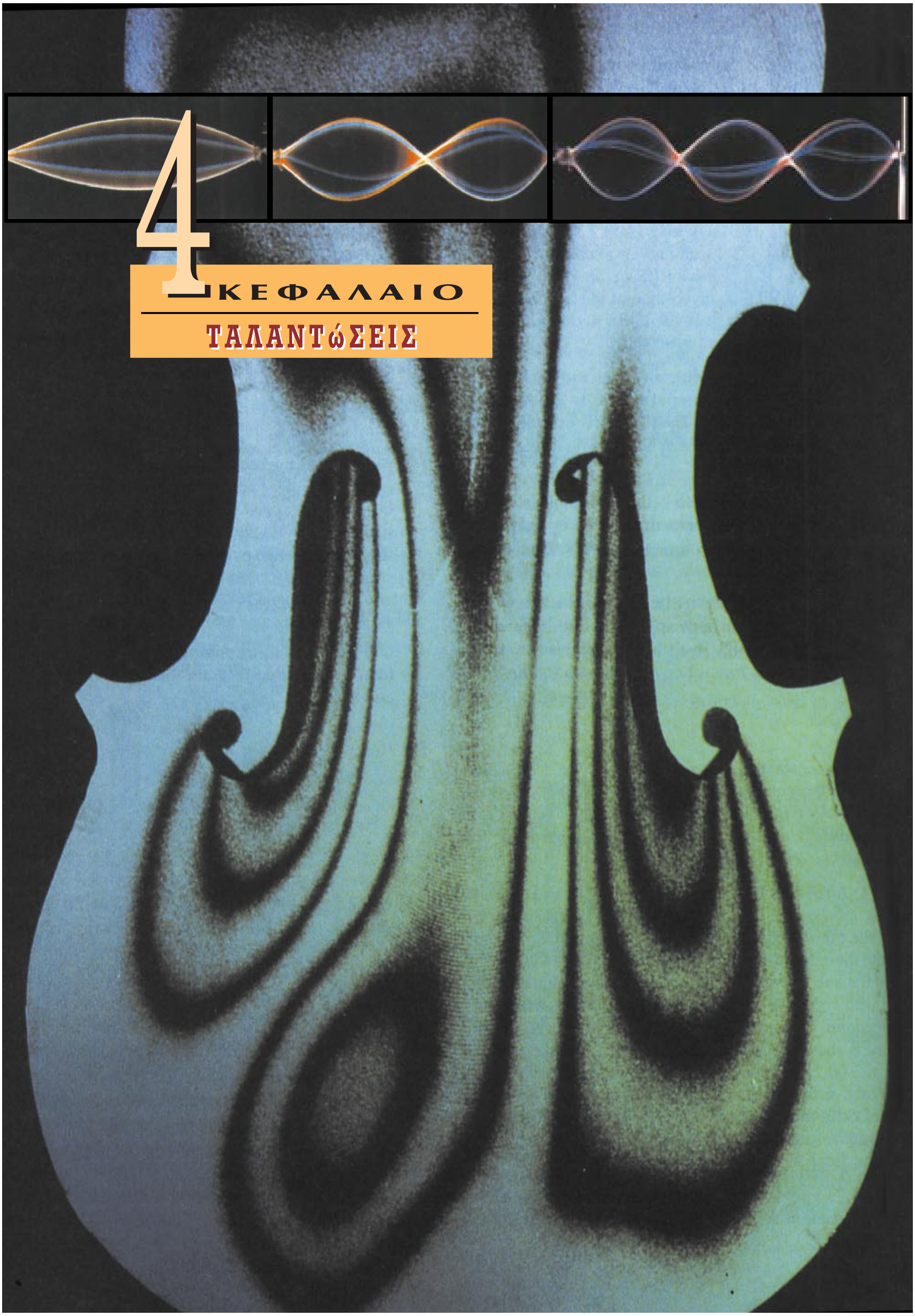
4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

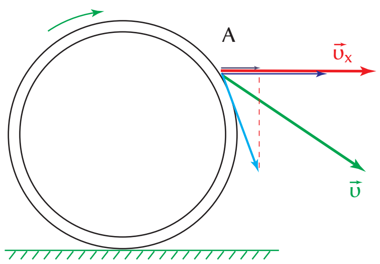


ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Περιοδικά φαινόμενα και περιοδικές κινήσεις

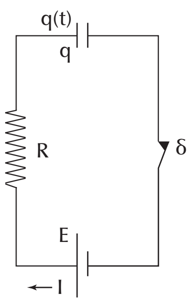
Φυσικά φαινόμενα και χρόνος

Όλα τα φαινόμενα που παρατηρούμε γύρω μας χρειάζονται κάποιο συγκεκριμένο χώρο, για να συμβούν ή, κάποτε, και για να διαδοθούν μέσα σε αυτόν· οπωσδήποτε, όμως, εξελίσσονται με το χρόνο, δηλαδή δε συμβαίνουν ακαριαία, αλλά απαιτούν κάποιο χρονικό διάστημα .



Εικ. 1

Στη διάρκεια της χρονικής εξέλιξης ενός φαινομένου κάποια φυσικά μεγέθη που το χαρακτηρίζουν μεταβάλλονται. Για παράδειγμα, η θέση, η ταχύτητα ή η επιτάχυνση του σημείου Α του τροχού μεταβάλλονται με το χρόνο κατά τη διάρκεια της κίνησής του (βλ. Εικ. 1). Επίσης, το φορτίο στους οπλισμούς ενός πυκνωτή μεταβάλλεται κατά τη σταδιακή φόρτιση του πυκνωτή με τη βοήθεια μίας ηλεκτρικής πηγής και με την παρεμβολή ενός αντιστάτη (βλ. Εικ. 2).



Εικ. 2

Τα μεγέθη που μεταβάλλονται με το χρόνο μπορούν να θεωρηθούν ως συναρτήσεις του χρόνου . Για να το συμβολίσουμε αυτό, γράφουμε :

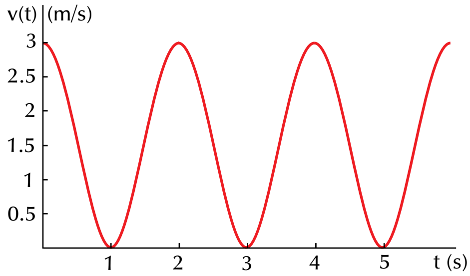
$$x=x(t),\ \upsilon=\upsilon(t),\ \alpha=\alpha(t)$$

π.χ., για τη θέση, την ταχύτητα ή την επιτάχυνση ενός κινητού σε μία κίνηση, ή:

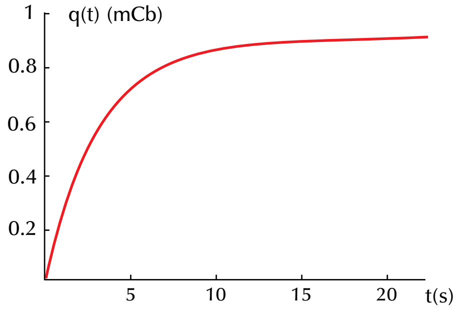
$$q=q(t),\ \Delta V=\Delta V(t)$$

για το φορτίο και για τη διαφορά δυναμικού στους οπλισμούς ενός πυκνωτή κατά τη διάρκεια που τον φορτίζουμε. Τη μεταβολή των παραπάνω μεγεθών συνήθως την παριστάνουμε με τη βοήθεια κατάλληλων διαγραμμάτων:

Διαγράμματα



Εικ. 3



Εικ. 4

Περιοδικά φαινόμενα

Σημαντική θέση μεταξύ των φυσικών φαινομένων έχουν αυτά τα οποία επαναλαμβάνονται, παρουσιάζοντας την ίδια ακριβώς εικόνα ή κατάσταση, κατά συγκεκριμένα και ίσα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα . Αυτά τα φαινόμενα τα ονομάζουμε **περιοδικά** .

Τέτοια φαινόμενα είναι ‘ο κύκλος’ της σελήνης, του οποίου οι φάσεις επαναλαμβάνονται κάθε 28, περίπου, ημέρες, η κίνηση του τροχού ενός ποδηλάτου που κινείται ομαλά, κατά την οποία κάθε σημείο του τροχού έρχεται σε επαφή με το δρόμο ύστερα από ορισμένη χρονική διάρκεια . Ακόμη, οι αναλαμπές του φλάς του αυτοκινήτου ή ενός φάρου σε ένα ακρωτήριο ή σε μία βραχονησίδα, ο σταθερός βηματισμός ενός ανθρώπου, το σκαμπανέβασμα ενός πλοίου που ταξιδεύει, η πλημμυρίδα και η άμπωτη στις ακτές χωρών ή περιοχών όπως η Πορτογαλία, η Νότια Γαλλία, η Νορμανδία ή η Ολλανδία, ή η αλλαγή της φοράς της ροής του νερού κάθε έξι ώρες στον πορθμό του Ευρίπου είναι όλα **περιοδικά φαινόμενα .**

Περίοδος

Ο χρόνος ο οποίος χρειάζεται για να εμφανιστεί η ίδια ακριβώς κατάσταση κατά την εξέλιξη των περιοδικών φαινομένων, ονομάζεται περίοδος .

Συχνότητα

Όσο πιο μικρή είναι η περίοδος ενός περιοδικού φαινομένου τόσο πιο συχνά επαναλαμβάνεται μία συγκεκριμένη κατάσταση στη μονάδα του χρόνου.

Προκειμένου να μπορούμε να εκφράζουμε άμεσα το πόσο συχνά επαναλαμβάνεται μία συγκεκριμένη κατάσταση στη μονάδα του χρόνου κατά την διάρκεια ενός περιοδικού φαινομένου, ορίζουμε και το φυσικό μέγεθος συχνότητα, f, ως:

$$f = \frac{\text{αριθμός επαναλήψεων}}{\text{αντίστοιχη χρονική διάρκεια}} \qquad (4.1)$$

Τα δύο μεγέθη, περίοδος και συχνότητα, συνδέονται μεταξύ τους : εάν στη σχέση (4.1) θεωρήσουμε, ειδικότερα, ως αριθμό επαναλήψεων τη μία (επανάληψη), τότε, από τον ορισμό της περιόδου, η αντίστοιχη χρονική διάρκεια είναι η περίοδος, και άρα θα έχουμε :

$$f = \frac{1}{T} \qquad (4.2)$$

Μονάδες συχνότητας: από την παραπάνω σχέση ορίζεται ως μονάδα συχνότητας στο Διεθνές Σύστημα (S.I.) η **1 επανάληψη (ή “κύκλος”) ανά 1 δευτερόλεπτο:**

$$\{ f \}_{S.I.} := \frac{1\ c}{1\ s} = 1\ s^{-1} \qquad (4.3)$$

[1] *Heinrich Rudolph Hertz, 1857-1894: ασχολήθηκε με τα ραδιοκύματα, το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, της καθοδικές ακτίνες και την κυματική φύση του φωτός.*

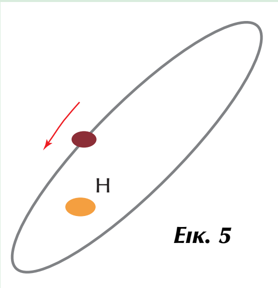
δηλαδή, το $1s^{-1}$, το οποίο ονομάζεται και Hertz, προς τιμήν του Γερμανού Φυσικού[1], και συμβολίζεται με: 1 Hz.

Αριθμητική εφαρμογή: Η περίοδος περιστροφής της γής γύρω από τον άξονά της είναι περίπου 24 ώρες. Προσδιορίστε την αντίστοιχη συχνότητα περιστροφής σε Hz.

$$f \cong \frac{1\,c}{24\ h} = \frac{1\,c}{24\,h \times 60\ \dfrac{min}{h}} = \frac{1\,c}{24\ \times 60\ min \times 60\ \dfrac{s}{min}} = \frac{1}{24\ \times 36}\, 10^{-2}\, s^{-1}$$

$$f \cong \frac{1}{24\ \times 36}\, 10^{-2}\, s^{-1} \cong 1.2 \times 10^{-3} \times 10^{-2}\, s^{-1} = 1.2 \times 10^{-5}\, Hz$$

Περιοδικά φαινόμενα στο μακρόκοσμο

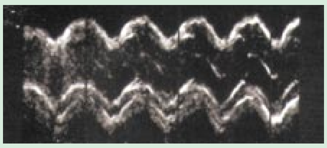


Εικ. 5

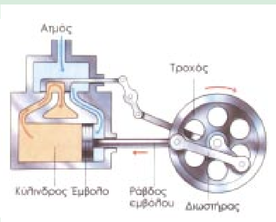
Οι κινήσεις των πλανητών γύρω από τον ήλιο σε ελλειπτικές τροχιές, η κίνηση των φυσικών δορυφόρων γύρω από τους πλανήτες, η σύνθετη κίνηση των δορυφόρων γύρω από τον ήλιο και η κίνηση των τεχνητών δορυφόρων γύρω από τη γη, καθώς επίσης και η κίνηση όσων κομητών εκτελούν ελλειπτικές τροχιές (βλ. Εικ. 5), για να αναφέρουμε μερικά, μόνο, παραδείγματα από το μακρόκοσμο, αποτελούν περιοδικά φαινόμενα .

