_{cm} η επιτάχυνση του κέντρου μάζας και α η γωνιακή επιτάχυνση περιστροφής του τροχού.



Σχ. 4.6 Στον τροχό που κυλάει: $a_{cm} = \alpha R$

4-3 ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ



Σχ. 4.7 Η ίδια δύναμη περιστρέφει την πόρτα πιο εύκολα όταν ασκείται μακριά από τον άξονα περιστροφής. Η **F**´ που ο φορέας της διέρχεται από τον άξονα δε μπορεί να περιστρέψει το σώμα.

Αν ασκήσουμε μια δύναμη σε ένα σώμα που έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα το σώμα περιστρέφεται εκτός αν ο φορέας της δύναμης περνάει από τον άξονα περιστροφής. Από την εμπειρία μας γνωρίζουμε ότι η περιστροφή που προκαλεί μια δύναμη εξαρτάται όχι μόνο από την κατεύθυνση και το μέγεθος της δύναμης αλλά και από το σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη. Για να κλείσουμε μια πόρτα τη σπρώχνουμε κοντά στο πόμολο και όχι κοντά στον άξονα περιστροφής της (μεντεσέδες), γιατί ακόμα και μικρή δύναμη μπορεί να προκαλέσει στροφή της πόρτας όταν εφαρμόζεται μακριά από τον άξονα περιστροφής.

Το μέγεθος το οποίο περιγράφει την ικανότητα μιας δύναμης να στρέφει ένα σώμα ονομάζεται **ροπή της δύναμης** και συμβολίζεται με το ελληνικό **τ**.

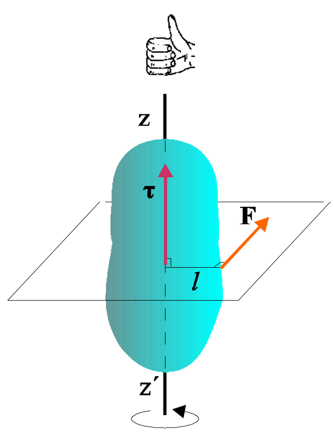
A) Ροπή δύναμης ως προς άξονα

Έστω ένα σώμα που έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από τον άξονα z´z . Στο σώμα ασκείται δύναμη **F** που βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής.

Ροπή της δύναμης F, ως προς τον άξονα περιστροφής ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την κάθετη απόσταση l της δύναμης από τον άξονα περιστροφής (μοχλοβραχίονας).

$$\tau = Fl$$

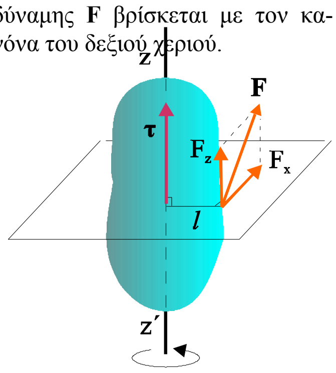
Η ροπή έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.
Μονάδα ροπής είναι το 1 N m.



Σχ. 4.8 Η φορά της ροπής της δύναμης **F** βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Για να προσδιορίσουμε τη φορά της ροπής κλείνουμε τα δάχτυλα του δεξιού χεριού και τα τοποθετούμε έτσι ώστε να δείχνουν τη φορά κατά την οποία τείνει να περιστρέψει το σώμα η δύναμη. Ο αντίχειρας τότε δίνει τη φορά του διανύσματος της ροπής.

Αν η δύναμη **F** δε βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής, η ροπή της είναι ίση με τη ροπή που δημιουργεί η συνιστώσα της που βρίσκεται πάνω στο κάθετο επίπεδο (σχ. 4.9)



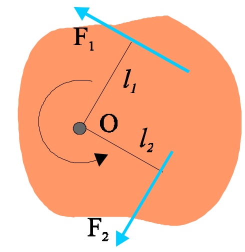
Σχ. 4.9 Η ροπή της δύναμης **F** έχει μέτρο $F_x\, l$

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μόνο περιπτώσεις στις οποίες όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Σε τέτοια προβλήματα, για να περιγράψουμε την τάση μιας δύναμης να περιστρέψει ένα σώμα προς τη μια ή την άλλη φορά, χρησιμοποιούμε την αλγεβρική τιμή της ροπής. Κατά σύμβαση θεωρούμε θετική τη ροπή της δύναμης που τείνει να περιστρέψει το σώμα αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού και αρνητική τη ροπή της δύναμης που τείνει να το περιστρέψει κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Στο σώμα του σχήματος 4.10 δρουν οι δυνάμεις $\mathbf{F}_1$ και $\mathbf{F}_2$. Το σώμα έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας. Η συνολική ροπή που δέχεται το σώμα είναι

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 l_1 - F_2 l_2$$



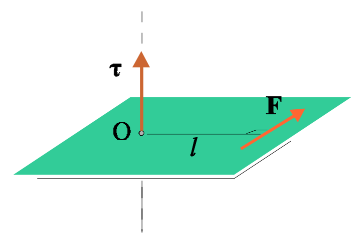
Σχ. 4.10 Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις $\mathbf{F}_1$ και $\mathbf{F}_2$. Η φορά περιστροφής του σώματος καθορίζεται από το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών.

B) Ροπή δύναμης ως προς σημείο

Αν σ' ένα ελεύθερο σώμα ασκηθεί δύναμη που ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα δεν περιστρέφεται (θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση). Αν όμως ο φορέας της δύναμης δε διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα μαζί με τη μεταφορική κίνηση θα εκτελέσει και περιστροφική γύρω από ένα νοητό άξονα (ελεύθερος άξονας) που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη και το κέντρο μάζας του σώματος.

Μπορείτε να διαπιστώσετε τα παραπάνω με ένα μολύβι που βρίσκεται πάνω σε ένα τραπέζι. Ωθώντας το μολύβι στο κέντρο μάζας του, το μολύβι κάνει μόνο μεταφορική κίνηση. Αν όμως ασκήσετε δύναμη στη μια του άκρη (ο φορέας της δεν πρέπει να διέρχεται από το κέντρο μάζας του) τότε το μολύβι στρέφεται γύρω από έναν νοητό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και ταυτόχρονα μετακινείται. Η μεταφορική κίνηση μπορεί να μην είναι εμφανής αν η τριβή ανάμεσα στο μολύβι και το τραπέζι είναι σημαντική .

Στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει σταθερός άξονας περιστροφής χρησιμοποιείται η έννοια της ροπής της δύναμης ως προς σημείο.



Σχ. 4.11 Προσδιορισμός της φοράς της ροπής δύναμης ως προς σημείο με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Ροπή δύναμης F ως προς σημείο Ο ονομάζουμε το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την απόσταση της από το σημείο Ο

$$\tau = Fl$$

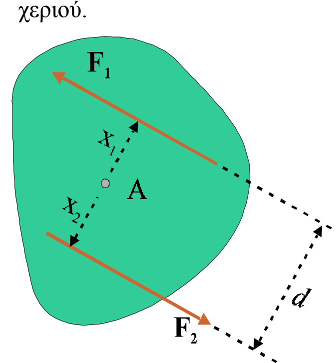
διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη και το σημείο Ο και φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Αξιοσημείωτη είναι η περίπτωση που σε ένα σώμα δρουν δύο αντίρροπες δυνάμεις $\mathbf{F}_1$ και $\mathbf{F}_2$ με ίσα μέτρα. Δυο τέτοιες δυνάμεις αποτελούν **ζεύγος δυνάμεων**. Αν η απόσταση των φορέων των δυο δυνάμεων είναι *d, η* αλγεβρική τιμή της ροπής του ζεύγους ως προς κάποιο σημείο Α (σχ. 4.12) που απέχει απόσταση x_1 από τη δύναμη $\mathbf{F}_1$ και x_2 από την $\mathbf{F}_2$, είναι

$$\tau = F_1 x_1 + F_2 x_2 = F_1(x_1 + x_2) = F_1 d$$

επομένως

$$\tau = F_1\, d$$

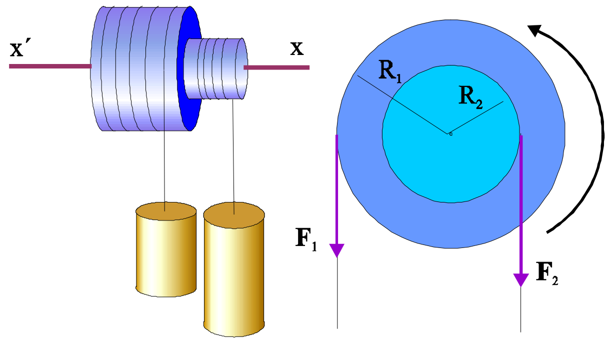


Σχ 4.12 Οι δυνάμεις $\mathbf{F}_1$ και $\mathbf{F}_2$ αποτελούν ζεύγος. Η ροπή τους είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους.

Το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε και ως προς οποιοδήποτε άλλο σημείο. Επομένως**, η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1

Το στερεό του σχήματος 4.13 αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους, με ακτίνες R_1=4 cm και R_2=3 cm, που στέφονται γύρω από σταθερό άξονα $x΄x$. Ο άξονας $x΄x$ συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας των κυλίνδρων. Εξ αιτίας των βαρών που κρέμονται από τους δύο κυλίνδρους, τα σκοινιά ασκούν στους κυλίνδρους δυνάμεις F_1=6 N και F_2=10 N. Να υπολογίσετε την ολική ροπή που δέχεται το στερεό.



Σχ. 4.13

Απάντηση:

Η δύναμη $\mathbf{F}_1$ τείνει να στρέψει το στερεό κατά τη θετική φορά και δημιουργεί θετική ροπή $\tau_1 = F_1R_1$.
Η δύναμη $\mathbf{F}_2$ τείνει να το στρέψει κατά την αρνητική φορά και δημιουργεί ροπή $\tau_2 = -F_2R_2$.

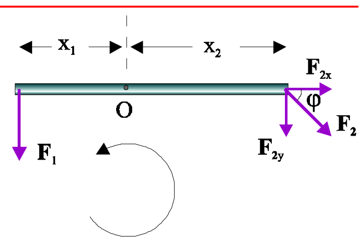
Η συνολική ροπή που δέχεται το στερεό είναι

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1R_1 - F_2R_2 = -0{,}06\ N \cdot m$$

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι το στερεό θα στραφεί όπως στρέφονται οι δείκτες του ρολογιού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2

Η ράβδος του σχήματος 4.14 μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι κάθετος σε αυτή. Το Ο απέχει από τα άκρα της ράβδου x_1=5 cm και x_2=8 cm. Στα άκρα της ράβδου ασκούνται οι δυνάμεις F_1=50 N και F_2=40 N. Η δύναμη F_2 σχηματίζει γωνία φ= 30^o με τη ράβδο. Πόση είναι η ολική ροπή που δέχεται η ράβδος;



Σχ. 4.14

Απάντηση :

Η ροπή της $\mathbf{F}_1$ είναι θετική γιατί η δύναμη τείνει να στρέψει τη ράβδο κατά τη θετική φορά. Είναι

$$\tau_1 = F_1x_1 = 2{,}5Nm$$

Για να υπολογίσουμε τη ροπή της $\mathbf{F}_2$ την αναλύουμε στις συνιστώσες $\mathbf{F}_{2x}$ και $\mathbf{F}_{2y}$ με μέτρα $F_{2x}=F_2\ \sigma\upsilon\nu 30^o$ και $F_{2y}=F_2\ \eta\mu 30^o$. Η ροπή της $\mathbf{F}_{2x}$ είναι μηδέν διότι ο φορέας της διέρχεται από τον άξονα (η απόσταση της $\mathbf{F}_{2x}$ από τον άξονα είναι μηδέν), ενώ η ροπή της $\mathbf{F}_{2y}$ είναι αρνητική και ίση με

$$\tau_2 = -F_2\ \eta\mu 30\ \ x_2 = -1{,}6Nm\,.$$

Η συνολική ροπή που δέχεται η ράβδος είναι

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = 0{,}9Nm$$

Η συνολική ροπή είναι θετική, επομένως η ράβδος θα στραφεί αντίθετα με τη φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

4-4 ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Ας δούμε με ποιες προϋποθέσεις ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο στερεό στο οποίο ασκούνται δυνάμεις.

Αν το στερεό έχει σταθερό άξονα μπορεί να κάνει μόνο στροφική κίνηση. Επομένως, για να ισορροπεί, αρκεί η συνισταμένη των ροπών ως προς τον άξονα να είναι μηδέν.

Ένα ελεύθερο στερεό, όμως, μπορεί να εκτελέσει και μεταφορική και στροφική κίνηση. Αν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι μηδέν το σώμα δε θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση. Αυτό όμως δεν εξασφαλίζει ότι δε θα στραφεί. Αν υπάρχουν ροπές το σώμα θα στραφεί. Όταν η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν, αν υπάρχουν ροπές, αυτές θα οφείλονται σε ζεύγη δυνάμεων. Η ροπή ζεύγους, όμως, είναι ίδια ως προς όλα τα σημεία. Επομένως, για να μη στραφεί το σώμα θα πρέπει η συνισταμένη ροπή να είναι μηδέν ως προς ένα οποιοδήποτε σημείο (τότε θα είναι μηδέν και ως προς κάθε άλλο).

Επομένως **για να ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις θα πρέπει πρώτον η συνισταμένη δύναμη να είναι μηδέν**

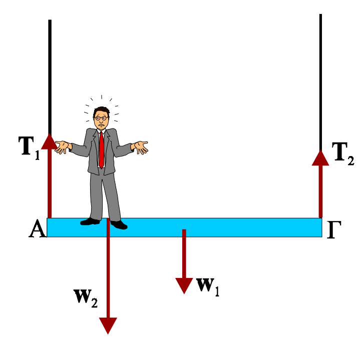
$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \text{ή} \quad \begin{matrix} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{matrix}$$

και δεύτερον το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο να είναι μηδέν

$$\Sigma \tau = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3

Ομογενής οριζόντια δοκός ΑΓ που έχει μήκος l= 4m και βάρος w_1=200N, κρέμεται από δύο κατακόρυφα σκοινιά που είναι δεμένα στα άκρα της και ισορροπεί. Πάνω στη δοκό και σε απόσταση x= 1m από το άκρο της στέκεται άνθρωπος βάρους w_2=600 N. Ποια είναι τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούν τα σκοινιά στη δοκό;



Σχ. 4.15

Απάντηση :
Οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό είναι το βάρος της ($\mathbf{w}_1$), η δύναμη που δέχεται από τον άνθρωπο - είναι ίση με το βάρος του $\mathbf{w}_2$ - και οι δυνάμεις $\mathbf{T}_1$ και $\mathbf{T}_2$ από τα σκοινιά.

Εφόσον η ράβδος ισορροπεί η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν

$$\Sigma \mathbf{F}=0 \quad \text{επομένως} \quad T_1+T_2-w_1-w_2=0 \qquad (4.2)$$

και το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων, ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι επίσης μηδέν. Οι υπολογισμοί μας απλουστεύονται αν οι ροπές αναφέρονται σε σημείο από το οποίο περνάει μία από τις άγνωστες δυνάμεις. Επιλέγουμε το σημείο Α.

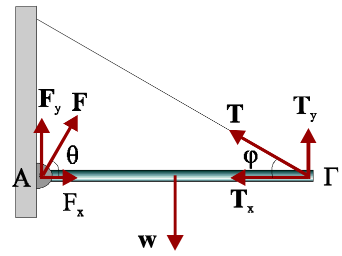
$$\Sigma \tau_{\mathrm{A}} = 0, \quad \text{άρα} \quad T_2 l - w_1 \frac{l}{2} - w_2 x = 0 \quad ,$$

από όπου προκύπτει ότι $$T_2 = \frac{w_1 l + 2 w_2 x}{2l} = 250N$$

Αντικαθιστώντας στην (4.2) βρίσκουμε $T_1 = 550N$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4

Ομογενής δοκός ΑΓ, μήκους l και βάρους w=400 N, ισορροπεί οριζόντια. Το άκρο Α της δοκού στηρίζεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο της Γ συνδέεται με τον τοίχο με σκοινί που σχηματίζει γωνία φ=30^o με τη δοκό. Να βρείτε τις δυνάμεις που δέχεται η δοκός από το σκοινί και από την άρθρωση.



Σχ. 4.16

Απάντηση :

Αναλύουμε όλες τις δυνάμεις σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη διεύθυνση.

$$T_x = T\,\sigma\upsilon\nu 30 \quad \text{και} \quad T_y = T\,\eta\mu 30$$

Εφόσον η ράβδος ισορροπεί

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{ή} \quad T\,\sigma\upsilon\nu 30 = F_x \tag{4.3}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad T\,\eta\mu 30 + F_y = w \tag{4.4}$$

Επίσης $\Sigma\tau = 0$ ως προς οποιοδήποτε σημείο

Υπολογίζουμε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς το σημείο Α

$$T\,\eta\mu 30\, l - w\frac{l}{2} = 0 \tag{4.5}$$

Οι δυνάμεις F_x F_y και T_x έχουν μηδενικές ροπές ως προς το σημείο Α.

Από τη σχέση (4.5) προκύπτει

$$2T\,\eta\mu 30 = w \quad \text{επομένως} \quad T = 400N \tag{4.6}$$

Από την (4.3) λαμβάνοντας υπόψη την (4.6) έχουμε

$$F_x = 200\sqrt{3}N$$

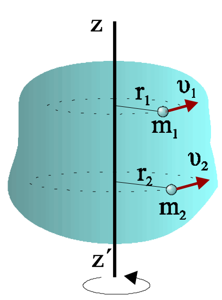
και από την (4.4) $\quad F_y = 200N$

Επομένως η δύναμη **F** έχει μέτρο $\quad F = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2} = 400N$

και σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ

για την οποία $\quad \varepsilon\varphi\theta = \dfrac{F_y}{F_x} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad$ άρα $\quad \theta = 30^o$

4-5 ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ



Σχ. 4.17 Το στερεό μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από στοιχειώδη τμήματα.

Έστω ένα στερεό το οποίο στρέφεται γύρω από το σταθερό άξονα zz΄ (σχ.4.17). Χωρίζουμε το σώμα σε στοιχειώδη τμήματα με μάζες m_1, m_2 …. , τόσο μικρά ώστε καθένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο. Οι μάζες m_1, m_2… κινούνται κυκλικά γύρω από τον άξονα, σε κύκλους ακτίνων r_1, r_2 …

Ονομάζουμε ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς κάποιο άξονα το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το σώμα επί τα τετράγωνα των αποστάσεων τους από τον άξονα περιστροφής.

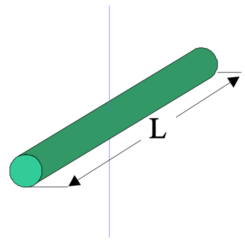
$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ...$$

Η ροπή αδράνειας είναι μονόμετρο μέγεθος και έχει μονάδα το 1 kg m^2.

Ο υπολογισμός της ροπής αδράνειας ενός σώματος συνήθως δεν είναι εύκολος.

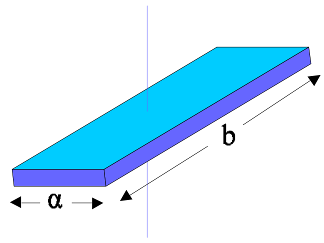
Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι ροπές αδράνειας κάποιων σωμάτων ως προς έναν από τους άπειρους άξονες που διέρχονται από το κέντρο μάζας τους. Ο συγκεκριμένος άξονας για κάθε σώμα εικονίζεται στο σχήμα.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΤΙΣ ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ



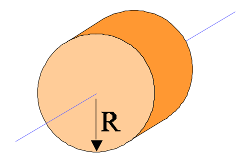
(α) Λεπτή ράβδος

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$



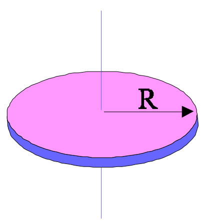
(β) Ορθογώνια πλάκα

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



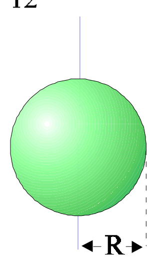
(γ) Συμπαγής κύλινδρος

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



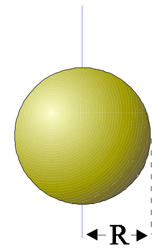
(δ) Δίσκος

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



(ε) Σφαιρικος φλοιός

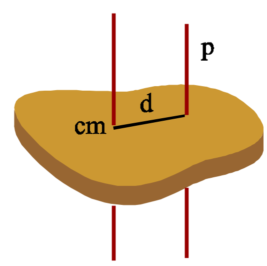
$$I = \frac{2}{3} MR^2$$



(στ) Συμπαγής σφαίρα

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

Μεταξύ της ροπής αδράνειας I_{cm} ενός σώματος ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και της ροπής αδράνειας I_p ως προς οποιοδήποτε άλλο άξονα p, παράλληλο με τον πρώτο σε απόσταση d από αυτόν, υπάρχει μια απλή σχέση, γνωστή ως το **θεώρημα παραλλήλων αξόνων** ή **θεώρημα Steiner** (Στάινερ).



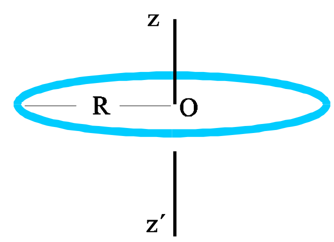
Σχ. **4.18** Το θεώρημα παραλλήλων αξόνων δίνει τη ροπή αδράνειας ως προς τυχαίο άξονα που απέχει απόσταση d από το κέντρο μάζας

Αν I_{cm} η ροπή αδράνειας ενός σώματος μάζας M, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, η ροπή αδράνειάς του ως προς ένα άξονα που είναι παράλληλος και απέχει απόσταση d από τον πρώτο είναι ίση με το άθροισμα της ροπής αδράνειας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και του γινομένου της μάζας του σώματος επί το τετράγωνο της απόστασης d.

$$I_p = I_{cm} + Md^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.5

Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας ομογενούς δακτυλίου μάζας M και ακτίνας R, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζει. Το πάχος του δακτυλίου είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα του



Σχ. 4.19

Απάντηση :

Θεωρούμε ότι ο δακτύλιος αποτελείται από τις στοιχειώδεις μάζες m_1, m_2 ....
Είναι φανερό ότι $m_1 + m_2 + \ldots\ldots = M$

Επειδή το πάχος του δακτυλίου είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα του R, όλες οι στοιχειώδεις μάζες έχουν την ίδια απόσταση R από τον άξονα περιστροφής.

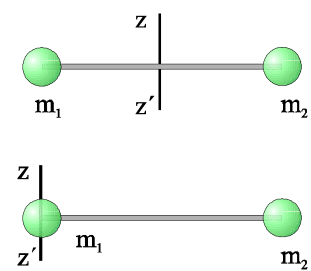
Σύμφωνα με τον ορισμό της ροπής αδράνειας

$$I = m_1\, r_1^2 + m_2\, r_2^2 + \ldots = m_1\, R^2 + m_2\, R^2 + \ldots = (m_1 + m_2 + \ldots)R^2$$

Άρα $$I = MR^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.6

Δυο σώματα αμελητέων διαστάσεων, με ίσες μάζες m_1 και m_2, ($m_1 = m_2 = m$), συνδέονται μεταξύ τους με αβαρή ράβδο, μήκους l. Ποια είναι η ροπή αδράνειας του συστήματος, ως προς άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται α) από το μέσον της ράβδου β) από τη μάζα m_1;



Σχ. 4.20

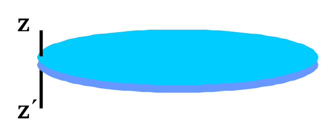
Απάντηση :

α) $$I = m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{2}$$

β) $$I = m_1 l^2 + 0 = ml^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.7

Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας ενός λεπτού ομογενούς δίσκου, μάζας M και ακτίνας R, ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του, που περνάει από το άκρο του δίσκου.



Σχ. 4.21

Απάντηση :

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του είναι

$$I_{cm} = MR^2/2$$

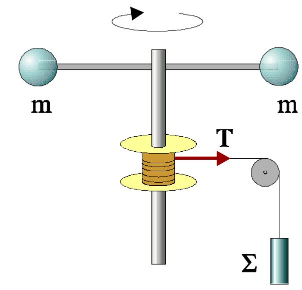
Εφαρμόζοντας το θεώρημα παραλλήλων αξόνων για $d=R$ έχουμε

$$I_p = I_{cm} + Md^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$$

4-6 ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Στην περίπτωση ενός υλικού σημείου, από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής $\Sigma \mathbf{F} = m\boldsymbol{\alpha}$ προκύπτει ότι για να μεταβληθεί η ταχύτητά του πρέπει να ασκηθεί σε αυτό δύναμη. Αντίστοιχος νόμος ισχύει στη στροφική κίνηση στερεών σωμάτων. Σύμφωνα με αυτόν, για να μεταβληθεί η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα πρέπει να ασκηθεί σ' αυτό ροπή. Η σχέση ανάμεσα στην αιτία (ροπή) και το αποτέλεσμα (μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας) είναι

$$\Sigma\tau = I\alpha \qquad (4.7)$$



Σχ. 4.22 Το σώμα Σ, μέσω του σκοινιού, ασκεί ροπή στον άξονα περιστροφής με αποτέλεσμα η γωνιακή ταχύτητα των μαζών m να αυξάνεται.

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως **ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης**, δηλαδή,

> **το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν πάνω σε ένα στερεό σώμα το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ισούται με το γινόμενο της ροπής αδράνειας (υπολογισμένης ως προς τον άξονα περιστροφής) και της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος.**

Από τη σχέση (4.7) φαίνεται ότι όσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδράνειας ενός σώματος τόσο πιο δύσκολα αλλάζει η περιστροφική κατάσταση του σώματος. **Η ροπή αδράνειας** εκφράζει στην περιστροφή, ό,τι εκφράζει η μάζα στη μεταφορική κίνηση, δηλαδή **την αδράνεια του σώματος στη στροφική κίνηση**. Ενώ όμως η μάζα ενός σώματος είναι σταθερό μέγεθος η ροπή αδράνειας εξαρτάται κάθε φορά από τη θέση του άξονα περιστροφής.

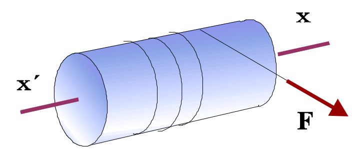
Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδέν, από τη σχέση (4.7) προκύπτει ότι και η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος είναι μηδέν, επομένως το σώμα διατηρεί την προηγούμενη περιστροφική του κατάσταση, δηλαδή αν το σώμα είναι ακίνητο θα εξακολουθήσει να ηρεμεί, ενώ αν στρέφεται θα συνεχίσει να στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε σε στροφικές κινήσεις γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής. Τα συμπεράσματά μας για την κίνηση αυτή μπορούν να επεκταθούν και στις περιπτώσεις που ο άξονας περιστροφής μετατοπίζεται. Αυτό συμβαίνει στις σύνθετες κινήσεις, στις οποίες το σώμα κάνει ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση, όπως στην κίνηση ενός τροχού που κυλάει.

Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης ισχύει και στις περιπτώσεις αυτές, αρκεί ο άξονας γύρω από τον οποίο περιστρέφεται το σώμα να διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος, να είναι άξονας συμμετρίας και να μην αλλάζει κατεύθυνση κατά τη διάρκεια της κίνησης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.8

Ομογενής κύλινδρος μάζας M=40 kg και ακτίνας R=40 cm, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον άξονα του που είναι σταθερός. Στην επιφάνεια του κυλίνδρου έχουμε τυλίξει σκοινί, το ελεύθερο άκρο του οποίου έλκεται με σταθερή δύναμη F=6 N. Το σκοινί ξετυλίγεται, χωρίς ολίσθηση, περιστρέφοντας ταυτόχρονα τον κύλινδρο. Ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου;
Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.



Σχ. 4.23

Απάντηση :

Η δύναμη που ασκεί το σκοινί στον κύλινδρο προκαλεί ροπή $\tau = FR$

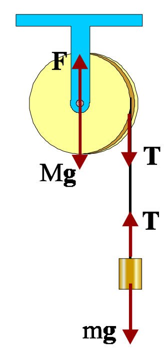
Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης $\tau = I\alpha$ ή $FR = \frac{1}{2}MR^2\alpha$

Λύνοντας ως προς α και αντικαθιστώντας τις τιμές των μεγεθών βρίσκουμε

$$\alpha = \frac{2F}{MR} = \frac{2 \cdot 6N}{40kg \cdot 40 \cdot 10^{-2}\,m} = 0{,}75\ rad/s^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.9

Μία τροχαλία μάζας M, ακτίνας R, και ροπής αδράνειας I μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της, όπως φαίνεται στο σχήμα. Γύρω από την τροχαλία έχουμε τυλίξει αβαρές νήμα στην ελεύθερη άκρη του οποίου κρέμεται σώμα μάζας m. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος, τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας και την τάση του νήματος.



Σχ. 4.24

Απάντηση :

Θα εφαρμόσουμε τους νόμους της μηχανικής χωριστά σε κάθε σώμα.
Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα m, είναι το βάρος του $m\mathbf{g}$ και η τάση του νήματος **T**.

Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής $mg - T = ma_{cm}$ (4.8)

Στον τροχό ασκούνται η **T** (από το νήμα), η δύναμη **F** (από τον ο άξονα) και το βάρος του $M\mathbf{g}$.

Οι δυνάμεις $M\mathbf{g}$ και **F** δε δημιουργούν ροπή γιατί ο φορέας τους περνάει από τον άξονα περιστροφής. Ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής για τη στροφική κίνηση δίνει

$$\tau = I\alpha \quad ή \quad TR = I\alpha \qquad (4.9)$$

Λύνοντας την (4.8) ως προς T έχουμε $\qquad T = mg - ma_{cm}$

Αντικαθιστώντας στην (4.9) $\qquad mgR - mRa_{cm} = I\alpha \qquad (4.10)$

Η γραμμική επιτάχυνση a ενός σημείου στην περιφέρεια του τροχού είναι

$$a = \alpha R$$

και επειδή είναι ίση με την επιτάχυνση a_{cm} του σώματος θα είναι $\quad a_{cm} = \alpha R \qquad (4.11)$

οπότε η (4.10) γίνεται $\qquad mgR - mR^2\alpha = I\alpha$

Επομένως $\qquad \alpha = \dfrac{mgR}{I + mR^2} \qquad (4.12)$

Αντικαθιστώντας στην (4.11) βρίσκουμε για τη γραμμική επιτάχυνση

$$a_{cm} = \frac{mgR^2}{I + mR^2} \qquad (4.13)$$

Η τάση T υπολογίζεται αν αντικαταστήσουμε την (4.12)στην (4.9)

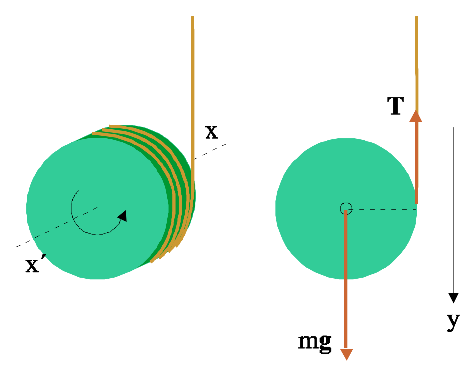
$$T = \frac{I}{R}\alpha = \frac{I}{R}\frac{mgR}{I + mR^2} \qquad \text{ή} \qquad T = \frac{I\,mg}{I + mR^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.10

Το γιο - γιο αποτελείται από ένα μικρό κύλινδρο, στο κυρτό μέρος του οποίου έχει τυλιχτεί πολλές φορές ένα σκοινί. Κρατώντας το ελεύθερο άκρο του σκοινιού και αφήνοντας τον κύλινδρο να πέσει, το σκοινί ξετυλίγεται και ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από ένα νοητό οριζόντιο άξονα, τον xx΄.

Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2}mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g. Θεωρήστε ότι σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του κυλίνδρου το σκοινί παραμένει κατακόρυφο.