Περιοδικά φαινόμενα και καθημερινή ζωή

Το “χτύπημα” της καρδιάς μας, πού απεικονίζεται σε ένα καρδιογράφημα στην Εικόνα 6, αποτελεί περιοδικό φαινόμενο· επίσης και οι παλινδρομικές κινήσεις των εμβόλων στη μηχανή του αυτοκινήτου μας ή στις παλιές ατμομηχανές των τρένων (βλ. Εικ. 7) αποτελούν και αυτές περιοδικά φαινόμενα .



Εικ. 6



Εικ. 7

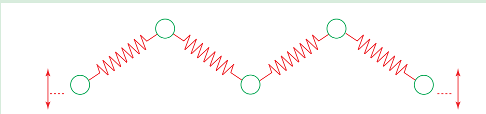

Εικ. 8

Το μικρό πουλί «κολιμπρί» κινεί παλινδρομικά τα φτερά του με συχνότητα μέχρι 70 επαναλήψεις ανά δευτερόπλεπτο (βλ. Εικ. 8), ενώ τα κουνούπια καταφέρνουν αυτή την κίνηση με συχνότητα μερικών εκατοντάδων επαναλήψεων ανά δευτερόλεπτο.

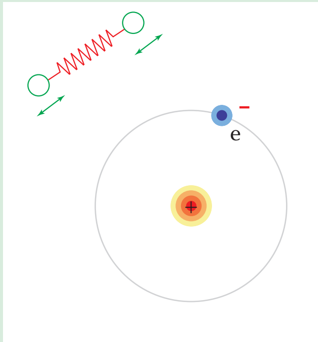
Η μεμβράνη των αυτιών μας πάλλεται περιοδικά, όταν δέχεται ένα ηχητικό ερέθισμα, όπως άλλωστε συμβαίνει και σε κάθε μικρή περιοχή του αέρα γύρω μας, ο οποίος πάλλεται περιοδικά, όταν μεταφέρει ένα ηχητικό μήνυμα.

Περιοδικά φαινόμενα στον μικρόκοσμο

Τα άτομα και τα μόρια της ύλης πάλλονται, εκτελώντας παλινδρομικές κινήσεις γύρω από μία μέση θέση ισορροπίας· αυτό είναι ένα γενικό χαρακτηριστικό του μικρόκοσμου: τα πάντα εκτελούν κινήσεις, πολλές από τις οποίες είναι περιοδικές (βλ. Εικ. 9). Το ίδιο συμβαίνει και στα κρυσταλλικά πλέγματα (βλ. Εικ. 10).



Εικ. 10



Εικ. 9

Περιοδικές κινήσεις

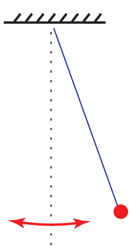
Από τα περιοδικά φαινόμενα θα περιοριστούμε ειδικότερα σε αυτά πού έχουν σχέση με την κίνηση, τα οποία ονομάζουμε **περιοδικές κινήσεις.**

Η μελέτη των περιοδικών κινήσεων θα μας διευκολύνει, αργότερα, και στη μελέτη των γενικότερων περιοδικών φαινομένων .

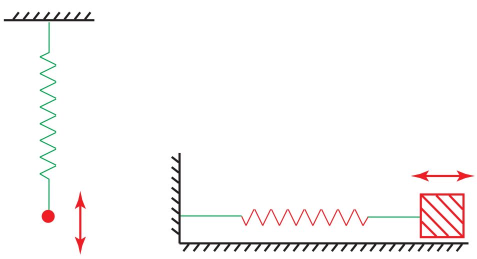
Μοντέλα περιοδικών κινήσεων

Από τις περιοδικές κινήσεις αυτή που έχει τη μεγαλύτερη σημασία για τη μελέτη και των υπολοίπων είναι η **ομαλή κυκλική κίνηση,** την οποία ήδη γνωρίζετε.

Επίσης, αναφέρουμε τη δισδιάστατη περιοδική κίνηση σώματος που είναι δεμένο στην άκρη νήματος **(:"απλό εκκρεμές")** (βλ. Εικ. 11), καθώς επίσης και **την κίνηση σώματος στερεωμένου στο άκρο "ιδανικού" ελατηρίου (οριζόντιου ή κατακόρυφου)** (βλ. Εικ. 12) :



Εικ. 11



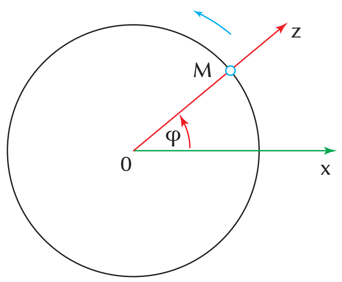
Εικ. 12

Τα παραπάνω **μοντέλα** είναι τα απλούστερα για τη μελέτη της **απλής αρμονικής ταλάντωσης,** με την οποία θα ασχοληθούμε, κατά κύριο λόγο, στις ενότητες που ακολουθούν.

Η Ομαλή Κυκλική Κίνηση

Από την προηγούμενη τάξη έχετε, ήδη, μελετήσει μία περιοδική κίνηση, την **ομαλή κυκλική κίνηση,** καθώς και τις άμεσες εφαρμογές που έχει αυτή στην καθημερινή ζωή, με την εκτεταμένη χρήση τροχών στα τροχοφόρα οχήματα, στην κατασκευή διάφορων κυκλικών μηχανισμών ή συνδυασμών τους (σε μηχανικά ρολόγια ή σε πάσης φύσεως μηχανές), στη δορυφορική τεχνολογία, με την εγκατάσταση γεωστατικών (ή μη) τηλεπικοινωνιακών δορυφόρων ή διαστημικών σταθμών .

Η ομαλή κυκλική κίνηση αποτελεί την απλούστερη περιοδική κίνηση, η οποία, μάλιστα, έχει το πλεονέκτημα να μπορεί να περιγραφεί με πολύ απλά Μαθηματικά .



Εικ. 13

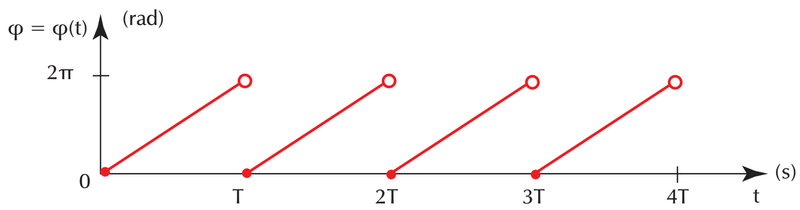
Πέρα όμως από το άμεσο ενδιαφέρον για την κίνηση αυτή και τις εφαρμογές της, και από το γεγονός ότι είναι απλή, η ομαλή κυκλική κίνηση (μία ή περισσότερες) “κρύβεται” πίσω από κάθε άλλη περιοδική κίνηση ή φαινόμενο, βοηθώντας πολύ στην ανάλυση και στη μελέτη του. Γι’ αυτό το λόγο η σημασία της είναι θεμελιώδης .

Στην ομαλή κυκλική κίνηση αυτό πού επαναλαμβάνεται περιοδικά είναι η θέση (αλλά και η ταχύτητα και η επιτάχυνση) του κινητού πάνω στην κυκλική τροχιά (βλ. Εικ. 13). Η θέση του κινητού σε κάθε χρονική στιγμή μπορεί να εκφραστεί από τη γωνία, $\varphi = \varphi(t)$, της οποίας η αρχική πλευρά, *Ox*, είναι σταθερή και η τελική πλευρά, Oz, παρακολουθεί το κινητό:

Προφανώς, εάν T είναι η περίοδος της ομαλής κυκλικής κίνησης και t_0 μία συγκεκριμένη αλλά τυχαία χρονική στιγμή, θα ισχύει:

$$\varphi=\varphi(t_0+T)=\varphi=\varphi(t_0+2T)=\varphi=\varphi(t_0+3T)=...$$

Το ίδιο μπορούμε να το εκφράσουμε και με ένα διάγραμμα (βλ. Εικ.14):



Εικ. 14

Στο διάγραμμα εύκολα μπορούμε να αναγνωρίσουμε ότι η τιμή της γωνίας θέσης του κινητού (ή της γωνιακής θέσης), $\varphi(t) = \omega\, t$, πάνω στην κυκλική τροχιά παρουσιάζει περιοδικότητα. Επίσης, μπορούμε να δούμε την περίοδο, Τ, επανεμφάνισης της ίδιας τιμής της.

Η γωνιακή θέση του κινητού, που, όπως φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα της Εικόνας 14, μεταβάλλεται περιοδικά με το χρόνο, είναι, όπως λέμε, περιοδική συνάρτηση (του χρόνου) .

4.1 Περιοδικές κινήσεις και ομαλή κυκλική κίνηση – Η απλή αρμονική ταλάντωση

Στην ενότητα αυτή θα δούμε πώς μπορούμε να συσχετίσουμε απλά περιοδικά φαινόμενα με απλές περιοδικές κινήσεις που γίνονται πάνω σε μία ευθεία, και, στη συνέχεια, τις τελευταίες με την ομαλή κυκλική κίνηση .

Ειδικότερα, θα ασχοληθούμε με την εισαγωγή και τη μελέτη της απλής αρμονικής ταλάντωσης ως μίας απλής περιοδικής κίνησης .

4.1 – 1 Μελέτη των περιοδικών κινήσεων με τη στροβοσκοπική μέθοδο

Εικ. 15

Α. *Το ηλεκτρονικό στροβοσκόπιο και η λειτουργία του:*

Στη φωτογραφία (Εικ. 15) βλέπετε μία συσκευή που το αποτέλεσμα της λειτουργίας της μοιάζει πολύ με αυτήν του φλάς του αυτοκινήτου: δίνει « στιγμιαίες » αναλαμπές κατά ορισμένα και ίσα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα.

Δηλαδή, το αποτέλεσμα της λειτουργίας της είναι ένα περιοδικό φαινόμενο: ο χρόνος μεταξύ δύο αναλαμπών της συσκευής αποτελεί την περίοδο του περιοδικού φαινομένου, ενώ ο αριθμός των αναλαμπών στη μονάδα του χρόνου αποτελεί την αντίστοιχη συχνότητα. Η συσκευή ονομάζεται ηλεκτρονικό στροβοσκόπιο και η συγκεκριμένη μπορεί να παράγει συχνότητες αναλαμπών από 1Hz έως 260 Hz. Η συχνότητα επιλέγεται ή μπορεί να αλλάζει κατά συνεχή τρόπο, ανάλογα με το τι θέλουμε να διερευνήσουμε κατά τη διάρκεια ενός πειράματος.

Β. *Πώς μπορούμε να μάθουμε εάν μία κίνηση είναι περιοδική και πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε την άγνωστη συχνότητά της; Η χρήση του στροβοσκοπίου:*

Για ορισμένες κινήσεις μπορούμε, παρατηρώντας τες, να διαπιστώσουμε κατά πόσον είναι περιοδικές και να προσδιορίσουμε εύκολα τη συχνότητά τους, μετρώντας απλώς τον αριθμό των επαναλήψεών τους σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Σε πολλές όμως κινήσεις συμβαίνει η συχνότητά τους να είναι πολύ μεγαλύτερη, και γι’ αυτό η απαρίθμηση των επαναλήψεών τους με το συγκεκριμένο τρόπο που αναφέραμε είναι αδύνατη· τότε χρησιμοποιούμε το στροβοσκόπιο.

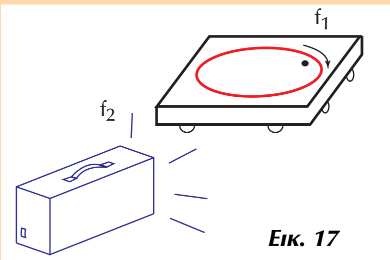
1η Πειραματική δραστηριότητα

α. Προσδιορίστε, χρησιμοποιώντας ένα χρονόμετρο, τη συχνότητα περιστροφής του πλατό ενός πικάπ (βλ. Εικ. 16) - το οποίο, όταν λειτουργεί κανονικά, εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με συχνότητα: $33.5 \frac{c}{min}$ και εναλλακτικά $45 \frac{c}{min}$ - και δώστε, σε κάθε περίπτωση, το αποτέλεσμα σε Hz.

Εικ. 16

β. Στη συνέχεια, τοποθετήστε στο πλατό του πικάπ ένα ελαφρύ μικρό αντικείμενο ή βάλτε επάνω του ένα σημάδι, χρησιμοποιώντας λευκή ή μεταλλική μελάνη .