Σχ. 4.25

Απάντηση :

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι το βάρος του **mg** και η δύναμη **T** από το σκοινί.
Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει:

$$\Sigma F_y = ma_{cm} \quad \text{ή} \quad mg - T = ma_{cm} \quad \text{οπότε} \quad T = mg - ma_{cm} \qquad (4.14)$$

Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης ως προς τον άξονα xx΄ έχουμε

$$\Sigma\tau = I\alpha \quad \text{ή} \quad TR = I\alpha \qquad (4.15)$$

Αντικαθιστώντας την (4.14) στην (4.15) βρίσκουμε

$$mgR - mRa_{cm} = I\alpha$$

ή $\qquad mgR - mRa_{cm} = \dfrac{1}{2}mR^2\alpha \quad$ ή $\quad g - a_{cm} = \dfrac{1}{2}R\,\alpha \qquad (4.16)$

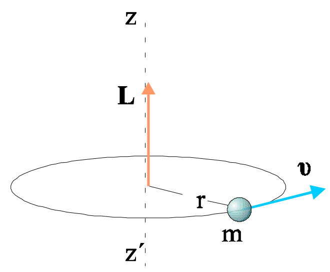
Όμως $\quad a_{cm} = R\alpha \quad$ οπότε $\quad \alpha = \dfrac{a_{cm}}{R}$

Αντικαθιστώντας στην (4.16) βρίσκουμε $g - a_{cm} = \dfrac{1}{2}a_{cm}$ $\quad$ ή $\quad a_{cm} = \dfrac{2g}{3}$

4-7 ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

Η ορμή αποδείχτηκε μέγεθος ιδιαίτερα χρήσιμο για την περιγραφή της μεταφορικής κίνησης των στερεών. Το αντίστοιχο της ορμής του στερεού στη στροφική κίνηση το ονομάζουμε **στροφορμή**.

Θα ορίσουμε πρώτα τη στροφορμή ενός υλικού σημείου που κάνει κυκλική κίνηση, στη συνέχεια θα ορίσουμε τη στροφορμή στερεού σώματος και, τέλος, τη στροφορμή συστήματος σωμάτων.



Σχ. 4.26 Το υλικό σημείο μάζας *m* κινείται κυκλικά. Η στροφορμή του είναι κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς του.

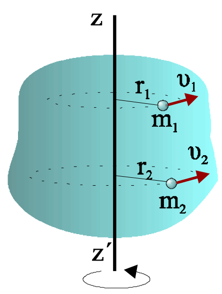
A) Στροφορμή υλικού σημείου

Έστω ένα υλικό σημείο μάζας m και ορμής **p** που κινείται σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας r (σχ. 4.26).

Ονομάζουμε στροφορμή του υλικού σημείου ως προς ένα άξονα z΄z που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδό της το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο

$$L = p\,r \quad \text{ή} \quad L = m\,\upsilon\,r$$

διεύθυνση αυτή του άξονας z΄z και φορά του καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Μονάδα στροφορμής είναι το 1kg m^2/s.



Σχ. 4.27 Το στερεό μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από στοιχειώδη τμήματα με μάζες m_1 m_2 … Κάθε μάζα εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από τον άξονα περιστροφής.

B) Στροφορμή στερεού σώματος

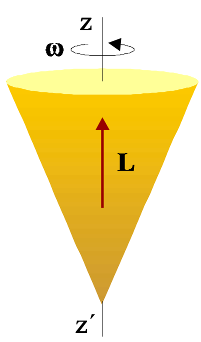
Έστω το στερεό του σχήματος 4.27 που περιστρέφεται γύρω από το σταθερό άξονα z΄z με γωνιακή ταχύτητα ω. Κατά την περιστροφή του σώματος τα διάφορα σημεία του διαγράφουν κυκλικές τροχιές τα επίπεδα των οποίων είναι κάθετα στον άξονα περιστροφής. Όλα τα σημεία περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω, η γραμμική ταχύτητά τους όμως είναι διαφορετική, και μάλιστα ανάλογη με την απόστασή τους από τον άξονα περιστροφής. Χωρίζουμε το σώμα σε στοιχειώδη τμήματα, με μάζες m_1, m_2 …. , τόσο μικρά ώστε καθένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο. Οι στροφορμές των στοιχειωδών αυτών μαζών έχουν όλες την ίδια κατεύθυνση και μέτρα, $L_1 = m_1\upsilon_1 r_1$, $L_2 = m_2\upsilon_2 r_2$, …. **Η στροφορμή του σώματος είναι το άθροισμα των στροφορμών των υλικών σημείων που το αποτελούν.**

$$L = m_1\,\upsilon_1\,r_1 + m_2\,\upsilon_2\,r_2 + \ldots$$

Επειδή τα υλικά σημεία m_1, m_2 … κάνουν κυκλική κίνηση οι ταχύτητές τους υ_1, υ_2 … μπορούν να γραφούν $\upsilon_1 = \omega\,r_1$, $\upsilon_2 = \omega\,r_2$ κ. ο. κ. οπότε

$$L = m_1\,\omega\,r_1^2 + m_2\omega\,r_2^2 + \ldots = \omega\left(m_1\,r_1^2 + m_2\,r_2^2 + \ldots\right)$$

όμως $m_1\,r_1^2 + m_2\,r_2^2 + \ldots = I$ επομένως



Σχ. 4.28 Ο κώνος του σχήματος περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z΄z με γωνιακή ταχύτητα *ω*. Η στροφορμή του σώματος είναι *Iω*, βρίσκεται πάνω στον άξονα και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Η στροφορμή ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από άξονα ισούται με

$$L = I\omega \qquad (4.17)$$

έχει τη διεύθυνση του άξονα και η φορά της ορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Στροφορμή μερικών σωμάτων

Τροχιακή κίνηση της Γης	$2,7\times10^{40}$ kg m^2/s
Περιστροφή της Γης	$5,8\times10^{33}$ kg m^2/s
Τροχός αυτοκινήτου (υ=90km/h)	10^2 kg m^2/s
Δίσκος πικ-απ (33 στροφές ανά min)	6×10^{-3} kg m^2/s
Τροχιακή κίνηση ηλεκτρονίου	$1,05\times10^{-35}$ kg m^2/s
Σπιν ηλεκτρονίου	$0,53\times10^{-34}$ kg m^2/s

Τη στροφορμή που σχετίζεται με την περιστροφική κίνηση ενός σώματος γύρω από άξονά που περνάει από το κέντρο μάζας του συχνά την ονομάζουμε **σπιν,** για να τη διακρίνουμε από τη στροφορμή που μπορεί να έχει το σώμα λόγω άλλης κίνησης. Για παράδειγμα, η Γη έχει σπιν εξαιτίας της περιστροφής της γύρω από τον άξονά της και στροφορμή εξαιτίας της κίνησής της γύρω από τον Ήλιο, δηλαδή της τροχιακής της κίνησης.

Τα στοιχειώδη σωματίδια - ηλεκτρόνια, πρωτόνια και νετρόνια - έχουν σπιν μέτρου $0,53\times10^{-34}$ Js. Αυτή η στροφορμή σπιν συνήθως εκφράζεται ως $\frac{1}{2}\hbar$, όπου $\hbar=1,05\times10^{-34}$ J s (προφέρεται έιτς μπάρ) και είναι μια θεμελιώδης ποσότητα στροφορμής που εμφανίζεται συχνά στη κβαντική φυσική.

Γ) Στροφορμή συστήματος

Σε ένα σύστημα σωμάτων, **στροφορμή ονομάζεται το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα**. Εάν δηλαδή οι στροφορμές των σωμάτων του συστήματος είναι $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$, .., η στροφορμή **L** του συστήματος είναι

$$\mathbf{L}=\mathbf{L_1}+\mathbf{L_2}+\ldots$$

ΓΕΝΙΚΟΤΕΡΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΝΟΜΟΥ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Από τη σχέση 4.17 προκύπτει ότι αν σε απειροστά μικρό χρόνο dt η γωνιακή ταχύτητα του στερεού μεταβληθεί κατά $d\omega$, η στροφορμή του θα μεταβληθεί κατά $dL = I\,d\omega$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει $$\frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

και εξαιτίας της (4.7) $$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt} \qquad (4.18)$$

Επομένως **το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν σε ένα στερεό που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του**

Η σχέση αυτή είναι για τη στροφική κίνηση το ανάλογο του **δεύτερου νόμου του Newton**.

Ο νόμος αυτός ισχύει και σε σύστημα σωμάτων. Σε ένα σύστημα σωμάτων, το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ροπών, δηλαδή των ροπών που οφείλονται στις εξωτερικές δυνάμεις καθώς και εκείνων που οφείλονται στις εσωτερικές δυνάμεις, είναι ίσο με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.

Η ολική ροπή των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Newton οι εσωτερικές δυνάμεις απαντούν κατά ζεύγη (δράση - αντίδραση). Σε κάθε τέτοιο ζεύγος οι δυνάμεις είναι αντίθετες. Η ροπή κάθε τέτοιου ζεύγους ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδενική και επομένως το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των εσωτερικών δυνάμεων να είναι μηδέν. Έτσι η σχέση 4.18 για σύστημα σωμάτων γράφεται

$$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \frac{dL}{dt} \qquad (4.19)$$

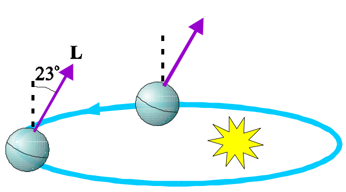
όπου $\tau_{\varepsilon\xi}$ η ροπή μιας εξωτερικής δύναμης και L η στροφορμή του συστήματος.

4-8 ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Στη στροφική κίνηση ισχύει ένας νόμος διατήρησης, ανάλογος με το νόμο διατήρησης της ορμής που ισχύει στη μεταφορική κίνηση. Το μέγεθος που διατηρείται στη στροφική κίνηση είναι η στροφορμή.

Η διατήρηση της στροφορμής σε ένα σώμα

Αν σε ένα σώμα το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδέν, από τη σχέση $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$ προκύπτει ότι $\frac{dL}{dt} = 0$, επομένως, $L = \sigma\tau\alpha\theta$. Η στροφορμή του σώματος παραμένει σταθερή.



Σχ. 4.29 Η στροφορμή της Γης –λόγω της ιδιοπεριστροφής της- διατηρείται σταθερή

Για παράδειγμα, κατά την περιστροφή της Γης γύρω από τον εαυτό της (ιδιοπεριστροφή), επειδή η ελκτική δύναμη που δέχεται από τον Ήλιο δε δημιουργεί ροπή, αφού ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας της, η στροφορμή της Γης παραμένει σταθερή. Επομένως η χρονική διάρκεια περιστροφής της Γης γύρω από τον εαυτό της παραμένει σταθερή –24 ώρες.

Η διατήρηση της στροφορμής σε σύστημα σωμάτων.

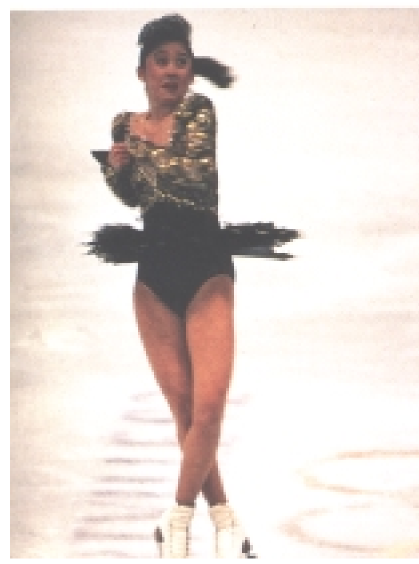
Ο δεύτερος νόμος του Newton για τη στροφική κίνηση στην περίπτωση συστήματος σωμάτων έχει τη μορφή $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \frac{dL}{dt}$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων στο σύστημα είναι μηδέν, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή. Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως **αρχή της διατήρησης της στροφορμής**

Εάν η συνολική εξωτερική ροπή σε ένα σύστημα είναι μηδέν η ολική στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

Αν, λόγω ανακατανομής της μάζας (εξαιτίας εσωτερικών δυνάμεων), μεταβληθεί η ροπή αδράνειας ενός σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του, μεταβάλλεται και η γωνιακή ταχύτητά του αλλά η στροφορμή του διατηρείται σταθερή. Μπορούμε επομένως να γράψουμε:

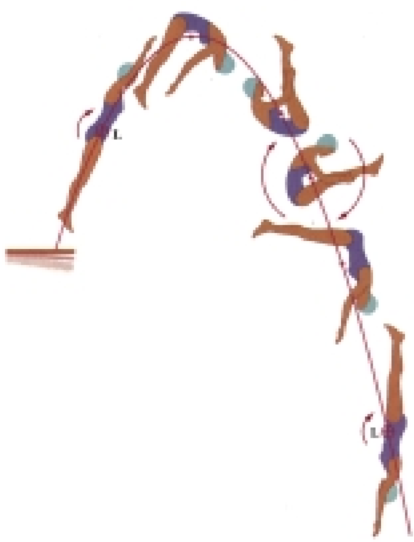
$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Τα παραδείγματα φαινομένων στα οποία διατηρείται η στροφορμή είναι πολλά. Στην εικόνα 4.4 φαίνεται μια αθλήτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ, που στριφογυρίζει στο παγοδρόμιο. Η αθλήτρια μπορεί, συμπτύσσοντας τα χέρια και τα πόδια της, να αυξήσει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της. Εάν η τριβή των παγοπέδιλων με τον πάγο θεωρηθεί αμελητέα, οι εξωτερικές δυνάμεις - όπως το βάρος και η δύναμη που δέχεται από το έδαφος - δε δημιουργούν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής της, επομένως η στροφορμή της διατηρείται, δηλαδή το γινόμενο $I\omega$ παραμένει σταθερό. Συμπτύσσοντας τα χέρια και τα πόδια της η ροπή αδράνειας μειώνεται, οπότε, αφού το γινόμενο $I\omega$ μένει σταθερό, αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.



Εικ. 4.4 Η χορεύτρια συμπτύσσοντας τα άκρα της αυξάνει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.

Όταν οι ακροβάτες θέλουν να κάνουν πολλές στροφές στον αέρα συμπτύσσουν τα χέρια και τα πόδια τους. Κατά την κίνηση του ακροβάτη στον αέρα, μοναδική εξωτερική δύναμη είναι το βάρος του, το οποίο, επειδή διέρχεται από το κέντρο μάζας, δε δημιουργεί ροπή και η στροφορμή του διατηρείται. Με τη σύμπτυξη των άκρων μειώνεται η ροπή αδράνειας, επομένως αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής. Στο σχήμα 4.30 φαίνεται πως, με την τεχνική αυτή, μια κατάδυση μπορεί να γίνει πολύ θεαματική.

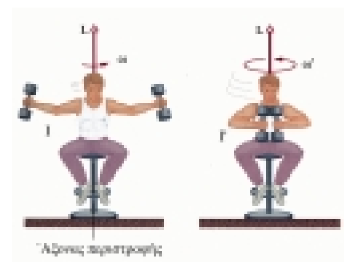


Σχ. 4.30 Με τη σύμπτυξη των άκρων μειώνεται η ροπή αδράνειας της καταδύτριας με συνέπεια την αύξηση της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της.