Τοποθετήστε το πικάπ και το στροβοσκόπιο σε χώρο που δε φωτίζεται επαρκώς και θέστε τα ταυτόχρονα σε λειτουργία, κατευθύνοντας τις περιοδικές αναλαμπές του στροβοσκοπίου προς το σημάδι ή προς το αντικείμενο που βρίσκεται πάνω στο περιστρεφόμενο πλατό (βλ. Εικ. 17).



Εικ. 17

Ρυθμίστε τη συχνότητα του στροβοσκοπίου στην τιμή εκείνη την οποία προηγουμένως προσδιορίσατε, σε Hz, ως συχνότητα περιστροφής του πλατό, και προσπαθήστε να επιτύχετε μία καλύτερη ρύθμιση στο στροβοσκόπιο, ώστε το σημάδι στο περιστρεφόμενο πλατό να φαίνεται ακίνητο, στην ίδια πάντα θέση .

- Ποια συμπεράσματα μπορούν να προκύψουν από τις προηγούμενες παρατηρήσεις σας ;

γ. Επαναλάβετε το προηγούμενο (βλ. Εικ. 17), διπλασιάζοντας τη συχνότητα αναλαμπών του στροβοσκοπίου και, ακολούθως, υποδιπλασιάζοντάς την.

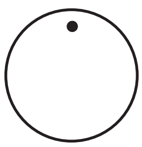
- Τι παρατηρείτε τώρα και τι συμπεραίνετε ;

Από την προηγούμενη πειραματική δραστηριότητα, και κυρίως από το δεύτερο ερώτημα, διαπιστώνουμε ότι όταν οι δύο γνωστές συχνότητες – f_1 - της περιστροφής του πλατό του πικάπ f_2 και των περιοδικών αναλαμπών του ηλεκτρονικού στροβοσκοπίου – είναι ίδιες, τότε το σημάδι πάνω στο πλατό φαίνεται ακίνητο.

Αντίστροφα: για μία άγνωστη κίνηση, όταν, φωτίζοντάς την περιοδικά στο σκοτάδι με το στροβοσκόπιο, διαπιστώσουμε ότι για κάποια συγκεκριμένη γνωστή συχνότητα του στροβοσκοπίου αυτή εμφανίζεται ως ακινητοποιημένη ή ως περιοδική, τότε η άγνωστη κίνηση είναι περιοδική με περίοδο :

α. την ίδια ή υπο-πολλαπλάσιο της περιόδου T_2 του στροβοσκοπίου, όταν έχουμε (βλ. Εικ. 19) φαινομενική ακινησία, και

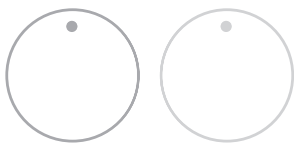
β. πολλαπλάσιο της T_2, όταν έχουμε (βλ. Εικ. 20) φαινομενική περιοδική κίνηση διαφορετικής περιόδου από αυτήν του στροβοσκοπίου .



$T_{φαιν} = 0$

$T_1 = T_2$

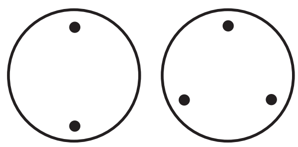
Εικ. 18



$T_{φαιν} = 0$

$T_1 = \frac{T_2}{2}$ $\quad T_1 = \frac{T_2}{3}$

Εικ. 19



$T_{φαιν} \neq 0$

$T_1 = 2T_2$ $\quad T_1 = 3T_2$

Εικ. 20

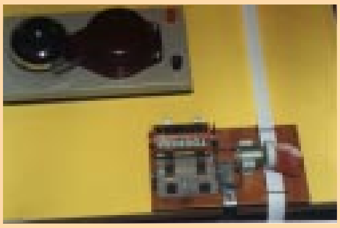
Σε κάθε άλλη περίπτωση κατά την οποία δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε κατάλληλη συχνότητα στο στροβοσκόπιο, ώστε να πάρουμε φαινομενικά περιοδική κίνηση ή φαινομενική ακινησία, η πραγματική άγνωστη κίνηση δεν είναι περιοδική.

Τεχνολογική εφαρμογή:

Η προηγούμενη μέθοδος χρησιμοποιείται κατά τον έλεγχο των μηχανών αυτοκινήτων, προκειμένου να μετρήσουν τις στροφές της μηχανής στο ένα λεπτό (min).

Δραστηριότητα

Α. Χρησιμοποιώντας το ηλεκτρονικό ή άλλο στροβοσκόπιο του εργαστηρίου του σχολείου σας, εξετάστε κατά πόσον είναι περιοδικές οι εξής κινήσεις:



Εικ. 22

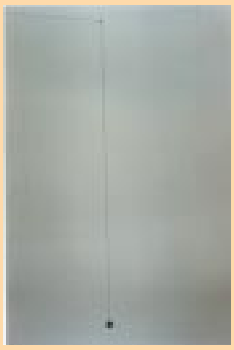
α. η περιστροφική κίνηση στον ηλεκτρικό χρονομετρητή που έχετε στο σχολικό εργαστήριο (Εικ. 22),

β. η παλινδρομική κίνηση του πλήκτρου στο ηλεκτρικό κουδούνι-υπόδειγμα (Εικ. 22) που υπάρχει στο σχολικό εργαστήριο,

γ. η κίνηση χαλύβδινης σφαίρας σε απλό εκκρεμές με μήκος νήματος περίπου (Εικ. 23) και

δ. η κίνηση μίας χορδής στην κιθάρα σας .

Στη συνέχεια, προσδιορίστε τις συχνότητες για εκείνα από τα παραπάνω φαινόμενα στα οποία θα διαπιστώσετε περιοδική συμπεριφορά.



Εικ. 23

Β. Υποδείξτε μία, κατά τη γνώμη σας, μη περιοδική κίνηση (π.χ. την περιστροφική κίνηση που κάνει η ρόδα ανεστραμμένου ποδηλάτου, η οποία, μετά την αρχική περιστροφή που της δώσατε, αφήνεται να σταματήσει από μόνη της) και ελέγξτε πειραματικά τον ισχυρισμό σας.

4.1-2 Η απλή αρμονική ταλάντωση και οι βασικές εξισώσεις της

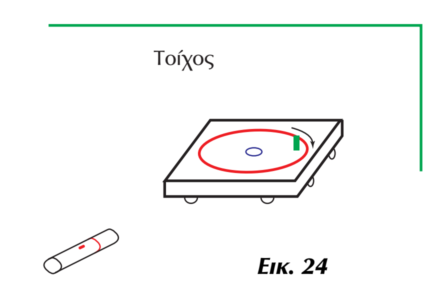
Α. Η ομαλή κυκλική κίνηση δημιουργεί απλή αρμονική ταλάντωση

2η Πειραματική δραστηριότητα

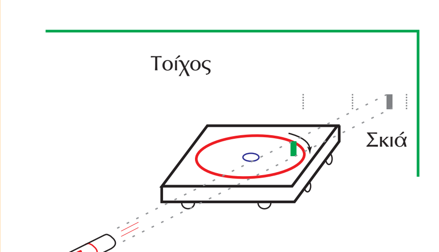
◊ Τοποθετήστε το πικάπ της 1ης πειραματικής δραστηριότητας κοντά σε έναν από τους κατακόρυφους τοίχους του εργαστηρίου σας και στερεώστε κατακόρυφα πάνω στο πλατό του ένα όρθιο λεπτό ελαφρύ αντικείμενο (βλ. Εικ. 24) – όπως, για παράδειγμα, ένα κομμάτι από πλαστικό καλαμάκι μήκους 5 – 6 cm.

◊ Χρησιμοποιήστε έναν προβολέα παράλληλης δέσμης φωτός (π.χ. ένα φακό χεριού στην κατάλληλη ρύθμιση), προκειμένου να σχηματίσετε τη σκιά του αντικειμένου που βρίσκεται στο πλατό, πάνω στο διπλανό τοίχο. (Βλ. Εικόνα 25) .

◊ Αφού βεβαιωθείτε ότι η σκιά σχηματίζεται ικανοποιητικά πάνω στον τοίχο, θέστε σε περιστροφική κίνηση το πλατό του πικάπ και παρακολουθή-



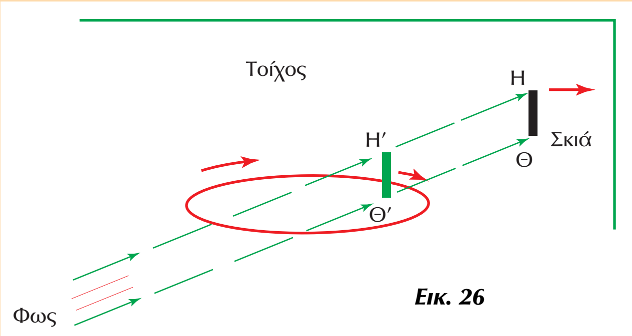
Εικ. 24



Εικ. 25

στε τόσο την κίνηση του ίδιου του αντικειμένου όσο και την κίνηση της σκιάς του, φωτίζοντας κάθετα στον κατακόρυφο τοίχο στο ύψος του πλατό (βλ. Εικόνα 26):

α. Περιγράψτε ποιοτικά την κίνηση που εκτελεί η σκιά πάνω στον τοίχο .
β. Σε τι μοιάζει και σε τι διαφέρει η κίνηση της σκιάς πάνω στον τοίχο σε σύγκριση με την ομαλή κυκλική κίνηση του ίδιου του αντικειμένου στο περιστρεφόμενο πλατό;
γ. Η κίνηση της σκιάς είναι περιοδική ;
δ. Μπορούμε να πούμε ότι έχουμε έναν κινηματικό συσχετισμό μεταξύ δύο περιοδικών κινήσεων: της ομαλής κυκλικής και της κίνησης της προβολής του κινητού σε μία ευθεία ;
ε. Μπορούμε - λόγω (δ)- να περιγράψουμε με σχέσεις την κίνηση της προβολής;



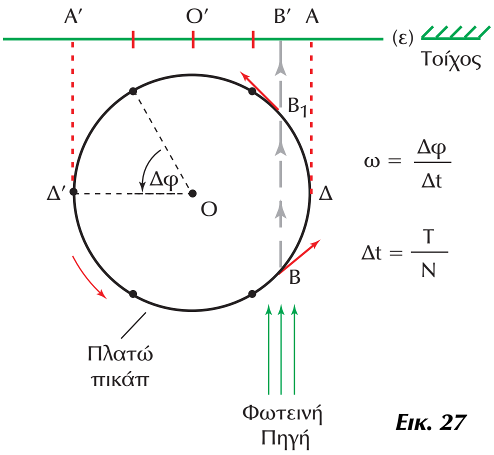
Εικ. 26

Από την παρατήρηση των δύο κινήσεων διαπιστώνουμε ότι είναι αλληλένδετες: καθεμία εξαρτάται από την άλλη .

Συγκεκριμένα, διαπιστώνουμε ότι :

- Στην ομαλή κυκλική κίνηση του αντικειμένου αντιστοιχεί η παλινδρομική ευθύγραμμη κίνηση της σκιάς του πάνω στον τοίχο (βλ. Εικ. 26) .
- Και οι δύο κινήσεις είναι περιοδικές με την ίδια περίοδο .

- Σε κάθε θέση του αντικειμένου αντιστοιχεί μία θέση της προβολής του (σκιάς του) (βλ. Εικ. 26) .
- Αντιθέτως, η ίδια θέση προβολής μπορεί να προέρχεται , σε χρόνο μίας περιόδου, από δύο διαφορετικές θέσεις της κυκλικής τροχιάς του σώματος (βλ. Εικ. 27) .
- Η παλινδρομική κίνηση της σκιάς δεν είναι ομαλή·
- Η ομαλή κυκλική κίνηση - αν και δισδιάστατη - είναι πιο απλή από την κίνηση που κάνει η σκιά της στον τοίχο .



$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{T}{N}$$

Εικ. 27

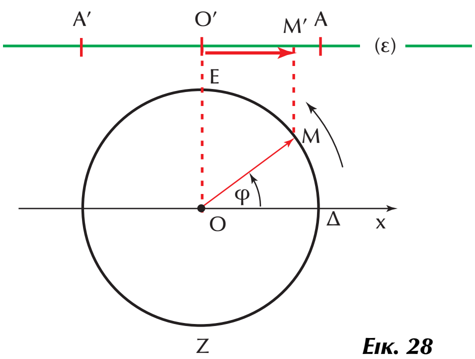
Στην Εικόνα 27 φαίνονται στιγμιότυπα των δύο περιοδικών κινήσεων ανά ίσα χρονικά διαστήματα Δt ($\Delta t = \frac{T}{N}$, ακέραιο υποπολλαπλάσιο της κοινής περιόδου T):

Η παλινδρομική κίνηση της προβολής του αντικειμένου που είδαμε παραπάνω συσχετίζεται, από κινηματική άποψη, άμεσα με την ομαλή κυκλική κίνηση από την οποία προήλθε . Την τελευταία μάλιστα (ο.κ.κ.) μπορούμε να την περιγράφουμε με απλά Μαθηματικά.

Β. Η περιγραφή της κίνησης της προβολής και η απλή αρμονική ταλάντωση

Επειδή οι δύο κινήσεις συνδέονται μεταξύ τους, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το γεγονός, για να περιγράψουμε - ποσοτικά – και την παλινδρομική κίνηση της προβολής του κινητού πάνω σε άξονα :

Στην εικόνα 28 το κινητό βρίσκεται στην τυχαία θέση Μ, ενώ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα ω, αντίθετα από την κίνηση των δεικτών του ρολογιού.



Εικ. 28

Από τη γεωμετρία του σχήματος 28 προκύπτει :

$x(t) = R\,\text{συν}\varphi(t)$ (ι)

και επειδή $\varphi(t) = \omega\, t$ (ιι)

η (ι) γράφεται :

$$x(t) = R\,\text{συν}(\omega\, t) = R\,\text{συν}\left(\frac{2\pi}{T}\,t\right) \qquad (4)$$

Εξίσωση θέσης

όπου ω: η γωνιακή ταχύτητα της ομαλής κυκλικής κίνησης του σημείου και *T*: η κοινή περίοδος των κινήσεων των σημείων *M* και *M'*.

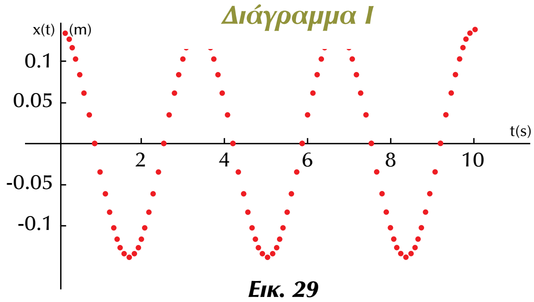
Ειδικά για την περιγραφή της θέσης της προβολής χρειαστήκαμε τη συνάρτηση συνημίτονο από τα Μαθηματικά, η οποία, όπως και το ημίτονο, ονομάζεται αρμονική συνάρτηση (του χρόνου) .

Δίνοντας στο δεύτερο μέλος της σχέσης (4) διάφορες τιμές, π.χ. μεταξύ 0 και 3T, για τη χρονική στιγμή t, μπορείτε να κατασκευάσετε το διάγραμμα της θέσης x(t), με το χρόνο, t, το οποίο θα έχει τη μορφή :

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

α.α	t (s)	x(t) (m)
1	0.0	0.140
2	0.4	0.100
3	0.7	0.025
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Διάγραμμα Ι



Εικ. 29

Παρατηρούμε ότι (βλ. Εικ. 29, Διάγρ. IV) : η θέση της προβολής μεταβάλλεται περιοδικά με το χρόνο.

Η κίνηση της προβολής (σε άξονα) ενός κινητού το οποίο κινείται με ομαλή κυκλική κίνηση λέγεται απλή αρμονική ταλάντωση και περιγράφεται από τη σχέση (Α).

Ταλάντωση: διότι έτσι ονομάζουμε τις παλινδρομικές κινήσεις γύρω από μία μέση θέση, όπως εδώ το Ο',
Αρμονική: διότι περιγράφεται από αρμονική συνάρτηση του χρόνου (εδώ του "συνημιτόνου") x(t)=R συν(ω t),
Απλή: διότι έχει να κάνει με μία μόνο αντίστοιχη ομαλή κυκλική κίνηση και την κυκλική συχνότητά της (εδώ την ω).

Η εξίσωση (4) αποτελεί την εξίσωση θέσης στην απλή αρμονική ταλάντωση, και τότε η ω ονομάζεται και κυκλική συχνότητα

Γ. Η ταχύτητα και η επιτάχυνση κατά την απλή αρμονική ταλάντωση (ποιοτικά)

Από τη μορφή της εξίσωσης (4) για τη θέση ενός κινητού το οποίο εκτελεί α.α.τ. μπορούμε να βρούμε πώς θα μεταβάλλεται η ταχύτητά του αλλά και η επιτάχυνσή του κατά τη διάρκεια της ίδιας κίνησης.

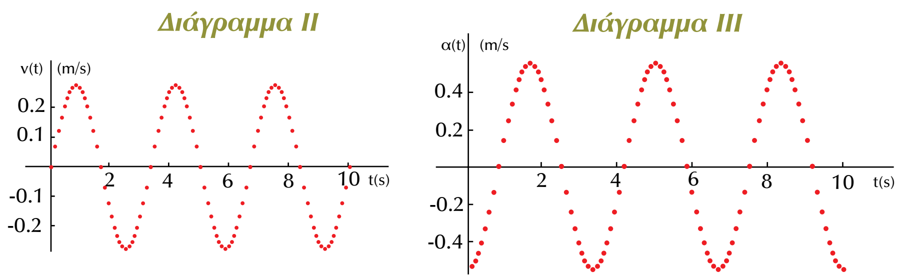
Δραστηριότητα:

Χρησιμοποιώντας τιμές από τη σχέση (4) για τη θέση, κατασκευάστε πίνακες τιμών , και στη συνέχεια κατασκευάστε τα αντίστοιχα διαγράμματα ταχύτητας -χρόνου και επιτάχυνσης -χρόνου .

(*Υπόδειξη:* Προσδιορίστε τιμές λόγων της μορφής $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, για να προσεγγίσετε την ταχύτητα, και της μορφής $\frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$, για να προσεγγίσετε την επιτάχυνση) .

Τι παρατηρείτε ; Σχολιάστε τα διαγράμματα που κατασκευάσατε.

Με τη βοήθεια του πίνακα Ι (βλ. Εικ. 29) μπορούμε να προσδιορίσουμε προσεγγιστικά (βλ. παραπάνω δραστηριότητα και Εργαστηριακό Οδηγό) τις αντίστοιχες ταχύτητες και επιταχύνσεις και να καταλήξουμε στα εξής διαγράμματα ταχύτητας - χρόνου και επιτάχυνσης – χρόνου (βλ. Εικ. 30) :



Εικ. 30

Από τα διαγράμματα αυτά διαπιστώνουμε ότι :

1. Στην απλή αρμονική ταλάντωση, εκτός από τη θέση και η ταχύτητα και η επιτάχυνση μεταβάλλονται περιοδικά με το χρόνο, και μάλιστα με την ίδια περίοδο, Τ.

2. Η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση δεν αποκτούν τη μέγιστη τιμή τους κατά την ίδια χρονική στιγμή.

Συγκεκριμένα, σε κάθε επανάληψη η ταχύτητα παίρνει τη μέγιστη τιμή της, υ_{max}, με σταθερή καθυστέρηση χρόνου, $\frac{T}{4}$, από τη χρονική στιγμή κατά την οποία η θέση θα πάρει τη δική της μέγιστη τιμή, x_{max}. Το ίδιο συμβαίνει και για την επιτάχυνση: παίρνει τη μέγιστη τιμή της, α_{max}, με σταθερή καθυστέρηση χρόνου, $\frac{T}{2}$

(χρόνο μισής περιόδου), ως προς την αντίστοιχη συμπεριφορά της θέσης (βλ. Εικ. 30) .

Τα διαγράμματα $\upsilon - t$ και $\alpha - t$ μοιάζουν με το διάγραμμα $x - t$, που περιγράφεται από το συνημίτονο· περιμένουμε, λοιπόν, ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση θα περιγράφονται και αυτές με συνημίτονα, με τρόπο, όμως, που να συμπεριλαμβάνουν και τις παραπάνω χρονικές καθυστερήσεις.

Από την πρώτη αυτή εκτίμηση για τον τρόπο που μεταβάλλονται, με το χρόνο, η ταχύτητα και η επιτάχυνση σε μία απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος και περίοδο μπορούμε να προβλέψουμε τις μορφές των σχέσεων από τις οποίες θα περιγράφονται :

$$\upsilon(t) = \upsilon_0\,\text{συν}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (5\alpha) \qquad \alpha(t) = \alpha_0\,\text{συν}(\omega t - \pi) \quad (5\beta)$$

Στις τελευταίες σχέσεις απομένει να προσδιοριστούν οι σταθερές υ_0 και α_0, που ονομάζονται, αντίστοιχα, πλάτος της ταχύτητας και πλάτος της επιτάχυνσης.

Αυτό για την περίπτωση της ταχύτητας μπορεί να γίνει πολύ εύκολα :

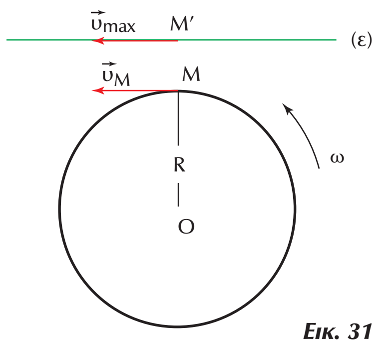
Ε. Σχέση μεταξύ της μέγιστης ταχύτητας υ_0 και της μέγιστης απομάκρυνσης (ή) – R (ή x_0) – Εξίσωση της ταχύτητας

Στη 2_η πειραματική δραστηριότητα, όταν το αντικείμενο, *Μ*, κινείται στιγμιαία παράλληλα με τη "σκιά" του, *Μ'*, στον τοίχο, προφανώς θα έχει την ίδια ταχύτητα, υ_M, με αυτό .

Αυτό συμβαίνει δύο φορές σε κάθε περιστροφή του πλατό: κάθε φορά που η "σκιά", περνάει από το σημείο Μ′ της διαδρομής της (βλ. Εικ.31).

Τότε, όπως διαπιστώσαμε πειραματικά, η "σκιά" έχει τη μέγιστη ταχύτητά της,· θα ισχύει λοιπόν ότι : $\upsilon_{max} = \upsilon_M$

Όμως, από την ο.κ.κ. του *Μ*: $\upsilon_M = \omega R$
και επειδή συμβαίνει: $\upsilon_0 = \upsilon_{max}$
τελικά : $\upsilon_0 = \omega R = \omega x_0$ (7)



Εικ. 31

Η (5) δίνει, λόγω της (7), ακριβέστερα την:

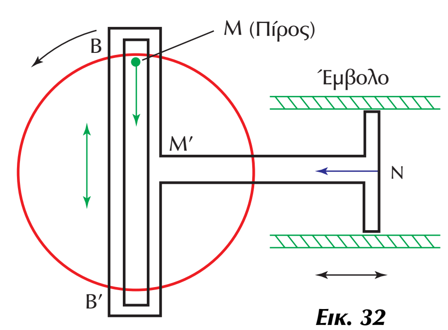
$$\upsilon(t) = \omega x_0\,\text{συν}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (8)$$

Εξίσωση ταχύτητας

Ερώτηση: Μπορούμε να απαιτήσουμε από μία απλή αρμονική ταλάντωση να έχει πλάτος $x_0 = 0.5$ m, πλάτος ταχύτητας $\upsilon_0 = 2\pi \frac{m}{s}$ και περίοδο T = 1s ;

4.1-3 Εφαρμογές και παραδείγματα

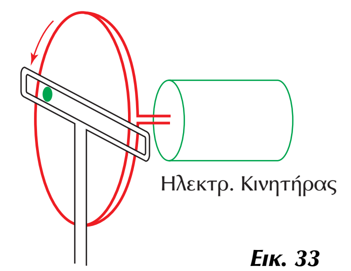
Παράδειγμα (Τεχνική εφαρμογή): Μηχανισμός που μετατρέπει μία ομαλή κυκλική κίνηση σε άλλη, η οποία είναι Α.Α.Τ.



Εικ. 32

Στο μηχανισμό που εικονίζεται στην Εικόνα 32 βλέπετε ότι ο πίρος που είναι στερεωμένος κάθετα πάνω στον κυκλικό δίσκο μπορεί να περιστρέφεται ομαλά κυκλικά μαζί με αυτόν με τη βοήθεια ενός ηλεκτρικού κινητήρα, στο ρότορα του οποίου είναι προσαρμοσμένο το σύστημα κυκλικός δίσκος-πίρος .

Ο πίρος έχει τη δυνατότητα να κινείται πάνω-κάτω σε σχέση με το ορθογώνιο πλαίσιο, το οποίο όμως κινείται παλινδρομικά, αριστερά- δεξιά .



Εικ. 33

Η κίνηση, αριστερά δεξιά, του σημείου Μ και ολόκληρου του εμβόλου Μ΄ Ν, σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει προηγουμένως θα είναι απλή αρμονική ταλάντωση .

Η κίνηση του σημείου Ν (ίδια με αυτήν του Μ΄) είναι η κίνηση που μας ενδιαφέρει να δημιουργήσουμε, έχει γωνιακή συχνότητα ω, ίδια με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του ρότορα και πλάτος όσο το μισό της διαδρομής, πάνω-κάτω, του σημείου Μ΄ (δηλαδή την R –d, όπου R, η ακτίνα του κυκλικού δίσκου και η απόσταση του άξονα του πίρου από την περιφέρεια του κυκλικού δίσκου) .