Τα αστέρια τα οποία στο τελευταίο στάδιο της ζωής τους έχουν μάζα από 1,4 έως 2,5 φορές τη μάζα του Ήλιου, μετατρέπονται σε αστέρες νετρονίων ή pulsars. Τα αστέρια αυτά, όταν εξαντλήσουν τις πηγές ενέργειας που διαθέτουν, συρρικνώνονται λόγω της βαρύτητας μέχρις ότου η πυρήνες των ατόμων τους αρχίσουν να εφάπτονται, με αποτέλεσμα η ακτίνα ενός τέτοιου αστεριού να είναι μόνο 15-20 km. Επειδή η συρρίκνωση οφείλεται σε εσωτερικές δυνάμεις η στροφορμή διατηρείται σταθερή και επειδή η ροπή αδράνειας του αστεριού μειώνεται δραματικά έχουμε μια αντίστοιχη αύξηση της ταχύτητας περιστροφής. Υπολογίζεται ότι ένας αστέρας νετρονίων περιστρέφεται με συχνότητα 3000 στροφές το δευτερόλεπτο. Για σύγκριση, να αναφέρουμε ότι η περίοδος περιστροφής του Ήλιου είναι 25 μέρες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.11

Ο άνθρωπος στο σχήμα 4.31, έχει τα χέρια του τεντωμένα και στο κάθε χέρι του κρατάει ένα βαράκι μάζας M=4 kg.Εξαιτίας μιας ώθησης που δέχτηκε, ο άνθρωπος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1=4 rad/s. Με ποια γωνιακή ταχύτητα θα στρέφεται αν συμπτύξει τα χέρια του;



Σχ. 4.31

Το κάθισμα πάνω στο οποίο κάθεται, ο άνθρωπος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα, που είναι ο άξονας συμμετρίας. Η ροπή αδράνειας του ανθρώπου (χωρίς τα βαράκια που κρατάει) όταν έχει τα χέρια του τεντωμένα είναι 3,25 kgm^2 και όταν συμπτύσσει τα χέρια του είναι 2,5 kgm^2.
Κάθε βαράκι απέχει από τον άξονα περιστροφής 1 m, στην αρχή και 0,2 m στο τέλος. Η ροπή αδράνειας του καθίσματος είναι αμελητέα.

Απάντηση :

Η αρχική ροπή αδράνειας I_1 του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής, όταν ο άνθρωπος είχε τα χέρια του τεντωμένα, ήταν το άθροισμα της ροπής αδράνειας του ανθρώπου και της ροπής αδράνειας των σωμάτων που κρατάει.

$$I_1 = I_1^{\alpha\nu\theta\rho} + I_1^{\beta\alpha\rho} = I_1^{\alpha\nu\theta\rho} + 2MR_1^2 = 11{,}25 kg\, m^2$$

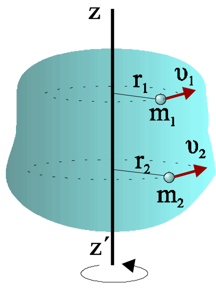
Η ροπή αδράνειας I_2 του συστήματος, όταν ο άνθρωπος κατεβάσει τα χέρια του είναι η νέα ροπή αδράνειας του ανθρώπου και η ροπή αδράνειας των σωμάτων.

$$I_2 = I_2^{\alpha\nu\theta\rho} + I_2^{\beta\alpha\rho} = I_2^{\alpha\nu\theta\rho} + 2MR_2^2 = 2{,}82 kg\, m^2$$

Επειδή στο σύστημα δεν ενεργούν εξωτερικές ροπές ως προς τον άξονα περιστροφής, η στροφορμή του διατηρείται . Δηλαδή ισχύει:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \quad \text{ή} \quad \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = 16 rad/s$$

4-9 ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΛΟΓΩ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ



Σχ. 4.32 Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι το άθροισμα των ενεργειών των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται

Το σώμα του σχήματος 4.32, που στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από τον άξονα z΄z, έχει κινητική ενέργεια.

Προκειμένου να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του σώματος, το χωρίζουμε σε στοιχειώδεις μάζες $m_1, m_2 \ldots$ Οι μάζες αυτές έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω και γραμμικές ταχύτητες που δίνονται από τις σχέσεις

$$\upsilon_1 = \omega\, r_1 , \quad \upsilon_2 = \omega\, r_2 , \quad \ldots \qquad (4.20)$$

Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των μαζών από τις οποίες αποτελείται,

δηλαδή $$K = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 + \ldots$$

Η σχέση αυτή γίνεται, από την (4.20)

$$K = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2 + \ldots = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots)\omega^2$$

Όμως $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots = I$ και επομένως

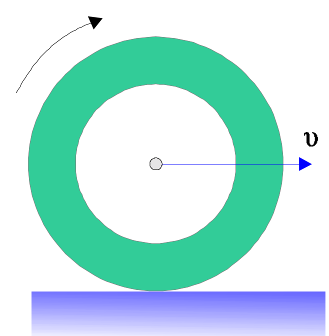
$$\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

Πρέπει να τονιστεί ότι η ενέργεια αυτή δεν είναι μια νέα μορφή ενέργειας. Η σχέση στην οποία καταλήξαμε αποτελεί απλά μια βολική έκφραση για την κινητική ενέργεια ενός σώματος που στρέφεται.

Αν το σώμα εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση, όπως ο τροχός του σχήματος 4.33 η κινητική του ενέργεια είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής και λόγω στροφικής κίνησης.

$$\boxed{K = \frac{1}{2} M \upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2}$$

όπου M η μάζα του σώματος και υ_{cm} η ταχύτητα του κέντρου μάζας του.

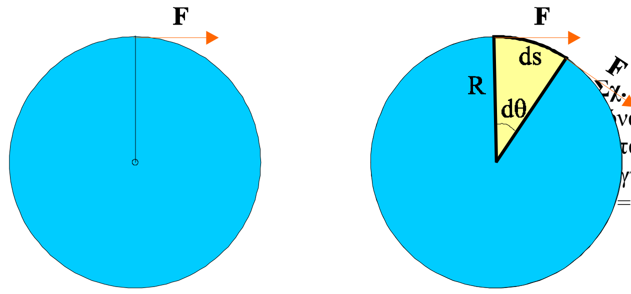


Σχ. 4.33 Ο τροχός έχει κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής και λόγω περιστροφικής κίνησης

4-10 ΕΡΓΟ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Όταν πατάμε τα πετάλια του ποδηλάτου ασκούμε δύναμη και παράγουμε έργο. Έργο παράγεται και από τη μηχανή του αυτοκινήτου καθώς στρέφει τον άξονα των τροχών. Το έργο μιας δύναμης που στρέφει ένα σώμα μπορούμε να το εκφράσουμε σε συνάρτηση με τη ροπή της.

Έστω ότι η δύναμη **F** ασκείται στην περιφέρεια ενός τροχού ακτίνας R, κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης (σχ. 4.35). Κατά την απειροστά μικρή στροφή του τροχού κατά γωνία $d\theta$ η δύναμη παράγει έργο



Σχ. 4.34 Με την επίδραση της …ναμης **F** το σώμα στρέφεται …τά γωνία *dθ*. Το σημείο εφαρ-…γής της **F** μετατοπίζεται κατά …$=R\,d\theta$.

$$dW = F\;ds$$

Αν η γωνία μετριέται σε ακτίνια τότε $ds = R\;d\theta$ και

$$dW = F\;R\;d\theta$$

Το γινόμενο FR είναι η ροπή τ της δύναμης.

Επομένως $$dW = \tau\;d\theta \qquad (4.21)$$

Για να υπολογίσουμε το έργο μιας δύναμης καθώς ένα σώμα στρέφεται κατά γωνία θ χωρίζουμε τη γωνία σε απειροστά μικρές γωνίες $d\theta_1, d\theta_2 ...$ και αθροίζουμε τα αντίστοιχα έργα. Αν η ροπή της δύναμης είναι σταθερή, όπως στην περίπτωση του σχήματος 4.35, από το άθροισμα προκύπτει

$$W = \tau\;\theta$$

Από την (4.21) παίρνουμε

$$\frac{dW}{dt} = \tau\,\frac{d\theta}{dt}$$

Ο ρυθμός παραγωγής έργου dW/dt είναι **η ισχύς** P **της δύναμης** και το $d\theta/dt$ είναι η γωνιακή ταχύτητα ω του σώματος, επομένως

$$P = \tau\omega$$

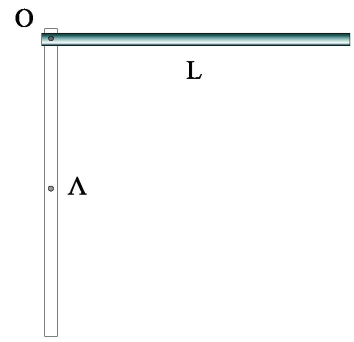
Η ροπή μιας δύναμης μεταβάλλει την κινητική ενέργεια του σώματος κατά ποσότητα ίση με το έργο της. Έτσι, στη στροφική κίνηση, το θεώρημα έργου - ενέργειας παίρνει τη μορφή

$$\sum W = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

δηλαδή **το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των ροπών που ασκούνται στο σώμα είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας περιστροφής του σώματος.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.12

Ομογενής και ισοπαχής ράβδος μήκους L=0,3 m και μάζας M, στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα Ο που διέρχεται από το ένα άκρο της. Αρχικά η ράβδος είναι οριζόντια και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερη. Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητά της τη στιγμή που θα περάσει από την κατακόρυφη θέση; Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα Ο είναι $\frac{1}{3}ML^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.



Σχ. 4.35

Απάντηση :

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Επιλέγουμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το μέσον της ράβδου Λ όταν βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση. Το μέσον της ράβδου είναι το κέντρο μάζας της .

Όταν η ράβδος βρίσκεται στην οριζόντια θέση έχει δυναμική ενέργεια $Mg\frac{L}{2}$

Όταν η ράβδος περάσει από την κατακόρυφη θέση, θα έχει κινητική ενέργεια $\frac{1}{2}I\omega^2$, όπου I η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα Ο.

Σύμφωνα με το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας ισχύει

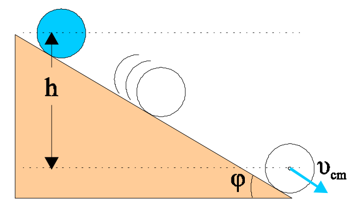
$$Mg\frac{L}{2}=\frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{ή} \quad Mg\frac{L}{2}=\frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\omega^2$$

από όπου

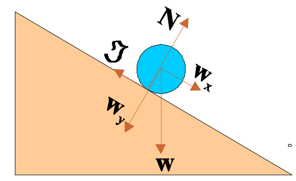
$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{L}}=10\,rad/s$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.13

Ομογενής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R κυλίεται κατά μήκος πλάγιου επιπέδου γωνίας φ. Ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν η κατακόρυφη μετατόπισή του είναι h.
Η επιτάχυνση της βαρύτητας (g) θεωρείται γνωστή. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2}MR^2$.



Απάντηση :



Σχ. 4.36

Η κύλιση του κυλίνδρου οφείλεται στην τριβή. Η ροπή της τριβής ως προς τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου είναι αυτή που περιστρέφει τον κύλινδρο. Η τριβή δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, αφού κάθε στιγμή ασκείται σε διαφορετικό σημείο του κυλίνδρου. Πρόκειται, δηλαδή, για στατική τριβή. Επομένως η μηχανική ενέργεια του κυλίνδρου διατηρείται αφού η στατική τριβή δεν παράγει έργο,

Αν θεωρήσουμε ότι στην κατώτερη θέση του η δυναμική ενέργεια του κυλίνδρου είναι ίση με μηδέν, στην ανώτερη θέση του ο κύλινδρος έχει δυναμική ενέργεια Mgh.

Στην κατώτερη θέση του ο κύλινδρος έχει κινητική ενέργεια, που ισούται με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφοράς $\left(\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2\right)$ και της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής $\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{ή} \quad Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

ή

$$gh = \frac{1}{2}\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4}R^2\omega^2 \tag{4.22}$$

Όμως η ταχύτητα υ_{cm} του κέντρου μάζας είναι

$$\upsilon_{cm} = \omega R \tag{4.23}$$

Η (4.22) γίνεται από την (4.23)

$$gh = \frac{1}{2}\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4}R^2\left(\frac{\upsilon_{cm}}{R}\right)^2 \quad \text{από όπου} \quad gh = \frac{1}{2}\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4}\upsilon_{cm}^2 \quad \text{και τελικά} \quad \upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΜΕ ΤΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Μεταφορική κίνηση	Στροφική κίνηση
Θέση x	Γωνία θ
Ταχύτητα $\upsilon = \frac{dx}{dt}$	Γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Επιτάχυνση $\alpha = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt}$	Γωνιακή επιτάχυνση $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Δύναμη $\mathbf{F}$	Ροπή $\boldsymbol{\tau}$
Μάζα m	Ροπή αδράνειας I
Θεμελιώδης νόμος τη μηχανικής $\Sigma\mathbf{F} = m\boldsymbol{\alpha}$	Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης $\Sigma\tau = I\alpha$
Ορμή $\mathbf{p}=m\,\boldsymbol{\upsilon}$	Στροφορμή $L=I\omega$
Δεύτερος νόμος του Newton $\Sigma\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$	Δεύτερος νόμος του Newton στη στροφική κίνηση $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$
Διατήρηση της ορμής Αν $\Sigma\mathbf{F}_{\varepsilon\xi}=0$ $\mathbf{p}$=σταθερό	Διατήρηση της στροφορμής Αν $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0$ L=*σταθερό*
Κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$	Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής $K = \frac{1}{2}I\omega^2$

ΣΥΝΟΨΗ

Η **γωνιακή επιτάχυνση** είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας. $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

Ροπή δύναμης F, ως προς άξονα περιστροφής ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο

$$\tau = Fl$$

όπου *l* η κάθετη απόσταση της δύναμης από τον άξονα περιστροφής, διεύθυνση αυτή του άξονα περιστροφής και φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Η μονάδα ροπής είναι το 1N m.

Ροπή δύναμης F ως προς σημείο Ο ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο $\tau = Fl$ όπου *l* απόσταση του σημείου από το φορέα της δύναμης, μονάδα το 1N m, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη και το σημείο Ο και φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Για να ισορροπεί ένα ακίνητο στερεό πρέπει $\Sigma\mathbf{F} = 0$ ή $\begin{matrix}\Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0\end{matrix}$ και $\Sigma\tau = 0$

Ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς κάποιο άξονα ονομάζεται το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το σώμα επί τα τετράγωνα των αποστάσεών τους από τον άξονα περιστροφής

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots$$

Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης είναι

$$\Sigma\tau = I\alpha$$

Στροφορμή υλικού σημείου -που κινείται κυκλικά- ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδό της ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο

$$L = pr \quad \text{ή} \quad L = m\upsilon r$$

διεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Η μονάδα στροφορμής είναι το 1kg m^2/s.

Στροφορμή στερεού σώματος -που στρέφεται γύρω από άξονα- είναι η συνισταμένη των στροφορμών των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το στερεό. Η στροφορμή στερεού είναι ίση με

$$L = I\omega$$

Η στροφορμή ενός συστήματος διατηρείται σταθερή εάν η συνολική εξωτερική ροπή στο σύστημα είναι μηδέν.

Ο δεύτερος νόμος του Newton στη στροφική κίνηση είναι $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$

Η κινητική ενέργεια στερεού λόγω περιστροφής είναι $K = \frac{1}{2} I\omega^2$

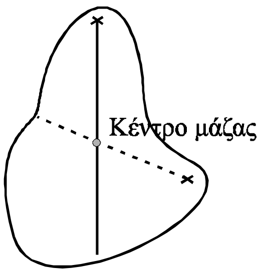
Το έργο μιας σταθερής ροπής κατά τη στροφή ενός στερεού κατά γωνία θ είναι

$$W = \tau\theta$$

Η ισχύς μιας ροπής είναι $P = \tau\omega$

Το θεώρημα έργου - ενέργειας στη στροφική κίνηση γράφεται

$$\Sigma W = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2$$



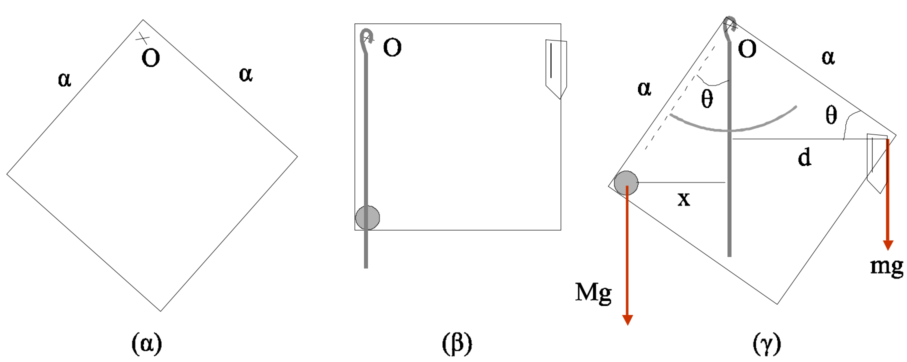
Σχ. 4.37

1. Βρείτε το κέντρο μάζας ενός σώματος δύο διαστάσεων.