Τέτοιοι μηχανισμοί χρησιμοποιούνται στην πράξη για τη μετατροπή μίας ομαλής κυκλικής κίνησης σε απλή αρμονική ταλάντωση και αντίστροφα .

Αριθμητική εφαρμογή: Πώς θα έπρεπε να σχεδιαστεί ένας τέτοιος μηχανισμός, ώστε το άκρο, Ν, του εμβόλου να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο 0,56 s και πλάτος 2 cm;

Δώστε την εξίσωση κίνησης του άκρου Ν του εμβόλου.

Το σύστημα θα πρέπει να περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.56\,s} \cong 11.22\,\frac{rad}{s}$$

ή συχνότητα:
$$f = \frac{1\,c}{0.56\,s} \cong 1.79\,Hz$$

Για τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κυκλικού δίσκου πρέπει να ισχύει

R_0=2 cm, άρα: R>2 cm

και ακόμη, πρέπει : $\alpha + \rho < \frac{R}{2}$.

Η εξίσωση που θα περιγράφει τη θέση του άκρου, N, του εμβόλου από τη θέση N_0 θα είναι η :

$$x = x(t) \cong (2\ \text{cm})\ \text{συν}\ (11.22\ t\ \text{rad})$$

4.1-4 Η σημασία της απλής αρμονικής ταλάντωσης

Η απλή αρμονική ταλάντωση την οποία ορίσαμε στην προηγούμενη ενότητα μοιάζει πολύ με πολλές καταστάσεις κίνησης στην φύση, αλλά, κυρίως, κάθε ταλάντωση μικρού πλάτους μπορεί να αναχθεί σε απλή αρμονική ταλάντωση· γι' αυτό το λόγο η μελέτη της τελεταίας είναι πολύ σημαντική.

Για παράδειγμα, με την επόμενη πειραματική δραστηριότητα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και το απλό εκκρεμές, για μικρό πλάτος, εκτελεί α.α.τ..

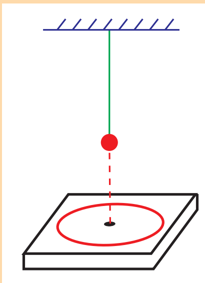
3η Πειραματική δραστηριότητα

Δημιουργήστε ένα απλό εκκρεμές με μήκος νήματος, περίπου 50 cm θέσετέ το σε παλινδρομική κίνηση, απομακρύνοντάς το λίγο από τη θέση ισορροπίας, και μετρήστε με ένα χρονόμετρο την περίοδό του .

Επαναλάβετε το ίδιο με μήκη 70 cm και 100 cm. Θα παρατηρήσετε ότι η περίοδος αλλάζει με το μήκος του νήματος (συγκεκριμένα μεγαλώνει). (Βλ. σχετική εργαστηριακή άσκηση στον Εργαστηριακό Οδηγό).

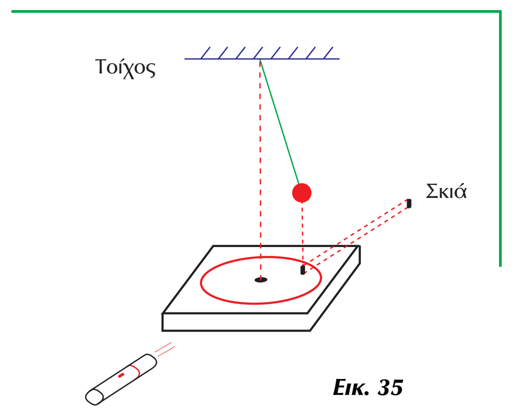
Αυτό σημαίνει ότι, επιλέγοντας κατάλληλα το μήκος ενός εκκρεμούς, μπορούμε να προεπιλέξουμε την περίοδο της κίνησής του .

- Επιλέγξτε μήκος νήματος για το εκκρεμές τα 82cm περίπου, βρείτε τη συχνότητα της παλινδρομικής κίνησής του και ελέγξτε εάν αυτή είναι περίπου $33.5\,\frac{c}{s} \equiv 0.56\,Hz$, δηλαδή όση είναι η συχνότητα περιστροφής του πλατό του πικάπ.
- Τοποθετήστε το εκκρεμές πάνω από το πλατό του πικάπ όπως φαίνεται στην Εικόνα 34, φροντίζοντας ώστε το σημείο ανάρτησης να βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από το κέντρο του πλατό .
- Απομακρύνετε τη σφαίρα του εκκρεμούς από τη θέση



Εικ. 34

ισορροπίας της και σημειώστε την αντίστοιχη θέση πάνω στο πλατό του πικάπ· στο σημείο αυτό τοποθετήστε ένα ελαφρύ αντικείμενο όπως κάνατε στην 2η πειραματική δραστηριότητα .



Εικ. 35

- Σχηματίστε κάθετα πάνω στον τοίχο την σκιά του αντικειμένου, χρησιμοποιώντας ένα φακό παράλληλης δέσμης .
- Θέσετε το πικάπ σε λειτουργία και ταυτόχρονα αφήστε ελεύθερη τη σφαίρα του εκκρεμούς .
- Παρακολουθήστε την κίνηση της σκιάς του αντικειμένου και της σφαίρας του εκκρεμούς . Τι παρατηρείτε ;

Από το προηγούμενο πείραμα διαπιστώνουμε ότι η κίνηση της σφαίρας του εκκρεμούς είναι ίδια με την κίνηση της σκιάς Ή άρα, μπορεί να περιγραφεί με τον ίδιο τρόπο που περιγράψαμε την κίνηση της σκιάς, δηλαδή από τη σχέση :

$$x(t) = R\,συν(ω\,t) = R\,συν\left(\frac{2\,π}{T}\,t\right) \qquad (4)$$

Άρα, το απλό εκκρεμές εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση

Περιμένουμε, επίσης, οι αντίστοιχες εξισώσεις ταχύτητας - χρόνου και επιτάχυνσης - χρόνου για τη σφαίρα του εκκρεμούς να είναι ίδιες με αυτές της σκιάς, δηλαδή με τις εξισώσεις (5) και (6) που σχολιάσαμε προηγουμένως.

Απλός αρμονικός ταλαντωτής. Όλα τα συστήματα που ακολουθούν τη συγκεκριμένη εξίσωση (4) έχουν την ίδια συμπεριφορά όχι μόνο ως προς τη θέση την οποία αυτή περιγράφει αλλά και ως προς όλα τα άλλα χαρακτηριστικά - όπως είναι, π.χ., η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η δύναμη, η ενέργεια κτλ., τα οποία περιγράφονται από άλλες εξισώσεις .

Μπορούμε, λοιπόν, στη θέση των πολλών διαφορετικών συστημάτων που εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση να θεωρήσουμε ένα και μοναδικό μοντέλο, που θα κάνει αυτή την κίνηση (απλή αρμονική ταλάντωση) .

Το γενικό μοντέλο μελέτης της απλής αρμονικής ταλάντωσης ονομάζεται απλός αρμονικός ταλαντωτής .

4.1-5 Βαθύτερη μελέτη της απλής αρμονικής ταλάντωσης
Α. Το πείραμα

4η Πειραματική δραστηριότητα

Στη φωτογραφία βλέπετε ένα αμαξίδιο να ισορροπεί πάνω σε ένα οριζόντιο τραπέζι ανάμεσα σε δύο όμοια οριζόντια ελατήρια, τα οποία σ' αυτή τη θέση είναι τεντωμένα λίγο (βλέπε Εικόνα 36).

Τα συγκεκριμένα ελατήρια ακολουθούν το νόμο του Hooke και έχουν σταθερές $k = 33.25\,\frac{N}{m}$ ..

Εικ. 36

◊ Εάν απομακρύνουμε λίγο, οριζόντια, από αυτή τη θέση το αμαξίδιο και στη συνέχεια το αφήσουμε ελεύθερο, τότε το σύστημα θα κινηθεί παλινδρομικά πάνω στο οριζόντιο τραπέζι, εκτελώντας περιοδική κίνηση με 10, περίπου, επαναλήψεις στα δηλαδή με περίοδο περίπου T =1 s.

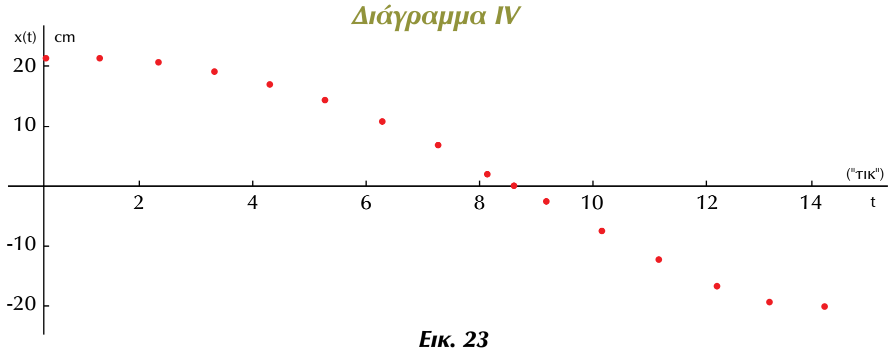
• Με τη βοήθεια ενός ηλεκτρικού χρονομετρητή, μπορούμε να καταγράψουμε την ιστορία αυτής της κίνησης πάνω σε μία χαρτοταινία, στη διάρκεια μισής παλινδρόμησης του αμαξιδίου, από τη στιγμή πού θα το αφήσουμε ελεύθερο έως και την πρώτη αναστροφή της κίνησής του.

Τα αποτελέσματα μίας τέτοιας καταγραφής της θέσης του μέσου του αμαξιδίου από το σημείο όπου αυτό βρίσκεται όταν ηρεμεί πάνω στο τραπέζι δίνονται σε συνάρτηση με το χρόνο στον πίνακα II (βλ. Εργαστηριακό Οδηγό) και στο διάγραμμα IV :

ΠΙΝΑΚΑΣ II

α.α	t(“τικ”)	x(cm)		α.α	t(“τικ”)	x(cm)
1	0	21.125		9	8	2.175
2	1	21.000		10	9	0.000
3	2	20.275		11	10	-2.725
4	3	18.800		12	11	-7.725
5	4	16.725		13	12	-12.475
6	5	14.050		14	13	-16.550
7	6	10.675		15	14	-19.350
8	7	6.675		16	15	-19.700

Διάγραμμα IV



Εικ. 23

Στον πίνακα ΙΙ όπως και στο διάγραμμα IV φαίνεται η αρχική απομάκρυνση του αμαξιδίου από τη θέση ισορροπίας του, που είναι και η μέγιστη: x_0=21.125 cm. Επίσης στο διάγραμμα IV, θέσης-χρόνου για το αμαξίδιο, φαίνονται τα πειραματικά σημεία του πίνακα ΙΙ, καθώς και η καλύτερη καμπύλη που τα εκπροσωπεί.

Β. Οι πραγματικές ταλαντώσεις στη φύση ή στο εργαστήριο είναι φθίνουσες

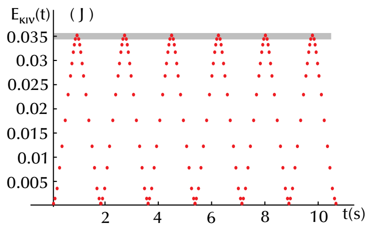
Από μία πρώτη ματιά, το διάγραμμα IV μας αποκαλύπτει ότι η θέση του αμαξιδίου ως προς το χρόνο μπορεί να περιγραφεί, κατά προσέγγιση, από τη συνάρτηση “συνημίτονο”, και πιο συγκεκριμένα, εάν ληφθεί υπόψη η περίοδος ($T \cong 1$ s) και το πλάτος της ταλάντωσης ($x_0 \cong 21.125$ cm) από τη σχέση:

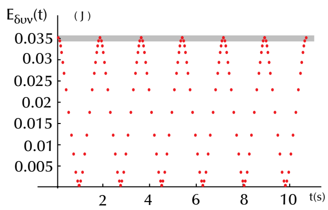
$$x(t) \cong (21.125\,\text{cm})\ \text{συν}\,\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{s}}\, t\right) = x_0\ \text{συν}\left(\frac{2\pi}{T}\, t\right)$$

Δηλαδή, μπορούμε να πούμε ότι η παλινδρομική κίνηση του πραγματικού συστήματός μας είναι σχεδόν απλή αρμονική ταλάντωση .

Στην πραγματικότητα, το σύστημά μας δεν κάνει απλή αρμονική ταλάντωση, η οποία προϋποθέτει σταθερό πλάτος · από το διάγραμμα IV, όμως, αλλά και κατά την εκτέλεση του πειράματος διαπιστώσαμε ότι το πλάτος της ταλάντωσης στο παράδειγμά μας μειώνεται σιγά σιγά. Μία τέτοια ταλάντωση λέγεται φθίνουσα ή αποσβεννυμένη .