Κόψτε ένα χαρτόνι που δεν έχει γεωμετρικό σχήμα και αναρτήστε το από ένα σημείο του. Όταν ισορροπήσει το χαρτόνι χαράξτε πάνω του την κατακόρυφη που περνάει από το σημείο ανάρτησης. Επειδή το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών πρέπει να είναι μηδέν, το κέντρο μάζας του χαρτονιού θα βρίσκεται σ' αυτή την κατακόρυφη. Στη συνέχεια κρεμάστε το σώμα από ένα δεύτερο σημείο και επαναλάβετε τα ίδια. Το κέντρο μάζας βρίσκεται στο σημείο τομής των δύο γραμμών.

2. Κατασκευάστε μια ζυγαριά.

Κόψτε ένα χαρτόνι σε σχήμα τετραγώνου. Κρεμάστε το σε ένα καρφί που περνάει από το σημείο Ο σχήμα 4.38α, ώστε να μπορεί να στρέφεται ελεύθερα. Στο ίδιο καρφί κρεμάστε και ένα ευθύγραμμο σύρμα που θα δείχνει τη διεύθυνση της κατακόρυφης. Στερεώστε στο ένα άκρο του χαρτονιού ένα αντίβαρο γνωστής μάζας (*M*) και στο άλλο ένα συνδετήρα ώστε να μπορείτε να κρεμάσετε μικρά αντικεί-μενα (σχ. 4.38β). Σημειώστε πάνω στο χαρτόνι την κατακόρυφη όπως ορίζεται από το σύρμα. Ξεκρεμάστε το χαρτόνι και με ένα μοιρογνωμόνιο χαράξτε πάνω του κλίμακα για τη μέτρηση γωνιών. Το μηδέν της κλίμακας να αντιστοιχεί στη γραμμή που χαράξατε με βάση το σύρμα. Στερεώστε πάλι το χαρτόνι. Αν από το συνδετήρα κρεμάσετε ένα μικρό αντικείμενο άγνωστης μάζας μπορείτε να υπολογίσετε τη μάζα του.



Σχ. 4.38

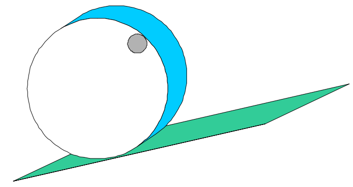
Στη θέση ισορροπίας το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς το Ο είναι μηδέν.

$$Mgx - mgd = 0 \quad \text{ή} \quad Mg\,\alpha\,\eta\mu\theta - mg\alpha\ \sigma\upsilon\nu\theta = 0$$

$$\text{οπότε} \quad m = M\varepsilon\phi\theta$$

Με την προϋπόθεση ότι η μάζα του χαρτονιού είναι μικρή, αν γνωρίζουμε τη μάζα *M* και μετρήσουμε τη γωνία κατά την οποία στρέφεται το χαρτόνι μπορούμε να υπολογίσουμε τη μάζα *m*.

3. Ένας κύλινδρος που «αψηφά» τη βαρύτητα



Σχ. 4.39

Κολλήστε στο εσωτερικό ενός κυλινδρικού κουτιού μεγάλης διαμέτρου μια μικρή μεταλλική ράβδο, παράλληλα με τον άξονά του κουτιού. Αφού σημειώσετε τη θέση της στο εξωτερικό μέρος του κλείστε το κουτί.

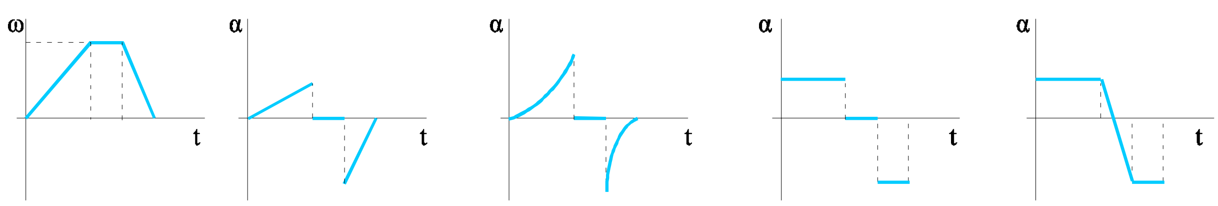
Μπορείτε να κάνετε τους φίλους σας να τα χάσουν, νομίζοντας ότι το κουτί δεν ακολουθεί τους γνωστούς νόμους της φύσης:

Τοποθετήστε τον κύλινδρο σε πλάγιο επίπεδο με μικρή κλίση, όπως δείχνει το σχήμα και αφήστε τον ελεύθερο. Για λίγο ο κύλινδρος πηγαίνει προς τα επάνω. Πώς εξηγείται αυτό;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κινηματική της περιστροφής

4.1 Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ενός τροχού μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο σχ. 4.40α Ποιο από τα διαγράμματα β, γ, δ, ε παριστάνει τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού σε συνάρτηση με το χρόνο;

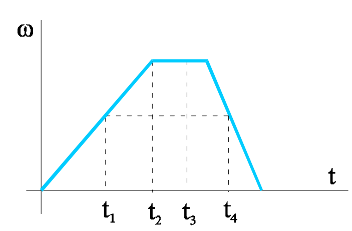


(α) (β) (γ) (δ) (ε)

Σχ. 4.40

4.2 Ένα σώμα κάνει ομαλή κυκλική κίνηση. Ποια είναι η γωνιακή του επιτάχυνση;

4.3 Ένας δίσκος στέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του. Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου σε συνάρτηση με το χρόνο παριστάνεται στο διάγραμμα του σχήματος 4.41 Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;



Σχ. 4.41

α) Η γωνιακή επιτάχυνση το χρονικό διάστημα t_1-t_2 αυξάνεται.

β) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή t_4 είναι μικρότερο από τη χρονική στιγμή t_1.

γ) Τη χρονική στιγμή t_1 το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης έχει αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση του έχει τη χρονική στιγμή t_4.

δ) Τη χρονική στιγμή t_3 η γωνιακή επιτάχυνση έχει μέτρο μεγαλύτερο από τη χρονική στιγμή t_1.

4.4 Ένα στερεό στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα. Θεωρήστε δύο στοιχειώδεις μάζες του σώματος που απέχουν διαφορετική απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Ποια από τα μεγέθη α) γραμμική ταχύτητα β) γωνιακή ταχύτητα γ) γωνιακή επιτάχυνση και δ) κεντρομόλος επιτάχυνση, έχουν την ίδια τιμή για τις δύο μάζες;

4.5 Είναι δυνατό ένα σώμα να έχει, μια χρονική στιγμή, γωνιακή ταχύτητα μηδέν και γωνιακή επιτάχυνση διαφορετική από μηδέν;

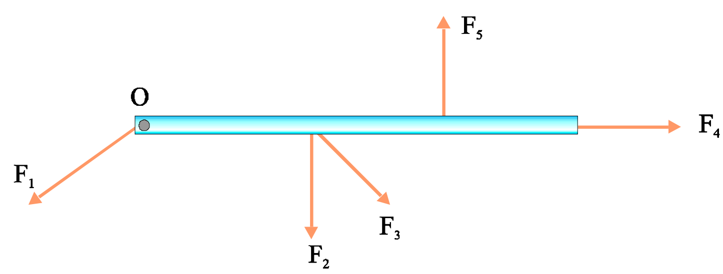
4.6 Ένα στερεό κάνει σύνθετη κίνηση. Υπάρχει κάποιο σημείο του στερεού το οποίο να έχει πάντα την ίδια ταχύτητα με το κέντρο μάζας; Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

Ροπή – ισορροπία στερεού

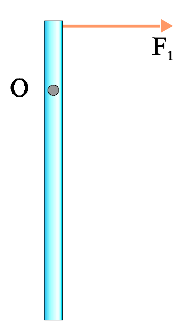
4.7 Συμπληρώστε τα κενά:
Η ροπή δύναμης ως προς σημείο έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί …… …… …… ……… ………, διεύθυνση που είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από …… … ……… ……. και φορά που ορίζεται από …. …… …… …….. ……..

4.8 Τα λεωφορεία και τα μεγάλα φορτηγά έχουν τιμόνι μεγάλης διαμέτρου. Τι εξυπηρετεί αυτό;

4.9 Στη ράβδο του σχήματος 4.42 ασκούνται πέντε ομοεπίπεδες δυνάμεις του ίδιου μέτρου. Η ράβδος μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο των δυνάμεων. Να κατατάξετε τις δυνάμεις κατά τη σειρά με την οποία το μέτρο της ροπής τους ως προς τον άξονα αυτόν αυξάνεται.



Σχ. 4.42



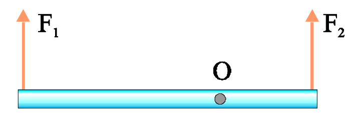
Σχ. 4.43

4.10 Η ράβδος του σχήματος 4.43 είναι κατακόρυφη και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο. Στο ένα άκρο της ράβδου ασκείται η οριζόντια δύναμη F_1. Για να μη στρέφεται η ράβδος ασκούμε οριζόντια δύναμη F_2 στο άλλο άκρο της.

α) Ποια πρέπει να είναι η κατεύθυνση της F_2;

β) Συγκρίνετε τα μέτρα των F_1 και F_2.

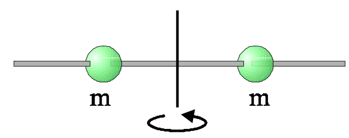
4.11 Στο σχήμα 4.44 φαίνεται μια οριζόντια ράβδος που μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το σημείο Ο. Στα δύο άκρα της ράβδου ασκούνται οι οριζόντιες δυνάμεις F_1 και F_2 κάθετες σε αυτήν. Η ράβδος παραμένει ακίνητη. Η απόσταση της δύναμης F_1 από τον άξονα περιστροφής είναι ίση με τα 2/3 του μήκους της ράβδου. Το μέτρο της δύναμης F_2 είναι
α) $F_1/2$ β) $2F_1/3$ γ) $F_1/3$ δ) $2F_1$ ε) $3F_1/2$ στ) $3F_1$
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.



Σχ. 4.44

Ροπή αδράνειας

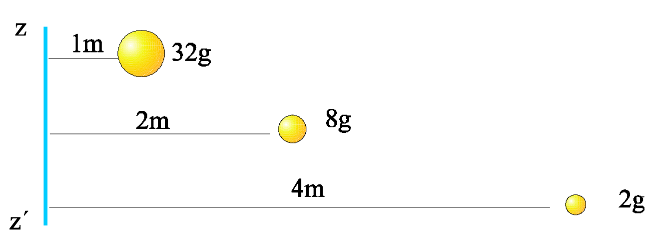
4.12 Η ράβδος του σχήματος 4.45 είναι αβαρής και οι μάζες *m* απέχουν το ίδιο από τον άξονα περιστροφής. Αν η απόσταση των μαζών από τον άξονα περιστροφής διπλασιαστεί, η ροπή αδράνειας του συστήματος
α) παραμένει ίδια.
β) διπλασιάζεται.
γ) τριπλασιάζεται.
δ) τετραπλασιάζεται.



Σχ. 4.45

4.13 Ένας τροχός αυτοκινήτου και ένας τροχός ποδηλάτου περιστρέφονται, χωρίς τριβές, γύρω από τον άξονά τους με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Ποιος από τους δύο τροχούς ακινητοποιείται πιο εύκολα;
Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

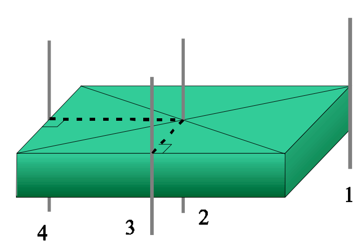
4.14 Στο σχήμα 4.46 φαίνονται τρία υλικά σημεία που περιστρέφονται γύρω από τον άξονα z΄z. Η μάζα και η απόσταση καθενός από τον άξονα περιστροφής φαίνονται στο σχήμα. Να συγκρίνετε τις ροπές αδράνειάς τους ως προς τον άξονα z΄z.



Σχ. 4.46

4.15 Η ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας είναι μικρότερη από τη ροπή αδράνειάς του ως προς οποιονδήποτε άλλο άξονα που είναι παράλληλος σ΄ αυτόν.
Πώς ερμηνεύεται αυτό;

4.16 Γράψτε με αύξουσα σειρά τις ροπές αδράνειας I_1, I_2, I_3 και I_4 του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ως προς τους παράλληλους άξονες 1, 2, 3 και 4 (σχ.4.47)



Σχ. 4.47

Θεμελιώδης νόμος της περιστροφής

4.17 Η γωνιακή επιτάχυνση ενός στερεού που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα είναι

α) ανάλογη με τη ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής.

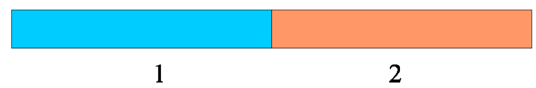
β) αντίστροφα ανάλογη με τη μάζα του σώματος.

γ) ανάλογη με τη δύναμη που ασκείται στο σώμα.

δ) ανάλογη με τη ροπή που ασκείται στο σώμα.

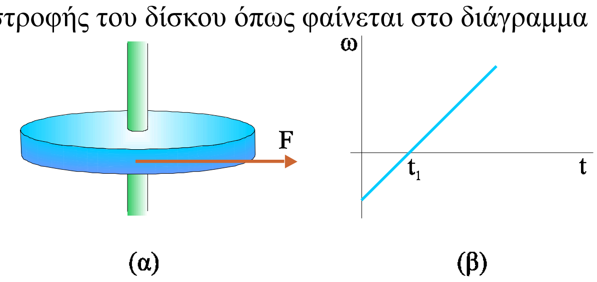
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

4.18 Στο σχήμα 4.48 βλέπουμε την τομή μιας πόρτας με το οριζόντιο επίπεδο. Η πόρτα αποτελείται από δύο διαφορετικά υλικά. Το υλικό 1 έχει μεγαλύτερη πυκνότητα από το υλικό 2. Τα δύο υλικά καταλαμβάνουν τον ίδιο χώρο. Από ποια μεριά πρέπει να τοποθετηθούν οι μεντεσέδες ώστε η πόρτα να ανοίγει και να κλείνει πιο εύκολα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Σχ. 4.48

4.19 Ο οριζόντιος δίσκος του σχήματος 4.49α μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σ΄ αυτόν. Στο δίσκο ασκείται οριζόντια δύναμη F που εφάπτεται στο δίσκο. Η δύναμη F μεταβάλλει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου όπως φαίνεται στο διάγραμμα 4.49β



Σχ. 4.49

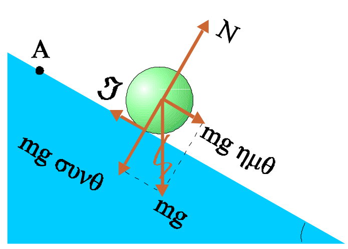
Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές;

α) Η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή.

β) Τη χρονική στιγμή t_1 που η γωνιακή ταχύτητα είναι μηδέν, η δύναμη **F** είναι μηδέν.

γ) Η ροπή της δύναμης αυξάνεται με το χρόνο.

δ) Η δύναμη **F** έχει σταθερό μέτρο.



Σχ. 4.50

4.20 Μια σφαίρα αφήνεται στο σημείο Α πλάγιου επιπέδου και κυλίεται χωρίς ολίσθηση προς τη βάση του (σχ. 4.50). Κατά την κίνησή της αυξάνεται τόσο η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής όσο και η ταχύτητα του κέντρου μάζας της, επομένως η σφαίρα αποκτά και γωνιακή και γραμμική επιτάχυνση. Γράψτε τις δυνάμεις που είναι υπεύθυνες

α) για το ότι η σφαίρα δεν ολισθαίνει.

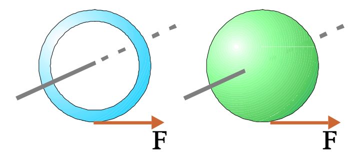
β) για τη γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας.

γ) για τη γραμμική επιτάχυνσή της.

Στροφορμή - διατήρησης της στροφορμής

4.21 Ένα αυτοκίνητο κινείται προς το Βορρά, σε οριζόντιο δρόμο. Ποια είναι η κατεύθυνση της στροφορμής των τροχών του;

4.22 Το σχήμα 4.51 δείχνει ένα συμπαγή κυκλικό δίσκο και ένα κυκλικό δακτύλιο που έχουν την ίδια ακτίνα και την ίδια μάζα και μπορούν να στρέφονται γύρω από οριζόντιο άξονα. Τη στιγμή μηδέν, που τα δύο σώματα είναι ακίνητα, ασκούνται σ' αυτά δυνάμεις του ίδιου μέτρου, εφαπτόμενες στην περιφέρειά τους. Να συγκρίνετε τη στροφορμή τους μια χρονική στιγμή *t*.



Σχ. 4.51

4.23 Η στροφορμή ενός συστήματος σωμάτων δε μεταβάλλεται όταν
- α) η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι μηδέν.
- β) τα σώματα κάνουν μόνο περιστροφική κίνηση.
- γ) οι άξονες περιστροφής των σωμάτων είναι σταθεροί.
- δ) το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν.

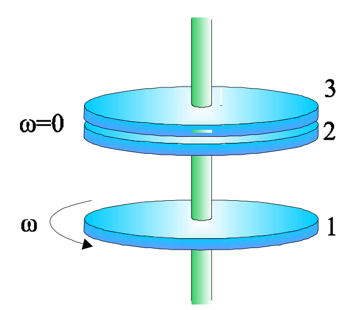
Επιλέξτε το σωστό.

4.24 Ένας καλλιτέχνης του πατινάζ περιστρέφεται. Στην αρχή ο καλλιτέχνης έχει τα χέρια απλωμένα και στη συνέχεια τα συμπτύσσει. Ποια από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστή;
- α) Η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα περιστροφής του αυξάνεται.
- β) Η στροφορμή του αυξάνεται
- γ) Η συχνότητα περιστροφής του αυξάνεται.
- δ) Ο καλλιτέχνης παύει να περιστρέφεται.

4.25 Αν έλιωναν οι κορυφές των πολικών παγόβουνων, θα ανέβαινε λίγο η στάθμη της θάλασσας. Τι επίπτωση θα είχε αυτό στη συχνότητα περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της;
Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

4.26 Ένα παιδί κάθεται σε κάθισμα το οποίο μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές. Στα χέρια του κρατάει τον άξονα ενός τροχού ποδηλάτου. Ο τροχός στρέφεται. Αρχικά το παιδί και το κάθισμα είναι ακίνητα. Τι θα επακολουθήσει, αν το παιδί γυρίσει ανάποδα τον τροχό; Εάν πραγματοποιούσατε το πείραμα, θα διαπιστώνατε ότι απαιτείται μεγάλη δύναμη για να γυρίσετε ανάποδα τον τροχό που στρέφεται, πολύ μεγαλύτερη από τη δύναμη που θα χρειαζόταν αν ο τροχός ήταν ακίνητος. Πώς το εξηγείτε;

4.27 Ο οριζόντιος δίσκος 1 (σχ. 4.52) στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Πάνω στο δίσκο αφήνονται να πέσουν οι δίσκοι 2 και 3 οι οποίοι είναι όμοιοι με τον 1. Η γωνιακή ταχύτητα με την οποία θα περιστρέφεται το σύστημα θα είναι:
α) ω β) 2ω γ) 3ω δ) $\omega/2$ ε) $\omega/3$
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.



Σχ. 4.52

Έργο και ενέργεια κατά την περιστροφή

4.28 Ένας κύβος από πάγο και μία σφαίρα αφήνονται από το ίδιο ύψος σε πλάγιο επίπεδο. Η σφαίρα κυλίεται κατά μήκος του πλάγιου επιπέδου ενώ ο κύβος ολισθαίνει χωρίς τριβή. Οι μάζες των δύο σωμάτων είναι ίσες και οι διαστάσεις τους μικρές σε σχέση με το ύψος από το οποίο αφέθηκαν να κινηθούν . Να συγκρίνετε

1. Το έργο του βάρους κατά την κίνηση των δύο σωμάτων.
2. Την ταχύτητα με την οποία τα σώματα φτάνουν στη βάση του πλαγίου επιπέδου.

4.29 Σε τροχό ο οποίος στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ασκείται δύναμη F που μεταβάλλει τη γωνιακή του ταχύτητα:

α) από 1 rad/s σε 3 rad/s.
β) από 4 rad/s σε 6 rad/s.
γ) από -2 rad/s σε 5 rad/s.
δ) από -3 rad/s σε 4 rad/s.

Σε ποια περίπτωση το έργο της δύναμης είναι μεγαλύτερο;

4.30 Σώμα που αφήνεται από το σημείο Α πλάγιου επιπέδου κυλίεται μέχρι το σημείο Γ, που βρίσκεται στη βάση του πλάγιου επιπέδου. Το σημείο Β είναι ένα ενδιάμεσο σημείο της διαδρομής του σώματος.
Να συμπληρωθεί ο πίνακας.

	Δυναμική ενέργεια	**Κινητική ενέργεια από τη μεταφορική κίνηση**	**Κινητική ενέργεια από την περιστροφική κίνηση**
Α	120 J		
Β		40 J	20 J
Γ		80 J	

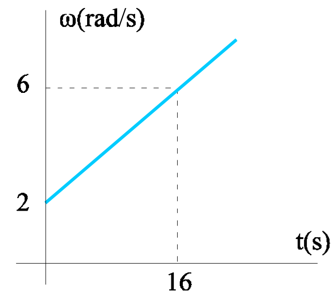
4.31 Συμπληρώστε τον πίνακα:

Σύμβολο	**Όνομα**	**Μέγεθος**[1]	**Μονάδα στο SI**
	Γωνιακή Ταχύτητα		rad/s
			rad/s^2
		διανυσματικό	N m
I			
L			

[1] Γράψτε μία από τις λέξεις μονόμετρο ή διανυσματικό.

Κινηματική του στερεού

4.32 Η γωνιακή ταχύτητα ενός τροχού που στρέφεται μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος 4.53. Ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού; Ποια χρονική στιγμή η γωνιακή ταχύτητα του τροχού θα έχει τιμή 20 rad/s;
[Απ: 0,25 rad/s^2 , 72 s]



Σχ. 4.53

4.33 Ένα όχημα κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα 20 m/s. Οι τροχοί του έχουν ακτίνα 40 cm. Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα με την οποία στρέφονται.
[Απ: 50 rad/s]

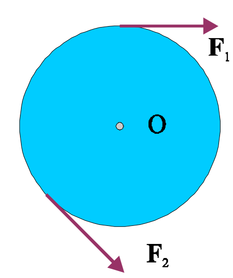
4.34 Ένα όχημα, οι τροχοί του οποίου έχουν ακτίνα $r = 40\,cm$, κινείται με επιτάχυνση 2 m/s^2. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα των τροχών του;
[Απ: 5 rad/s^2]

4.35 Ένας δίσκος ακτίνας 8cm κυλίεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Η ταχύτητα του κέντρου του δίσκου είναι 5 m/s. Υπολογίστε:
α) την ταχύτητα με την οποία κινείται το ανώτερο σημείο του δίσκου.
β) τη συχνότητα με την οποία στρέφεται.
[Απ: 10 m/s , 9,9 Hz]

4.36 Τη χρονική στιγμή μηδέν το κέντρο ενός τροχού, ακτίνας R=20 cm, που κυλίεται, έχει ταχύτητα υ_o=8 m/s. Η ταχύτητα του τροχού μηδενίζεται αφού διανύσει απόσταση x=20 m.
Ποια είναι η γωνιακή επιβράδυνσή του;
[Απ: 8rad/s^2]

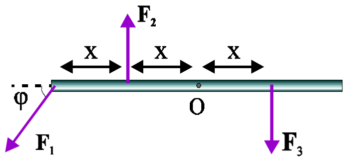
Ροπή δύναμης

4.37 Για να σφίξει μια βίδα, ένας εργάτης χρησιμοποιεί κλειδί μήκους 20cm. Η μέγιστη δύναμη που μπορεί να ασκήσει ο εργάτης είναι 200N. Ποια είναι η μέγιστη ροπή που μπορεί να ασκήσει; Πώς πρέπει να ασκηθεί η δύναμη ώστε η ροπή να είναι μέγιστη;
[Απ : 40 N m]



Σχ. 4.54.

4.38 Ο τροχός του σχήματος 4.54 έχει ακτίνα R= 0,5 m και μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Στον τροχό ασκούνται εφαπτομενικά οι δυνάμεις F_1=20N και F_2=30N. Ποια είναι η συνολική ροπή που δέχεται ο τροχός;
[Απ : 5 N m]

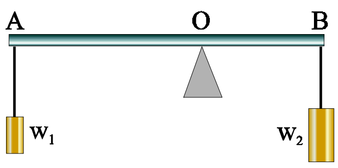


Σχ. 4.55

4.39 Η ράβδος του σχήματος 4.55 έχει αμελητέο βάρος και μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι κάθετος σ' αυτή. Στη ράβδο ασκούνται οι δυνάμεις F_1=20N, F_2=2N και F_3=10N. Να υπολογίσετε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο. Δίνονται: x=2 m και $\varphi=30^o$.
[Απ : 16 Nm]

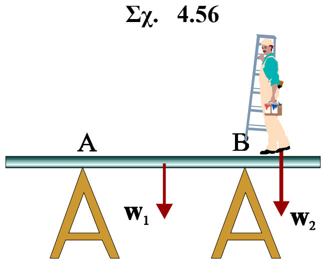
Ισορροπία στερεού σώματος

4.40 Το βαρούλκο ενός πηγαδιού αποτελείται από τύμπανο ακτίνας R_1=20 cm, στο οποίο είναι προσαρμοσμένη χειρολαβή, μήκους R_2=0,5 m. Όταν στρέφεται η χειρολαβή, το σκοινί τυλίγεται στο τύμπανο και έλκει φορτίο (κουβάς με νερό) βάρους 150 Ν. Να υπολογίσετε τη δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στη χειρολαβή.
[Απ : 60 Ν]



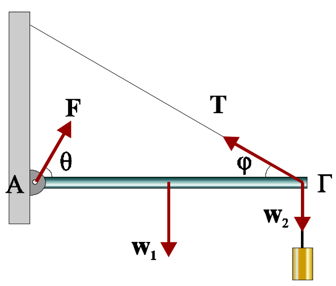
Σχ. 4.56

4.41 Από τα άκρα Α και Β αβαρούς ράβδου, μήκους l=2 m, κρέμονται με σκοινιά δύο βάρη w_1=200 Ν και w_2=300 Ν (σχ. 4.56). Σε ποιο σημείο πρέπει να στηριχτεί η ράβδος για να ισορροπεί οριζόντια;
[Απ : 1,2m από το άκρο Α]



Σχ. 4.57

4.42 Ο ελαιοχρωματιστής του σχήματος 4.57 στέκεται πάνω σε δοκό μήκους l=4 m και βάρους w_1=150 Ν. Η δοκός στηρίζεται στα σημεία Α και Β που απέχουν το καθένα 1 m, από τα άκρα της. Το βάρος του ελαιοχρωματιστή είναι w_2=700 Ν. Σε πόση απόσταση από τις άκρες μπορεί να σταθεί ο ελαιοχρωματιστής χωρίς να ανατραπεί η δοκός;
[Απ : 79 cm]



Σχ. 4.58

4.43 Ομογενής δοκός ΑΓ με μήκος l και βάρος w_1=100 Ν ισορροπεί οριζόντια (σχ. 4.58). Το άκρο Α της δοκού συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο της Γ συνδέεται με τον τοίχο με σκοινί που σχηματίζει γωνία $\varphi=30^o$ με τη δοκό. Στο άκρο Γ κρέμεται με σκοινί σώμα βάρους w_2=40 Ν. Υπολογίστε την τάση του σκοινιού και τη δύναμη που δέχεται η δοκός από τον τοίχο.
[Απ : T=180 Ν, F=163,7 Ν, εφθ=0,32]

Ροπή αδράνειας και θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης


Σχ. 4.59

4.44 Καθένα από τα τέσσερα πτερύγια του έλικα του ελικοπτέρου (σχ.4.59) μπορεί να θεωρηθεί ομογενής ράβδος. Το μήκος κάθε πτερυγίου είναι 6m και η μάζα του 100kg. Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας των τεσσάρων πτερυγίων ως προς τον άξονα περιστροφής τους. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας ομογενούς ράβδου μήκους L, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετη σ΄ αυτή, είναι $I=\frac{1}{12}ML^2$
[Απ: 4800 kg m^2]

4.45 Στην περιφέρεια ενός τροχού, μάζας M=2 kg και ακτίνας R=0,5 m, που στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω=100 rad/s γύρω από τον άξονά του ασκείται σταθερή δύναμη **F**, εφαπτομενική στον τροχό. Ο τροχός σταματάει μετά από 5s. Να υπολογίσετε:

α) τη γωνιακή επιτάχυνση (επιβράδυνση) του τροχού.

β) το μέτρο της δύναμης F.

Η ροπή αδράνειας του τροχού είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.

[Απ : $\alpha = 20\,rad/s^2 \quad F = 10N$]

4.46 Οριζόντια ομογενής ράβδος, μήκους L=1 m, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της (σχ.4.60). Ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου, τη στιγμή που, από την οριζόντια θέση, αφήνεται ελεύθερη;

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονά της είναι $I = \frac{1}{3}ML^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.

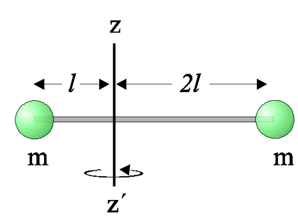
[Απ : 15 rad/s^2]

Σχ. 4.60

Στροφορμή - αρχή διατήρησης της στροφορμής

4.47 Δύο σφαίρες, που η καθεμιά έχει μάζα m=100 g συνδέονται μεταξύ τους με αβαρή ράβδο, όπως στο σχήμα 4.61. Το σύστημα περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο με γωνιακή ταχύτητα ω=16 rad/s, γύρω από τον κατακόρυφο άξονα z΄z. Να υπολογίσετε τη στροφορμή του συστήματος. Δίνεται l=0,8 m.

[Απ: 5,12 kg m^2/s]



Σχ. 4.61

4.48 Υπολογίστε τη στροφορμή ενός τροχού μάζας M=2 kg και ακτίνας R=0,4 m, που στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω=10 rad/s γύρω από τον άξονά του. Θεωρήστε ότι η μάζα του τροχού βρίσκεται συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του.

[Απ : 3,2 kg m^2]

4.49 Οριζόντιος δίσκος ακτίνας 20 cm και μάζας 1 kg στρέφεται με συχνότητα 2 Hz γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο του. Από κάποιο ύψος αφήνεται ένα κομμάτι λάσπη μάζας 100gr, που κολλάει στο δίσκο σε απόσταση 10 cm από τον άξονα περιστροφής. Να υπολογίσετε τη νέα συχνότητα περιστροφής.

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$

[Απ : 1,9 Hz]

Κινητική ενέργεια - έργο

4.50 Ομογενής ράβδος μάζας M=3 kg και μήκους L=40 cm στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω=10 rad/s γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της και είναι κάθετος σ΄ αυτήν. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια της ράβδου. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$.

[Απ : 8 J]

4.51 Ομογενής δίσκος μάζας M=8 kg και ακτίνας R κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο. Το κέντρο του δίσκου κινείται με ταχύτητα υ=5 m/s. Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του δίσκου. Η ροπή αδράνεια του δίσκου ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.

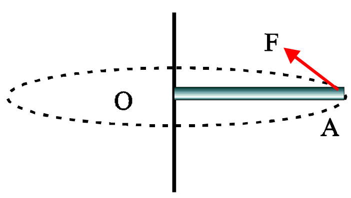
[Απ : 150 J]

4.52 Ένας κινητήρας ασκεί ροπή 4 Nm και στρέφεται με συχνότητα 50 Hz. Ποια είναι η ισχύς του; [Απ : 400π W]

4.53 Ομογενής δίσκος μάζας m=40 kg και ακτίνας R=20 cm, στρέφεται με συχνότητα 5 Hz γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σ΄ αυτόν. α) Πόσο έργο απαιτείται για να ακινητοποιηθεί ο δίσκος; β) Υπολογίστε τη μέση ισχύ της ροπής που πρέπει να ασκηθεί στο δίσκο για να ακινητοποιηθεί σε 5s.