Από τα στοιχεία του πίνακα ΙΙ για την κίνηση του αμαξιδίου μπορούμε να κατασκευάσουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα της μεταβολής της κινητικής, της δυναμικής, καθώς και της συνολικής ενέργειας σε σχέση με το χρόνο .





Εικ. 38

Ακόμη, από τα διαγράμματα γίνεται φανερό ότι τόσο η κινητική ενέργεια όσο και η δυναμική ενέργεια του συστήματος – ταλαντωτή μεταβάλλονται περιοδικά με το χρόνο· επίσης, ότι εκεί όπου η κινητική ενέργεια του συστήματος μηδενίζεται η δυναμική του ενέργεια παίρνει μία μέγιστη τιμή, και αντίστροφα .

Παρατηρούμε, επίσης, ότι στο τέλος της πρώτης μισής περιόδου η δυναμική ενέργεια δεν απέκτησε την ίδια ακριβώς τιμή αλλά λίγο μικρότερη από την αρχική· το ίδιο συνέβη με την κινητική και, φυσικά, με την ολική ενέργεια. Αυτό οφείλεται στις απώλειες ενέργειας λόγω τριβών, τις οποίες δεν μπορούμε να αποφύγουμε σε καμία πραγματική κατάσταση στη φύση – όπως είναι και το πείραμα που πραγματοποιήσαμε Το ίδιο είχαμε δει και στο πρώτο κεφάλαιο, όταν μιλήσαμε για το $2^{ο}$ θερμοδυναμικό νόμο .

Γ. Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι αμείωτη (αλλά δεν υπάρχει στην πραγματικότητα)

Επειδή στο πραγματικό σύστημά μας το πλάτος της ταλάντωσής του, η οποία μοιάζει με απλή αρμονική, αλλάζει με πολύ αργό ρυθμό, μπορούμε να το μελετήσουμε ευκολότερα θεωρώντας ότι το πλάτος της ταλάντωσής του είναι σταθερό . Δηλαδή, θα θεωρήσουμε ότι το πραγματικό σύστημά μας κάνει απλή αρμονική ταλάντωση .

Αυτό ισοδυναμεί με τη μελέτη ενός παρόμοιου με το πραγματικό σύστημά μας ιδανικού συστήματος ("μοντέλου") το οποίο θα αποτελείται από ένα αμαξίδιο, δύο οριζόντια ελατήρια, που δε θα έχουν μάζα και θα ακολουθούν απόλυτα το νόμο του Hooke ("ιδανικά"), ενώ δε θα υπάρχουν καθόλου σ' αυτό τριβές.

Εάν υπήρχε στην πραγματικότητα ένα σύστημα με τις παραπάνω ιδιότητες, το οποίο θα έκανε α.α.τ., αυτό θα συνέχιζε να κινείται για πάντα, σύμφωνα με τις εξισώσεις (4), (5) και (6), και τα πλάτη θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης θα παρέμεναν αμείωτα όπως και η συνολική ενέργεια .

Δ. Η ολική ενέργεια και οι ενεργειακές μετατροπές κατά την α.α.τ.

Στο παράδειγμα που εξετάζουμε τόσο η ταχύτητα του σώματος όσο και οι παραμορφώσεις των δύο ελατηρίων μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια της κίνησης (α.α.τ.).

Οπότε, τόσο η κινητική ενέργεια όσο και η ελαστική δυναμική ενέργεια θα μεταβάλλονται κατά τη διάρκειά της .

Η κινητική ενέργεια του συστήματος μπορεί να προσδιοριστεί σε κάθε χρονική στιγμή, t, από την αντίστοιχη σχέση (5) για την ταχύτητα, και δίνεται από την [4] :

$$E_{Κιν}(t) = \frac{1}{2}\, m\, υ_0^2\, ημ^2(ω\, t) \qquad (9)$$

Επίσης, και η δυναμική του ενέργεια μπορεί να προσδιοριστεί σε κάθε χρονική στιγμή, t, από την αντίστοιχη σχέση (4) για τη θέση:

$$E_{Δυν}(t) = 2\,\frac{1}{2}\, k\,(x(t))^2 = \frac{1}{2}\,(2k)\,(x_0\, συν(ω\, t))^2$$

και άρα, θα δίνεται από την:

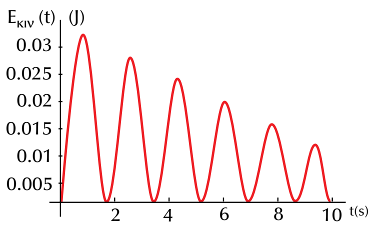
$$E_{Δυν}(t) = \frac{1}{2}\, D\, x_0^2\, συν^2(ω\, t) \qquad (10)$$

Οπότε, η συνολική ενέργεια, άθροισμα κινητικής και ελαστικής δυναμικής, η οποία διατηρείται σταθερή στο μοντέλο της ‘αμείωτης’ ταλάντωσης, θα δίνεται από τη σχέση :

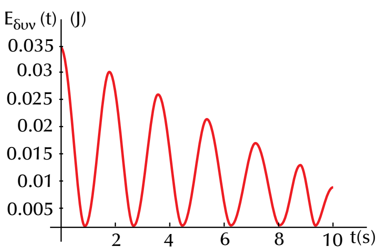
$$E_{Μηχ}(t) = E_{Κιν}(t) + E_{Δυν}(t) = \frac{1}{2}\, m\, υ_0^2 = \frac{1}{2}\, D\, x_0^2 = \quad σταθερή \qquad (11)$$

Στα επόμενα διαγράμματα[5] μπορούμε να δούμε πώς μεταβάλλεται η κινητική και η δυναμική ενέργεια κατά την ταλάντωση του αμαξιδίου, σύμφωνα με τα παραπάνω (δηλαδή, εάν δεν υπήρχαν καθόλου απώλειες λόγω τριβών: μοντέλο “αμείωτης” ταλάντωσης) .

Διάγραμμα VII



Διάγραμμα VIII



Εικ. 39

---

[4] *Λεπτομέρειες μπορούν να δοθούν στη τάξη.*

[5] *Η ελαστική σταθερά του κάθε ελατηρίου στο πείραμα είχε τιμή* $k \cong 33.25\,\frac{N}{m}$ *και η μέγιστη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας ήταν* x_0 *= 21.125 cm, ενώ η κυκλική συχνότητα, ω, προσδιορίστηκε απο τη σχέση:* $ω = \frac{υ_0}{x_0}$, *την οποία έχουμε δείξει στα προηγούμενα.*

Από τα διαγράμματα γίνεται φανερό ότι τόσο η κινητική ενέργεια όσο και η δυναμική ενέργεια του συστήματος – ταλαντωτή μεταβάλλονται περιοδικά με το χρόνο, ενώ το άθροισμά τους (ολική ενέργεια) παραμένει σταθερό, που σημαίνει ότι η μία μορφή ενέργειας μετατρέπεται στην άλλη και αντίστροφα σε μία αδιάκοπη εναλλαγή .

Συνθήκη για εκτέλεση απλής αρμονικής ταλάντωσης

Αποδεικνύεται ότι η σχέση:

$$F(t) = -D\,x(t) \qquad (12)$$

μεταξύ της συνολικής δύναμης, και της θέσης,F(t) , από τη θέση, x(t) ισορροπίας ενός σώματος το οποίο κινείται αποτελεί την ικανή και αναγκαία συνθήκη[6], προκειμένου αυτή η κίνησή του να είναι απλή αρμονική ταλάντωση .

Η σταθερά της ταλάντωσης

Στη σχέση (12) εμφανίζεται μεταξύ δύναμης και θέσης μία σταθερά, που στο συγκεκριμένο αρμονικό ταλαντωτή από το νόμο του Hooke προκύπτει ότι είναι:

$$D=2k \quad (13) \qquad (13)$$

Τέτοια σταθερά μεταξύ δύναμης και απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας εμφανίζεται σε κάθε αρμονικό ταλαντωτή, αλλά η τιμή της εξαρτάται, κάθε φορά, από το συγκεκριμένο ταλαντωτή. Η σταθερά αυτή ονομάζεται σταθερά της ταλάντωσης .

Ο ρόλος της ολικής ενέργειας κατά την απλή αρμονική ταλάντωση

Η ολική ενέργεια καθορίζει, λόγω της σχέσης (11), το πλάτος x_0 της ταλάντωσης ενός συστήματος με ελαστική σταθερά, όταν αυτό εκτελεί α.α.τ. Σε ένα τέτοιο σύστημα συνήθως προσδίδουμε την ολική του ενέργεια επιλέγοντας ουσιαστικά τη μέγιστη δυναμική του, απομακρύνοντάς το από τη θέση ισορροπίας του και αφήνοντάς το να ξεκινήσει από την ακινησία .

Επίσης, σε ένα σύστημα που εκτελεί α.α.τ., η ολική ενέργεια καθορίζει το πλάτος για την ταχύτητα και την επιτάχυνση .

Ε. Η κυκλική συχνότητα και η περίοδος της α.α.τ. - Εξάρτησή τους από τις χαρακτηριστικές σταθερές του συστήματος

Η κυκλική συχνότητα, ω, μίας α.α.τ. καθορίζει την περιοδικότητα της κίνησης και καθορίζεται από τα χαρακτηριστικά του συστήματος, τα οποία στην περίπτωσή μας είναι η μάζα, m , του αμαξιδίου και οι δύο ίδιες ελαστικές σταθερές, k, των ελατηρίων, που εδώ εμφανίζονται ως D, και δίνεται από τη σχέση :

---

[6] *Η απόδειξη μπορεί να δοθεί στην τάξη.*

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{\frac{D}{m}} \qquad (14)$$

και επειδή $\omega = \frac{2\pi}{T}$, έχουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \qquad (15)$$

Εξάρτηση της κυκλικής συχνότητας και της περιόδου από τις σταθερές του συστήματος

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ

Γενική μορφή των εξισώσεων της απλής αρμονικής ταλάντωσης

D: ελαστική σταθερά
x_0 : πλάτος της ταλάντωσης

$$F = F(t) = -D\,x(t)$$

$$x = x(t) = x_0\,\text{συν}\,(\omega\, t)$$

Εξίσωση θέσης

$$\upsilon = \upsilon(t) = \sqrt{\frac{D}{m}}\,x_0\,\text{συν}\left(\omega\, t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Εξίσωση ταχύτητας

$$\alpha = \alpha(t) = \frac{D}{m}\,x_0\,\text{συν}(\omega\, t - \pi)$$

Εξίσωση επιτάχυνσης

$$F = F(t) = D\,x_0\,\text{συν}(\omega\, t - \pi)$$

Εξίσωση δύναμης

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Κυκλική συχνότητα

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Περίοδος

$$E_{Κιν}(t) = \frac{1}{2}\,m\,\upsilon_o^2\,\text{ημ}^2(\omega\, t)$$

Κινητική ενέργεια

$$E_{Δυν}(t) = \frac{1}{2}\,D\,x_0^2\,\text{συν}^2(\omega\, t)$$

Δυναμική ενέργεια

$$E_{Μηχ}(t) = E_{Κιν}(t) + E_{Δυν}(t) = \frac{1}{2}\,m\,\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}\,D\,x_0^2 =$$

Ολική ενέργεια

4.2 Απλά συστήματα που εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση (Παραδείγματα συστημάτων που είναι απλοί αρμονικοί ταλαντωτές)

Όπως είδαμε από το προηγούμενο παράδειγμα απλής αρμονικής ταλάντωσης, η συνολική δύναμη και η θέση (απομάκρυνση) από τη θέση ισορροπίας ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$F=-D\,x \qquad (12)$$

Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται πάντοτε, όταν ένα κινούμενο σύστημα εκτελεί α.α.τ..

Αντίστροφα: σε όποιο σύστημα συμβαίνει να ισχύει η παραπάνω συνθήκη μεταξύ μίας τυχαίας θέσης από τη θέση ισορροπίας του και της συνολικής δύναμης που δρα στο σώμα, σ' αυτή τη θέση, τότε το σύστημα, εάν απομακρυνθεί από τη συγκεκριμένη θέση ισορροπίας του και στη συνέχεια αφεθεί ελεύθερο, θα κινηθεί εκτελώντας απλή αρμονική ταλάντωση.

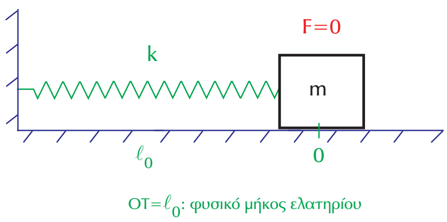
Η ικανοποίηση ή όχι της συνθήκης (12) αποτελεί το κριτήριο για το κατά πόσον ένα σύστημα θα εκτελέσει α.α.τ.

Σε πολλά φυσικά συστήματα συμβαίνει, εάν διαταραχτούν από τη θέση ισορροπίας τους, η συνολική δύναμη η οποία δρα επάνω τους να ικανοποιεί τη συνθήκη (12) άλλοτε ακριβώς και άλλοτε κατά προσέγγιση. Τα συστήματα αυτά, αν διαταραχθούν λίγο από τη θέση ισορροπίας τους θα αρχίσουν να κάνουν α.α.τ. γύρω από τη θέση αυτή .

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε μερικά απλά παραδείγματα, που όμως αποτελούν απλουστεύσεις πιο σύνθετων καταστάσεων.

4.2 – 1 Το σύστημα: οριζόντιο ελατήριο – σώμα

Το σύστημα εικονίζεται στην Εικόνα 40 και μοιάζει πολύ με το προηγούμενο παράδειγμά μας με τα δύο ελατήρια και με το αμαξίδιο το οποίο μελετήσαμε και πειραματικά.



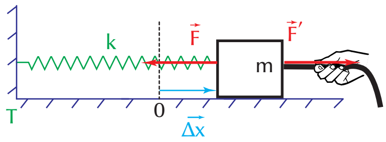
Εικ. 40

Το σύστημά μας πρακτικά δεν υλοποιείται εύκολα στο Εργαστήριο, και γι' αυτό θα περιοριστούμε μόνο στη θεωρητική μελέτη του ως μοντέλου .

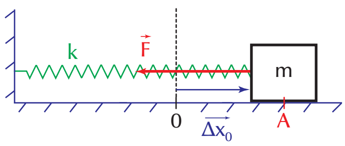
Για το εικονιζόμενο σύστημα κάνουμε μερικές υποθέσεις[9], που απλουστεύουν τη μελέτη :

- το ελατήριο είναι ιδανικό, δηλαδή δεν έχει μάζα και ακολουθεί απολύτως το νόμο του Hooke
- μεταξύ σώματος και οριζόντιας επιφάνειας δεν αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής
- δεν αναπτύσσονται πάνω στο σώμα ή στο ελατήριο δυνάμεις αντίστασης από τον αέρα .

Στη συνέχεια, θα δούμε ότι το συγκεκριμένο μοντέλο μπορεί να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από μία θέση στην οποία, κάτω από κατάλληλες συνθήκες, μπορεί να ισορροπεί . Θα δούμε, δηλαδή, ότι το συγκεκριμένο μοντέλο αποτελεί απλό αρμονικό ταλαντωτή .



Εικ. 41



Εικ. 42

Στη θέση φυσικού μήκους του οριζόντιου ελατηρίου το σύστημα ελατήριο – σώμα ισορροπεί, όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση (Εικ. 40) .

Με το χέρι μας απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας μέχρι μία τυχαία θέση Α, όπου το συγκρατούμε για λίγο . Στη θέση αυτή το σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση δύο αντίθετων δυνάμεων, της $\vec{F}$ από το ελατήριο και της $\vec{F}'$ από το χέρι μας (βλ. Εικ. 41) .

Τι θα συμβεί, εάν αφήσουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί ;

Στο σώμα, μετά την απομάκρυνση του χεριού μας, θα ασκείται μόνο η δύναμη από το ελατήριο, για την οποία θα ισχύει (λόγω ν. Hooke) :

$$F = -k\,x \qquad (\text{ι})$$

---

[9] *Ένα τέτοιο σύστημα με τις παραπάνω υποθετικές ιδιότητες δεν υπάρχει στη φύση. Αποτελεί ένα "μοντέλο" μελέτης, το οποίο, ενώ δεν υπάρχει στην πραγματικότητα, έχει ιδιότητες που βρίσκονται πολύ κοντά σ' αυτήν:*

- *Το ελατήριο έχει πολύ μικρότερη μάζα από αυτήν του σώματος και ακολουθεί το νόμο του Hooke για μία περιοχή παραμορφώσεών του.*
- *Οι δυνάμεις τριβής είναι πολύ μικρότερες από τη δύναμη που αναπτύσσει το ελατήριο κατά το μεγαλύτερο μέρος της κίνησης.*

Η σχέση (ι) ουσιαστικά αποτελεί τη συνθήκη (12) για εκτέλεση α.α.τ. με σταθερά : $D = k$ (ιι)

οπότε θα ισχύουν όλες οι σχέσεις του πίνακα ΙΙΙ με D = k.

Δίνουμε μόνο την εξίσωση της θέσης από το σημείο Ο, καθώς και τις εκφράσεις για την κυκλική συχνότητα και την περίοδο :

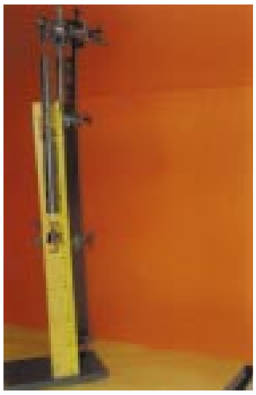
$$x = x(t) = x_0 \,συν\, (\omega\, t) \qquad (16)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (17α) \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (17β)$$

Ερώτηση: Στο παράδειγμα με το αμαξίδιο και τα δύο ελατήρια πώς πρέπει να επι-λέξουμε ένα και μοναδικό νέο ελατήριο, το οποίο θα αντικαθιστούσε ι-σοδύναμα τα δύο άλλα, ώστε η νέα ταλάντωση που θα πάρουμε να είναι ίδια με την προηγούμενη (δηλαδή αυτήν με τα δύο ελατήρια);

4.2-2 Το σύστημα : κατακόρυφο ελατήριο - σώμα

Ένα παρόμοιο με το προηγούμενο σύστημα είναι αυτό πού εικονίζεται στη φωτογραφία:



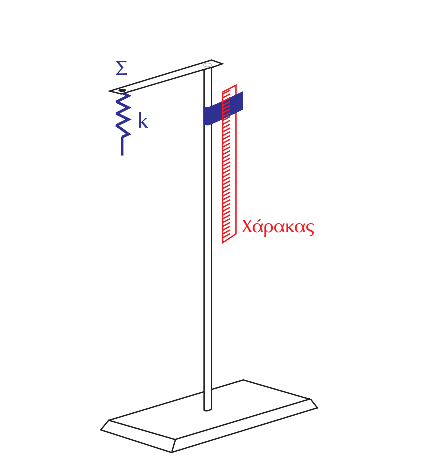
Εικ. 43

Το σύστημα της φωτογραφίας είναι πιο σύνθετο από το προηγούμενο, αλλά υλοποιείται πολύ εύκολα στο Εργαστήριο Φυσικής (βλ. Εικ. 43 και Εικ. 45)· μπορούμε, λοιπόν, να το μελετήσουμε και πειραματικά :

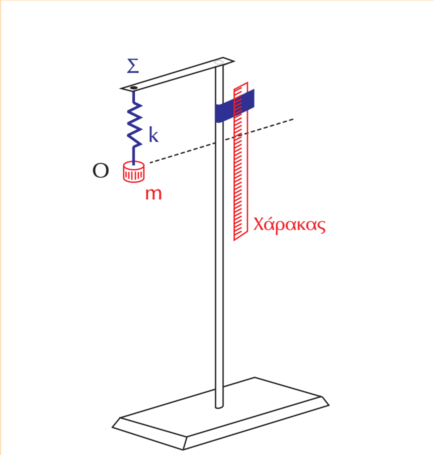
5η Πειραματική δραστηριότητα

Αναρτήστε από το άγκιστρο, στο σημείο του Σ ορθοστάτη (βλ. Εικ. 44), ένα ελατήριο από αυτά πού διαθέτει το σχολικό εργαστήριο, με ελαστική σταθερά $k \cong 2$ έως $3\,\frac{N}{m}$.

◊ Προσαρμόστε σταθερά πάνω στον ορθοστάτη, σε κατακόρυφη θέση, ένα χάρακα με υποδιαιρέσεις σε - όπως στη φωτογραφία (Εικ. 43).



Εικ. 44



Εικ. 45

◊ Στη συνέχεια, τοποθετήστε στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου ένα σώμα μάζας m ≅ 45 – 50 gr, αφήστε το σύστημα να ισορροπήσει και σημειώστε τη θέση αυτή, Ο. (βλ. Εικ. 45).

◊ Απομακρύνετε το σώμα σε μία θέση Α, 10 – 15 κάτω από το σημείο , και αφήστε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί .

- Τι παρατηρείτε ; Χαρακτηρίστε και εξηγήστε την κίνηση που βλέπετε
- Μετρήστε το χρόνο που χρειάζεται το σώμα για μία πλήρη παλινδρόμηση (πάνω- κάτω).

Από το προηγούμενο πείραμα παρατηρούμε ότι το σώμα κινείται κατακόρυφα παλινδρομικά, πάνω-κάτω, γύρω από το σημείο . Πιο συγκεκριμένα, η κίνησή του βρίσκεται περιοδική, με περίοδο [10] T ≅ 0.933 s.

Θα προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε όσα παρατηρήσαμε στο πραγματικό σύστημα της φωτογραφίας (βλ. Εικ.43), μελετώντας στη θέση του κάτι απλούστερο, με τις ίδιες σχεδόν ιδιότητες : θα μελετήσουμε ένα μοντέλο στο οποίο, ως προς το ελατήριο και τη μάζα, θα κάνουμε ακριβώς τις ίδιες υποθέσεις με αυτές που κάναμε και για τη μελέτη του συστήματος οριζόντιο ελατήριο -μάζα .

Όταν το σώμα ισορροπεί στη θέση *O* (βλ. Εικ. 45), ασκούνται πάνω του δύο δυνάμεις : η δύναμη του βάρους του, $\vec{B}$, και η δύναμη, $\vec{F}_0$, από το τεντωμένο ελατήριο, και θα ισχύει ότι :

$$k\,\Delta l = m\,g \qquad (\text{ııı})$$

[10] *Η περίοδος αυτή προδιορίστηκε έμμεσα από το πλήθος 15, περίπου, πλήρων επαναλήψεων της κίνησης στη διάρκεια14s .*

Στη θέση Α το σώμα δέχεται πάλι τη δύναμη βάρους, $\vec{B}$, ίδια με την προηγούμενη, τη δύναμη, $\vec{F}$, από το ελατήριο, και, όσο το συγκρατούμε, και τη δύναμη, $\vec{F}'$ από το χέρι μας· οι τρεις δυνάμεις ισορροπούν .

Όταν το αφήσουμε ελεύθερο, η δύναμη $\vec{F}$, μηδενίζεται, και συνισταμένη δύναμη θα είναι η $\vec{B}+\vec{F}$, για την οποία θα ισχύει ότι :

$$B+F=F-mg=-kx \qquad (\text{ιv})$$

όπου η θέση του σώματος ως προς το σημείο *Ο* .

Στη σχέση (iv) αναγνωρίζουμε τη συνθήκη (12) για εκτέλεση α.α.τ. γύρω από το σημείο Ο.

Η σταθερά της α.α.τ. θα είναι : $D=k$ (v)
και θα ισχύουν όλες οι σχέσεις του πίνακα ΙΙΙ, με $D=k$.

Δίνουμε μόνο την εξίσωση της θέσης από το σημείο , καθώς και τις εκφράσεις για την κυκλική συχνότητα και την περίοδο :

$$x=x(t)=x_0\,\text{συν}\,(\omega\, t) \qquad (18)$$

$$\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (19\alpha) \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (19\beta)$$

Παρατήρηση (Μεθοδολογική σημείωση)

Η δύναμη που επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας Ο είναι η συνισταμένη, η οποία, στο παράδειγμα αυτό, δεν ταυτίζεται με τη δύναμη του ελατηρίου.Στο προηγούμενο παράδειγμα ταυτιζόταν με τη μοναδική δύναμη από το ελατήριο πάνω στο σώμα.

Στο παράδειγμα με το αμαξίδιο και τα δύο ελατήρια η δύναμη που το επανέφερε στη θέση ισορροπίας προερχόταν από τις ελαστικές δυνάμεις και των δύο ελατηρίων.

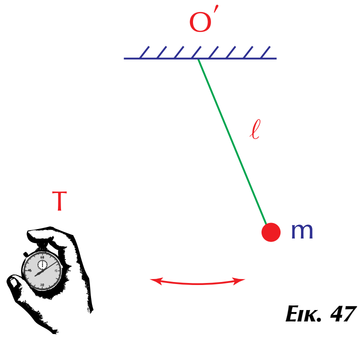
Γενικά, η δύναμη που επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας του είναι η συνολική δύναμη . Η δύναμη αυτή, η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη (Α), ονομάζεται « δύναμη επαναφοράς ».

4.2 – 3. Το “απλό εκκρεμές”

α. Οι πειραματικές παρατηρήσεις

Από την πειραματική μελέτη της κίνησης του απλού εκκρεμούς (βλ. Εργαστηριακό Οδηγό) παρατηρήσαμε ότι αυτό αιωρείται περιοδικά (βλ. Εικ. 47) και επιπλέον καταλήξαμε στα εξής συμπεράσματα:

Εικ. 46



Εικ. 47

Συμπέρασμα Ι: Η περίοδος του εκκρεμούς εξαρτάται από το μήκος του και συγκεκριμένα ισχύει ότι: $T^2 \propto \ell$ ή, ισοδύναμα : $T \propto \sqrt{\ell}$

Συμπέρασμα ΙΙ: Η περίοδος, , του εκκρεμούς δεν εξαρτάται από τη μάζα του σώματος του εκκρεμούς .