Δίνεται $I = \frac{1}{2}mR^2$ και $\pi^2 \approx 10$.

[Απ: 400J , 80W]



Σχ. 4.62

4.54 Η ράβδος του σχήματος 4.62 που έχει μήκος L=2 m και μάζα M= 3kg, είναι οριζόντια και στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Ο. Στο άλλο άκρο Α της ράβδου ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου F=10 N που είναι διαρκώς κάθετη στη διεύθυνση της ράβδου. Η ράβδος αρχικά ήταν ακίνητη και με την επίδραση της δύναμης F αρχίζει να στρέφεται. Να υπολογίσετε:

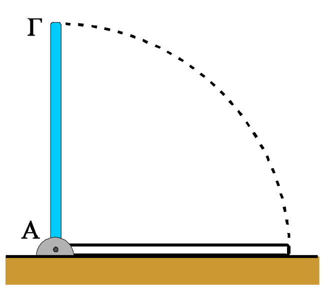
α) Το έργο της δύναμης F, σε μία περιστροφή της ράβδου.

β) Τη γωνιακή ταχύτητα που θα έχει αποκτήσει η ράβδος τη στιγμή κατά την οποία θα έχει ολοκληρώσει μια περιστροφή.

γ) Το ρυθμό με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στη ράβδο (ισχύς της δύναμης) την ίδια στιγμή.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = \frac{1}{3}ML^2$.

[Απ : W=40π J, ω=7,9 rad/s, P=158 W]



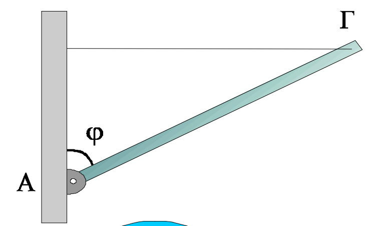
Σχ. 4.63

4.55 Η ομογενής ράβδος ΑΓ, μήκους l=30 cm, είναι κατακόρυφη και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α (σχ. 4.63). Η ράβδος αφήνεται από την κατακόρυφη θέση. Να υπολογίσετε την ταχύτητα που έχει το σημείο

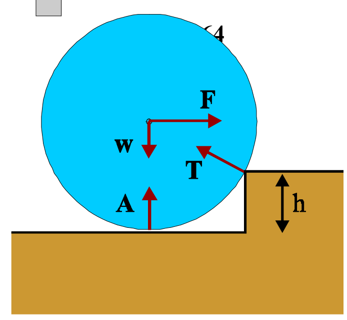
Γ, τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος.
Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στο μέσον της είναι $I = \dfrac{ml^2}{12}$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.
[Απ : 3 m/s]

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

4.56 Ομογενής δοκός ΑΓ μήκους l και βάρους w=100 N ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα 4.64. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που δέχεται η δοκός από το σκοινί και από την άρθρωση Α. Δίνεται φ=60^o.
[Απ : $T = 50\sqrt{3}N,\quad F = 50\sqrt{7}N,\quad$ εφθ $= 2\sqrt{3}/3$]

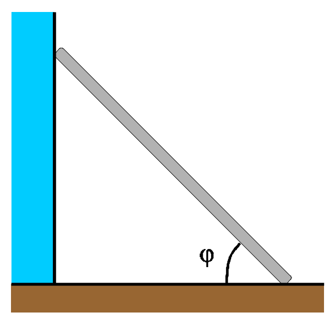


4.57 Το εμπόδιο στο σχήμα 4.65 έχει ύψος h και ο τροχός ακτίνα R και βάρος w. Να υπολογίσετε το ελάχιστο μέτρο της οριζόντιας δύναμης F που πρέπει να ασκηθεί στον τροχό για να υπερπηδήσει το εμπόδιο.
[Απ : $F > w\dfrac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$]



Σχ. 4.65

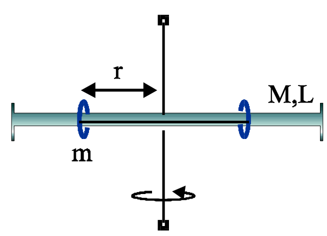
4.58 Ομογενής σκάλα βάρους 400 N μπορεί να ισορροπήσει στηριζόμενη στο έδαφος και στον τοίχο (σχ. 4.66) μόνο όταν η γωνία φ που σχηματίζει με το έδαφος είναι μεγαλύτερη των 30^o. Να υπολογίσετε το συντελεστή οριακής στατικής τριβής της σκάλας με το οριζόντιο επίπεδο. Θεωρήστε αμελητέα την τριβή ανάμεσα στη σκάλα και τον τοίχο.
[Απ : $\sqrt{3}/2$]



Σχ. 4.66

4.59 Ο πίσω τροχός ενός ποδηλάτου έχει ακτίνα R=0,33 m και μάζα 1 kg. Ο τροχός στρέφεται με συχνότητα 100 στροφές ανά λεπτό - χωρίς να έρχεται σε επαφή με το έδαφος. Χρησιμοποιώντας το φρένο ακινητοποιούμε τον τροχό σε 5 s. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης στην επαφή τροχού - φρένου, είναι 0,69. Να υπολογίσετε την κάθετη δύναμη που ασκεί το φρένο στον τροχό. (Θεωρήστε ότι το φρένο έρχεται σε επαφή με τον τροχό μόνο από τη μια του πλευρά και ότι η μάζα του τροχού είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του). [Απ: 1 N]

4.60 Η ράβδος του σχήματος 4.67 είναι οριζόντια και μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το μέσον της. Το μήκος της ράβδου είναι L=1 m και η μάζα της M=0,6 kg. Σε απόσταση r=0,2 m από τον άξονα περιστροφής βρίσκονται δύο μεταλλικοί δακτύλιοι μάζας m=0,1 kg ο καθένας, που συνδέονται μεταξύ τους με ένα νήμα. Το σύστημα στρέφεται γύρω από τον άξονα με συχνότητα f_1=10 Hz. Κάποια στιγμή το νήμα σπάει και οι δακτύλιοι, λόγω αδράνειας, ωθούνται στα άκρα της ράβδου. Υπολογίστε τη νέα συχνότητα με την οποία θα στρέφεται το σύστημα. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I = \dfrac{1}{12}ML^2$.



Σχ. 4.67

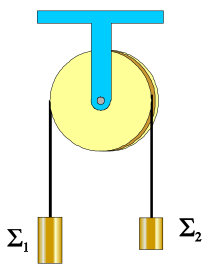
[Απ : 5,8 Hz]

4.61 Η ταχύτητα του κέντρου μάζας μιας σφαίρας που κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο είναι 5 m/s. Η σφαίρα στην πορεία της συναντά πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης 30^o και συνεχίζει πάνω σ΄ αυτό την κίνησή της. Η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση. Να υπολογίσετε το διάστημα που διανύει η σφαίρα στο πλάγιο επίπεδο μέχρι να σταματήσει. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της, είναι $\frac{2}{5}mR^2$. Δίνεται g=10 m/s^2.

[Απ : 3,5 m]

4.62 Συμπαγής σφαίρα κατεβαίνει χωρίς ολίσθηση σε πλάγιο επίπεδο με κλίση 30^o. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της, είναι $I = \frac{2}{5}mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου της σφαίρας.

[Απ : 25/7 m/s^2]

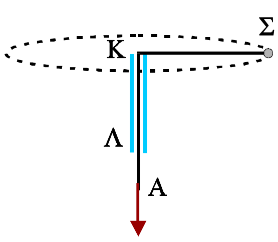


Σχ. 4.68

4.63 Η τροχαλία του σχήματος 4.68 είναι ομογενής με μάζα m=2 kg και ακτίνα R. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζες m_1=3 kg, m_2=1 kg. Να υπολογίσετε με ποια επιτάχυνση θα κινηθούν τα σώματα αν αφεθούν ελεύθερα. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10m/s^2. Το βάρος του νήματος θεωρείται αμελητέο.

<u>Σημείωση:</u> Η τριβή ανάμεσα στην τροχαλία και στο σκοινί είναι αρκετά μεγάλη ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση.

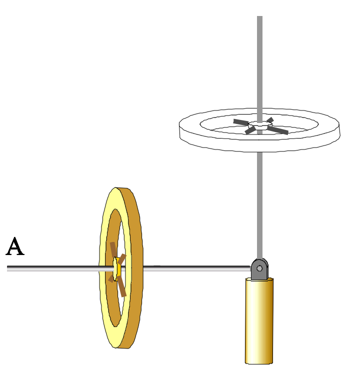
[Απ : α = 4 m/s^2]



Σχ. 4.69

4.64 Το σφαιρίδιο Σ του σχ. 4.69 έχει μάζα 200 gr και διαγράφει κύκλο ακτίνας 30 cm με γωνιακή ταχύτητα 40 rad/s. Το σκοινί στο οποίο είναι δεμένο το σφαιρίδιο περνάει από κατακόρυφο σωλήνα ΚΛ. Ποιο είναι το έργο της δύναμης που πρέπει να ασκήσουμε στην ελεύθερη άκρη του σκοινιού μέχρις ότου η ακτίνα περιστροφής του σφαιριδίου Σ γίνει 15 cm; (Θα θεωρήσετε ότι σ' όλη τη διάρκεια του φαινομένου το σκοινί είναι οριζόντιο και ότι δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ του σκοινιού και του σωλήνα).

[Απ : 43,2 J]

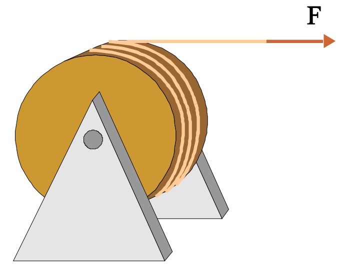


Σχ. 4.70

4.65 Ο τροχός του σχήματος 4.70 έχει ροπή αδράνειας 0,18 kg m^2 και στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω=25 rad/s γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ασκώντας στο σημείο Α του άξονα περιστροφής την κατάλληλη δύναμη τον μετακινούμε ώστε να γίνει κατακόρυφος. Υπολογίστε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του τροχού.

[Απ: $4{,}5\sqrt{2}$ kg m^2/s]

4.66 Στην περιφέρεια μιας ακίνητης τροχαλίας, ακτίνας 20 cm, είναι τυλιγμένο σκοινί. Ασκώντας στο σκοινί οριζόντια δύναμη 20π N περιστρέφουμε την τροχαλία. Βρέθηκε ότι όταν η τροχαλία έχει κάνει τέσσερις περιστροφές έχει συχνότητα f=4 Hz. Να υπολογιστεί η μάζα της. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$. [Απ: 50 kg]



Σχ. 4.71

4.67 Ένας τροχός αφήνεται να κινηθεί σε πλάγιο επίπεδο που σχηματίζει με το οριζόντιο γωνία φ. Για ποιες τιμές του συντελεστή στατικής τριβής η κίνησή του γίνεται χωρίς ολίσθηση; Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς άξονα γύρω από τον οποίο στρέφεται $I = \frac{1}{2}mR^2$.

[Απ: $\mu > \varepsilon\phi\varphi/3$]

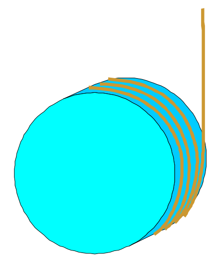
4.68 Το γιο – γιο του σχήματος αποτελείται από κύλινδρο με μάζα m=120 g και ακτίνα R=1,5 cm, γύρω από τον οποίο έχει τυλιχτεί πολλές φορές νήμα (σχ. 4.72). Κρατώντας το ελεύθερο άκρο του νήματος, αφήνουμε τον κύλινδρο να κατεβαίνει. Να υπολογίσετε

α) το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η στροφορμή του κυλίνδρου καθώς κατεβαίνει, και

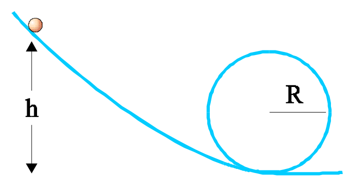
β) την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη στιγμή που έχει ξετυλιχτεί σκοινί μήκους 30cm.

Θεωρήστε το νήμα κατακόρυφο. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$. Δίνεται g=10 m/s^2.

[Απ: α) 6×10^{-3} kg m^2/s β) 2 m/s]

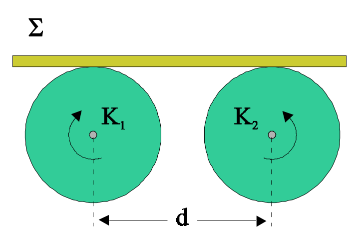

Σχ. 4.72

4.69 Μια μικρή σφαίρα μάζας m και ακτίνας r αφήνεται από το σημείο Α, πάνω σε οδηγό, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.73. Αν η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση, ποιο είναι το μικρότερο ύψος h από το οποίο πρέπει να αφεθεί η σφαίρα για να κάνει ανακύκλωση; Δίνεται R=20 cm. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της είναι $I = \frac{2}{5}mr^2$. Η ακτίνα της σφαίρας είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ακτίνα R. [Απ: 54cm]



Σχ. 4.73

4.70 Οι άξονες δύο ομοίων κυλίνδρων K_1 και K_2 είναι παράλληλοι, βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και σε απόσταση d. Αφήνουμε μία ισοπαχή ομογενή σανίδα Σ πάνω στους κυλίνδρους έτσι ώστε το μέσον της να βρίσκεται πάνω από το μέσον της απόστασης K_1K_2 και με κατάλληλο μηχανισμό βάζουμε τους κυλίνδρους σε περιστροφή, όπως δείχνει το σχήμα 4.74. Αν ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στη σανίδα και στους κυλίνδρους είναι μ, να βρεθεί η περίοδος ταλάντωσης που θα εκτελέσει η σανίδα αν τη μετατοπίσουμε λίγο από τη θέση ισορροπίας της.

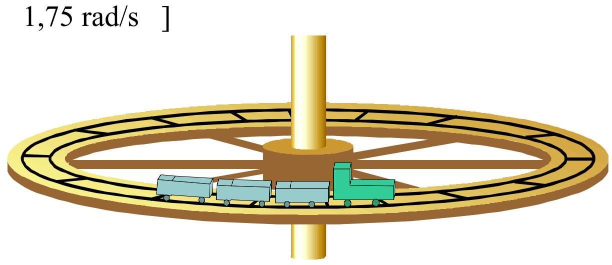


Σχ. 4.74

[Απ: $2\pi\sqrt{\dfrac{d}{2\mu g}}$]

4.71 Ένα ηλεκτρικό τρενάκι μάζας m= 2kg μπορεί να κινείται πάνω σε ένα μεγάλο οριζόντιο τροχό (σχ. 4.75). Ο τροχός μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Αρχικά και ο τροχός και το τρενάκι είναι ακίνητα. Κάποια στιγμή το τρενάκι αρχίζει να κινείται με ταχύτητα υ=8,4m/s. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα με την οποία θα στρέφεται ο τροχός. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονά του είναι I=11,52 kgm^2 και ότι το τρενάκι απέχει από τον άξονα περιστροφής R=1,2 m.

[Απ: 1,75 rad/s]



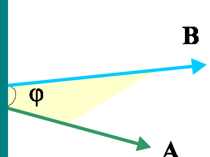
Σχ. 4.74

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Υπάρχει ένα γινόμενο που χρησιμοποιείται ευρέως στη φυσική. Ονομάζεται εξωτερικό γινόμενο. Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων **A** και **B** (συμβολίζεται **A**×**B**) είναι εξ ορισμού ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των **A** και **B**, με μέτρο

$$C = AB\left|\eta\mu\phi\right|$$

όπου φ η γωνία ανάμεσα στα διανύσματα **A** και **B**.



Σχ. 4.76

Η φορά του διανύσματος **C** ορίζεται από το λεγόμενο ΄΄κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία΄΄. Σύμφωνα με αυτόν, το πρώτο από τα δύο διανύσματα (**A**) στρέφεται προς το δεύτερο (**B**), ακολουθώντας τη μικρότερη γωνία ανάμεσα στα διανύσματα. Η φορά του **C** είναι η φορά προς την οποία θα κινηθεί ένας δεξιόστροφος κοχλίας, που στρέφεται όπως το διάνυσμα **A**.

Ένας άλλος τρόπος για να καθοριστεί η φορά του διανύσματος **C** είναι ο κανόνας του δεξιού χεριού: Αν τα δάχτυλα του δεξιού χεριού βρίσκονται κατά μήκος του **A** και καμφθούν για να δείχνουν προς το **B** (μέσω της μικρότερης γωνίας ανάμεσα στα δύο διανύσματα), ο αντίχειρας δείχνει την κατεύθυνση του **C**.

Όπως προκύπτει από την εξίσωση που δίνει το μέτρο του **C**, το εξωτερικό γινόμενο ανάμεσα σε δύο παράλληλα διανύσματα είναι μηδέν.

Αν A_x, A_y, A_z είναι οι συνιστώσες του διανύσματος **Α**, σε τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων και B_x, B_y, B_z, οι συνιστώσες του διανύσματος **Β**, το εξωτερικό γινόμενο σε καρτεσιανές συντεταγμένες δίνεται από την εξίσωση

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

όπου **i**, **j** και **k** τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες x, y και z, αντίστοιχα.

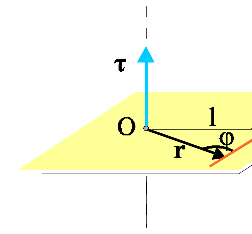
Το εξωτερικό γινόμενο δεν είναι αντιμεταθετικό αλλά

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

Εφαρμογές του εξωτερικού γινομένου

Η ροπή μιας δύναμης **F** ως προς σημείο Ο ορίζεται από τη διανυσματική σχέση

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (4.24)$$



Σχ. 4.77

όπου **r** είναι ένα διάνυσμα με αρχή το σημείο Ο και τέλος ένα σημείο του διανύσματος **F**. Σύμφωνα με τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου η ροπή είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα **r** και **F** και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Το μέτρο της ροπής που προκύπτει από τον ορισμό αυτό είναι

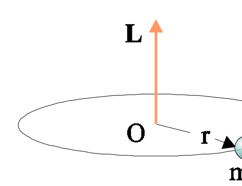
$$\tau = rF \ \eta\mu\phi \qquad (\text{σχ. } 4.77)$$

Αν πάρουμε υπόψη ότι $r\eta\mu\phi = d$ όπου d, η κάθετη απόσταση ανάμεσα στο σημείο Ο και το διάνυσμα **F**, καταλήγουμε στη γνωστή σχέση $\tau = Fd$ (4.25) Επομένως η κατεύθυνση και το μέτρο της ροπής είναι ανεξάρτητα από το σημείο του **F** στο οποίο καταλήγει το διάνυσμα **r**.

Ο ορισμός της ροπής σύμφωνα με τη σχέση (4.24) πλεονεκτεί έναντι της (4.25) δηλαδή της σχέσης με την οποία σε προηγούμενη παράγραφο ορίστηκε το μέγεθος, διότι η (4.24) ορίζει ότι είναι διανυσματικό μέγεθος και δίνει το μέτρο και την κατεύθυνσή της.

Η στροφορμή υλικού σημείου που στρέφεται γύρω από σημείο Ο, ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \boldsymbol{\upsilon} \qquad (4.26)$$



Σχ. 4.78

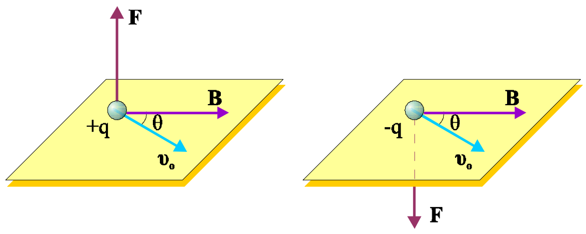
όπου **r** η επιβατική ακτίνα. Παρατηρήστε πάλι ότι αυτός ο τρόπος ορισμού είναι πολύ πιο κομψός από τον ορισμό που δόθηκε στην παράγραφο 4-7. Η εξίσωση (4.26) δίνει πληροφορίες για το μέτρο τη διεύθυνση και τη φορά της στροφορμής.

Πέρα από την απλότητα και την κομψότητα, με την οποία μέσω του εξωτερικού γινομένου ορίστηκαν η ροπή και η στροφορμή, υπάρχει και μια βαθύτερη αιτία που κάνει αυτό τον τρόπο ορισμού τους απαραίτητο. Στη φυσική οι εξισώσεις πέρα από τη συνέπεια των μονάδων και των διαστάσεων πρέπει να έχουν και διανυσματική συνέπεια. Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα μπορούν να προστεθούν ή να εξισωθούν μόνο με διανύσματα. Οι εξισώσεις (4.24) και (4.26) έχουν αυτή τη διανυσματική συνέπεια.

Και άλλα μεγέθη στη φυσική, όπως η δύναμη που ασκεί το μαγνητικό πεδίο σε κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο, ορίζονται με διανυσματικό γινόμενο. Η δύναμη αυτή (δύναμη Lorentz) ορίζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{F} = q\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{B}$$

ΕΝΘΕΤΟ



Σχ. 4.79

ΚΙΒΩΤΙΟ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟ

Σ’ ένα αυτοκίνητο, ανάμεσα στον κινητήρα και τους κινητήριους τροχούς υπάρχουν μηχανισμοί που επιτρέπουν ή εμποδίζουν να μεταδίδεται η στροφική κίνηση του κινητήρα στους τροχούς. Οι μηχανισμοί αυτοί επιτυγχάνουν επίσης διαφορετικές συχνότητες περιστροφής ανάμεσα στον κινητήρα και τις ρόδες. Το σύνολο των διατάξεων αυτών συνιστούν το **σύστημα μετάδοσης του αυτοκινήτου**.

ΤΟ ΑΜΠΡΑΓΙΑΖ (συμπλέκτης)

Το αμπραγιάζ είναι τοποθετημένο ανάμεσα στον κινητήρα και το κιβώτιο των ταχυτήτων. Το αμπραγιάζ επιτρέπει

- **να συμπλέκουμε**, δηλαδή να πραγματοποιούμε μια προοδευτική σύνδεση ανάμεσα στον πρωτεύοντα άξονα περιστροφής του κινητήρα, (στροφαλοφόρο) και το υπόλοιπο σύστημα μετάδοσης.
- **να αποσυμπλέκουμε**, δηλαδή να καταργούμε παροδικά αυτή τη σύνδεση κατά τη διάρκεια των αλλαγών ταχυτήτων.

ΤΟ ΚΙΒΩΤΙΟ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ

Στην περίπτωση ενός κλασικού αυτοκινήτου εάν εφαρμόζαμε απ’ ευθείας τη στροφική κίνηση του στροφαλοφόρου στους τροχούς, τότε, για συνηθισμένες συνθήκες λειτουργίας του κινητήρα (4000 στροφές/min), το αυτοκίνητο θα έπρεπε να κινείται με ταχύτητα 450 km/h. Οι τροχοί πρέπει να περιστρέφονται πιο αργά από το στροφαλοφόρο.

Το κιβώτιο ταχυτήτων πετυχαίνει ακριβώς αυτόν τον υποπολλαπλασιασμό των στροφών.

Το κιβώτιο ταχυτήτων δίνει τη δυνατότητα

- στους τροχούς να στρέφονται πιο αργά από τον κινητήρα,
- να μεταβάλλουμε, ανάλογα με τις ανάγκες της στιγμής, τη ροπή του ζεύγους δυνάμεων[1] που ασκείται στους κινητήριους τροχούς.

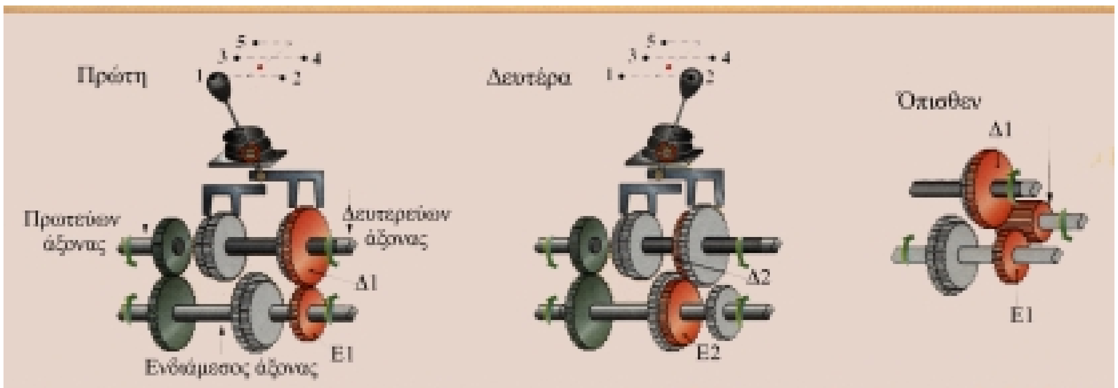
---

[1] Δύο αντίθετες δυνάμεις με ίσα μέτρα και διαφορετικούς φορείς αποτελούν ζεύγος. Το μέτρο της ροπή του ζεύγους είναι ίσο με το γινόμενο του μέτρου των

Το κιβώτιο ταχυτήτων περιλαμβάνει ένα σύστημα γραναζιών διαφορετικών διαμέτρων.

Αποσυμπλέκουμε πατώντας το αμπραγιάζ. Με το μοχλό των ταχυτήτων φέρνουμε σε επαφή ένα γρανάζι του δευτερεύοντος άξονα (έξοδος του κιβωτίου) με ένα του ενδιαμέσου άξονα (σχ. 4.80). Αφήνουμε το αμπραγιάζ, ο στροφαλοφόρος θέτει σε περιστροφή τον ενδιάμεσο άξονα (είσοδος του κιβωτίου) κι αυτός με τη σειρά του το δευτερεύοντα άξονα.

Στην πρώτη,
το γρανάζι Δ_1 του δευτερεύοντος άξονα συναρμόζει με το γρανάζι E_1 του ενδιάμεσου (σχ. 4.80). Η ακτίνα του γραναζιού Δ_1 $\left(R_{\Delta 1}\right)$ είναι περίπου

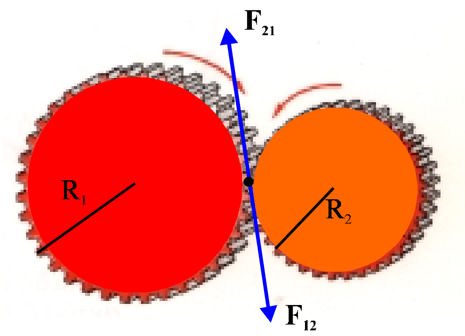


Σχ. 4.80

τέσσερις φορές μεγαλύτερη από την ακτίνα του γραναζιού E_1 $\left(R_{E1}\right)$. Ανάμεσα στις γωνιακές ταχύτητες περιστροφής των γραναζιών ισχύει η σχέση $\dfrac{\omega_{\Delta 1}}{\omega_{E1}} = \dfrac{R_{E1}}{R_{\Delta 1}}$ από την οποία προκύπτει ότι η συχνότητα περιστροφής του Δ_1 είναι τέσσερις φορές μικρότερη από αυτήν του E_1. Ταυτόχρονα η ροπή του ζεύγους που στρέφει τα γρανάζια θα είναι τέσσερις φορές μεγαλύτερη για το Δ_1 σε σχέση με το E_1 γιατί ενώ οι δυνάμεις είναι ίσες η απόσταση μεταξύ των φορέων τους τετραπλασιάζεται στο Δ_1 (σχ. 4.81).

Το αυτοκίνητο δε μπορεί να αναπτύξει μεγάλες ταχύτητες, όμως προέκυψε ένα άλλο όφελος. Το κινητήριο ζεύγος δυνάμεων μετασχηματίσθηκε σ' ένα ζεύγος, που σε τελική ανάλυση ασκείται στους τροχούς, με μια πολύ σημαντικότερη ροπή. Είναι ικανό να ξεκινήσει το αυτοκίνητο ή να το ανεβάσει σε ανηφοριές με μεγάλη κλίση.

δυνάμεων επί την κάθετη απόσταση μεταξύ των φορέων τους $\left(\tau = F \cdot l\right)$. Η ροπή ενός ζεύγους είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο αναφοράς.



$F_{12}=F_{21}$ $\omega_1<\omega_2$ $\tau_1>\tau_2$

Σχ.4.81

Πατώντας το αμπραγιάζ αποσυμπλέκουμε το στροφαλοφόρο από το κιβώτιο ταχυτήτων και με το μοχλό των ταχυτήτων μετακινούμε το δευτερεύοντα άξονα σε σχέση με τον ενδιάμεσο.

Στη δευτέρα,

το γρανάζι Δ_2 συναρμόζει με το γρανάζι E_2 (σχ. 4.80). η σχέση των ακτίνων τώρα είναι $\frac{R_{\Delta 2}}{R_{E2}}=\frac{2}{1}$. Η συχνότητα περιστροφής του Δ_2 είναι η μισή αυτής του E_2 και η ροπή του κινητήριου ζεύγους διπλάσια.

Στην τρίτη ο δευτερεύων άξονας στρέφεται με συχνότητα ίση με τα 2/3 αυτής του ενδιαμέσου, στην τετάρτη οι συχνότητες είναι περίπου ίσες και στην πέμπτη η περιστροφή είναι γρηγορότερη στην έξοδο του κιβωτίου ταχυτήτων απ' ότι στην είσοδο. Η πέμπτη ταχύτητα επιτρέπει να πετυχαίνουμε μεγάλες ταχύτητες καταναλώνοντας σχετικά λιγότερο καύσιμο. Όταν έχουμε πέμπτη ταχύτητα, όμως, η ροπή του ζεύγους έχει μειωθεί πολύ και είναι δύσκολο να επιταχύνουμε το αυτοκίνητο αν χρειαστεί, π.χ. σ' ένα προσπέρασμα.

Στην όπισθεν,

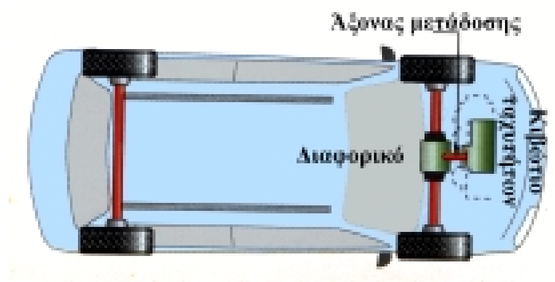
ο δευτερεύων άξονας γυρνάει με ανάποδη φορά από αυτήν που γυρνούσε στις άλλες ταχύτητες. Αυτό επιτυγχάνεται με τη μεσολάβηση ενός τρίτου γραναζιού ανάμεσα στο δευτερεύοντα άξονα και τον ενδιάμεσο (σχ. 4.80).

Οι σχέσεις ακτίνων των γραναζιών ποικίλουν από αυτοκίνητο σε αυτοκίνητο.

ΑΞΟΝΑΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ

Ανάμεσα στην έξοδο από το κιβώτιο ταχυτήτων και τους κινητήριους τροχούς βρίσκουμε έναν ή περισσότερους άξονες μετάδοσης και το διαφορικό.

Όταν το αυτοκίνητο στρίβει ο τροχός που βρίσκεται στο εσωτερικό της στροφής διανύει μικρότερο διάστημα από τον εξωτερικό τροχό. Εφόσον το τόξο της στροφής για τον εσωτερικό τροχό είναι μικρότερο θα πρέπει να στρέφεται εκείνη την ώρα με μικρότερη συχνότητα από τον εξωτερικό.



Σχ. 4.82

Διαφορικό είναι εκείνος ο μηχανισμός που βρίσκεται στο μέσον του άξονα κίνησης (σχ. 4.82) και μοιράζει τις στροφές στους δυο τροχούς ώστε να γυρίζει ο καθένας με την κατάλληλη συχνότητα. Το διαφορικό επίσης μοιράζει στους τροχούς την ισχύ που φτάνει από τον κινητήρα.

Αν ο άξονας κίνησης ήταν μονοκόμματος το αυτοκίνητο θα είχε πολύ βαρύ τιμόνι, θα ήταν πολύ δύσκολο στην οδήγηση και θα έφθειρε πολύ γρήγορα τα ελαστικά του.