Συμπέρασμα ΙΙΙ: Η περίοδος της ταλάντωσης του εκκρεμούς δεν εξαρτάται από το πλάτος της, όταν αυτό είναι μικρό.

Δραστηριότητες

Α: Χρησιμοποιώντας ένα από τα προηγούμενα διαγράμματα Τ– l ή T^2– l του Εργαστηριακού Οδηγού για την κίνηση του εκκρεμούς, μπορείτε να « μαντέψετε » το κατάλληλο μήκος για το νήμα, ώστε η αιώρηση της σφαίρας να έχει περίοδο 1 s;

Β: Φτιάξτε ένα απλό εκκρεμές, του οποίου η περίοδος να είναι, περίπου, το 1 s; .

Για να δώσετε μεγαλύτερη ακρίβεια στο εκκρεμές σας, ελέγξτε την περίοδό του με τη στροβοσκοπική μέθοδο, και εάν δεν τη βρείτε ικανοποιητικά ίση με 1 s, αλλάξτε, κατάλληλα, λίγο το μήκος του νήματος και επαναλάβετε τον έλεγχο με το ηλεκτρονικό στροβοσκόπιο .

Στα προηγούμενα συμπεράσματα φτάσαμε αξιοποιώντας μόνο το πείραμα·θα μπορούσαμε όμως να τα ερμηνεύσουμε βασιζόμενοι στις έως τώρα θεωρητικές γνώσεις μας; Η απάντηση είναι θετική, και με αυτό θα ασχοληθούμε στην επόμενη ενότητα .

Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε και θεωρητικά ότι η περίοδος του απλού εκκρεμούς δίνεται, σε συνάρτηση με το μήκος του, από τη σχέση :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

όπου, g η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας στον τόπο όπου γίνεται η αιώρηση του εκκρεμούς, T η περίοδος και l το μήκος του .

Θα μπορέσουμε, μάλιστα, να προβλέψουμε, επιπλέον, και άλλα στοιχεία για την κίνηση του εκκρεμούς, τα οποία δεν παρατηρήσαμε άμεσα στο συγκεκριμένο πείραμα .

β. Η ερμηνεία των πειραματικών αποτελεσμάτων – Το μοντέλο

Θα προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε όσα παρατηρήσαμε με το εξής μοντέλο, που θα το ονομάσουμε:

Απλό ή μαθηματικό εκκρεμές :

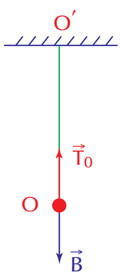
- το νήμα είναι ‘ιδανικό’, δηλαδή δεν έχει μάζα, έχει μόνο μήκος, δεν έχει ελαστικές ιδιότητες (: έχει σταθερό μήκος) και παραμένει πάντα ευθύ .
- το σώμα έχει μάζα, αλλά δεν καταλαμβάνει χώρο (‘υλικό σημείο’) .
- δεν αναπτύσσονται από τον αέρα δυνάμεις αντίστασης πάνω στο σώμα ή στο νήμα .

γ. Η κίνηση του απλού εκκρεμούς είναι κατά προσέγγιση α.α.τ.

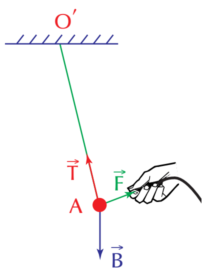
Για την αρχική απομάκρυνση, , από τη θέση ισορροπίας θα υποθέσουμε ότι αυτή είναι αρκετά μικρή συγκρινόμενη με το μήκος, l , του νήματος του εκκρεμούς :

$$x_0 << \ell \qquad (\Upsilon)$$

1. Όταν το σώμα ισορροπεί στη θέση Ο (βλ. Εικ. 48), πάνω του ασκούνται δύο δυνάμεις: η δύναμη του βάρους του, $\vec{B}$, και η δύναμη, $\vec{T}_0$, από το κατακόρυφο νήμα (Βλ. Εικ. 48) .



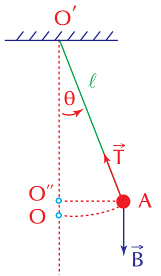
Εικ. 48



Εικ. 49

2. Όσο συγκρατούμε το σώμα στη θέση Α (ισορροπία), πάνω του δρα πάλι η δύναμη του βάρους (κατακόρυφη), η δύναμη $\vec{T}$ κατά μήκος του νήματος (‘τάση του νήματος’) και η δύναμη του χεριού μας, $\vec{F}$ (βλ. Εικ. 49), οπότε :

$$\vec{B} + \vec{T} + \vec{F} = \mathbf{0} \qquad (\text{vi})$$



Εικ. 50

3. Όταν αφήσουμε το σώμα (θέση Α), τότε η δύναμη, $\vec{F}$, από το χέρι μας δε δρα πλέον πάνω του, και το σώμα αρχίζει μία κίνηση υπό την επίδραση των δύο άλλων δυνάμεων μόνο (βλ. Εικ. 50) :

$$\vec{B} + \vec{T} = m\,\vec{\alpha} \qquad (\text{vii})$$

Με την υπόθεση ότι $x_0 << \ell$ η σχέση (vii) ισοδυναμεί με τις δύο σχέσεις :

στον άξονα: y y′: $B + Ty \cong 0$ και στον άξονα : xx′: $T_x \cong m\,\alpha$ (viii)

και η $\vec{T}_x$ (βλ. Εικ. 50) είναι - κατά προσέγγιση – η συνισταμένη δύναμη στη θέση Α. Τότε θα έχουμε (βλ. Εικ. 50) :

$$\vec{T}_x = |\vec{T}|\,\eta\mu\theta \qquad (\text{ix}) \qquad \vec{T}_y = |\vec{T}|\,\sigma\upsilon\nu\theta \cong -mg \qquad (\text{x})$$

όπου, *θ*, η γωνία που σχηματίζει σ′ αυτή τη θέση το νήμα με την κατακόρυφο.

Επειδή, από την Εικόνα 50 στο ορθογώνιο τρίγωνο Ο′Ο′′Α :

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{(O''A)}{(O'O'')} \cong \frac{(O''A)}{(O'A)} = \frac{x}{\ell},$$

τελικά, βρίσκουμε ότι : $$T_x \cong -mg\frac{x}{\ell} = -\left(\frac{mg}{\ell}\right)x \qquad (\text{xi})$$

Στην τελευταία σχέση αναγνωρίζουμε τη συνθήκη (12) : $T_x \cong -Dx$ με :

$$D = \frac{mg}{\ell} \qquad (20)$$

για εκτέλεση[1] α.α.τ. γύρω από το σημείο Ο , αφού η T_x είναι η (κατά προσέγγιση) συνισταμένη δύναμη στο σώμα και το x, για μικρές[2] γωνίες,θ,(όπως εδώ), η αντίστοιχη απομάκρυνσή του από το σημείο (: θέση ισορροπίας) .

Ό,τι συμβαίνει στη θέση Α συμβαίνει και σε κάθε άλλη θέση, Μ, που παίρνει το σώμα πάνω στο τόξο ΑΑ′ κατά την κίνησή του[3].

---

[1] *Κατά προσέγγιση, εδώ.*

[2] *Ακριβέστερα: x είναι η απομάκρυνση από την κατακόρυφη ΟΟ′, δηλαδή* $\vec{x} = \overrightarrow{O''A}$ για μικρές,όμως, γωνίες θ το τόξο $\overset{\frown}{OA}$, πάνω στο οποίο γίνεται η κίνηση,μοιάζει με ευθύγραμμο τμήμα, που σχεδόν ταυτίζεται με το ΟΑ′′ οπότε η πάντα οριζόντια απομάκρυνση $\vec{x}$ από την κατακόρυφη ΟΟ′ σχεδόν ταυτίζεται με την απομάκρυνση $\overset{\frown}{OA}$, από τη θέση ισορροπίας Ο (η οποία είναι σχεδόν οριζόντια).

[3] *Μπορούν να δοθούν περισσότερα λυμένα παραδείγματα στη τάξη.*

Ειδικά στη θέση Ο η συντεταγμένη δύναμη και η απομάκρυνση από τη θέση αυτή μηδενίζονται ταυτόχρονα, αλλά εξακολουθεί να ισχύει η σχέση (12) .

Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι η παραπάνω συνθήκη (12) ισχύει γενικότερα, σε κάθε θέση του σώματος :
άρα, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πάνω στη σχεδόν ευθύγραμμη διαδρομή Α'Ο Α.

Το ίδιο είχαμε διαπιστώσει, πειραματικά στην αντίστοιχη πειραματική δραστηριότητα (3η) (βλ. Εργαστηριακό Οδηγό) .

δ. Οι βασικές εξισώσεις του απλού εκκρεμούς

Λαμβάνοντας υπόψη ότι για το απλό εκκρεμές είναι $D = \frac{mg}{\ell}$ αντικαθιστώντας στις σχέσεις του πίνακα ΙΙΙ παίρνουμε τις αντίστοιχες σχέσεις για το απλό εκκρεμές· π.χ. :

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad (21\alpha) \qquad\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad (21\beta)$$

Κυκλική συχνότητα και περίοδος απλού εκκρεμούς

Εξάλλου η θέση του σώματος του απλού εκκρεμούς θα δίνεται από τη σχέση:

$$x = x(t) = x_0\,\sigma\upsilon\nu(\omega\,t) = x_0\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{T}\,t\right) \qquad (22)$$

Θέση (σώματος) απλού εκκρεμούς

όπου : $\vec{x} = \overrightarrow{O''A}$, το πλάτος της α.α.τ. του σώματος, ω η κυκλική συχνότητα της κίνησής του (βλ. (21β)) και Τ η περίοδός της .

ε. Ο ρόλος της ενέργειας κατά την κίνηση του απλού εκκρεμούς

Από την παρατήρηση της κίνησης - κατά την εκτέλεση του πειράματος [4] – διαπιστώνουμε ότι το σώμα αποκτά τη μέγιστη ταχύτητά του, όταν περνά από το σημείο Ο, ενώ τη μέγιστη επιτάχυνσή του την αποκτά στη θέση, Α, όπου η συνισταμένη δύναμη, $\vec{T}_x$, πάνω του, γίνεται μέγιστη.

Αντίθετα, στη θέση Α η συνισταμένη δύναμη σχεδόν[5] μηδενίζεται, το ίδιο και η επιτάχυνση, ενώ στη θέση Α μηδενίζεται η ταχύτητά του .

Τα παραπάνω μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι όταν - κατά τη διάρκεια της κίνησης - η κινητική ενέργεια του σώματος γίνεται μέγιστη, τότε η συνολική δύναμη που δέχεται από το περιβάλλον του μηδενίζεται, (θέση Ο), και, αντίθε-

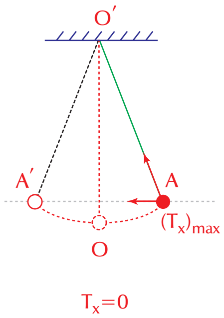
---

[4] *Αυτό μπορεί να φανεί και από τα διαγράμματα υ–t και α – t (βλ. σχετική δραστηριότητα στον Εργαστηριακό Οδηγό)*

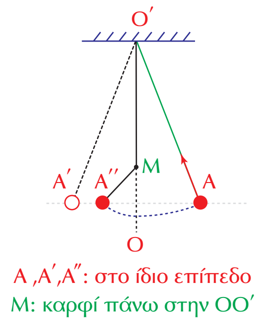
[5] *Σχετική αριθμητική εφαρμογή μπορεί να δοθεί στη τάξη.*

τα, όταν η κινητική ενέργειά του μηδενίζεται, η συνολική δύναμη που δέχεται από το περιβάλλον του γίνεται μέγιστη (θέσεις Α Α′,) (βλ. Εικ. 51).

Συμβαίνει, δηλαδή στο εκκρεμές κατά την α. α. τ του σώματος, μία διαρκής μετατροπή κινητικής σε άλλης μορφής ενέργεια, και αντίστροφα.



Εικ. 51



Εικ. 52

Στη μετατροπή αυτή δε συμμετέχει καθόλου η τάση του νήματος, $\vec{T}$, η οποία ούτε παράγει ούτε καταναλώνει έργο, αφού είναι πάντοτε κάθετη στην κυκλική διαδρομή την οποία ακολουθεί το σώμα .

Η μόνη δύναμη που παράγει ή καταναλώνει έργο είναι η συντηρητική δύναμη του βάρους, $\vec{B}$, η οποία μετατοπίζει διαρκώς το σημείο εφαρμογής της πάνω στο κυκλικό τόξο Α′ΟΑ (βλ. και Εικ. 51) .

Η άλλη μορφή ενέργειας, λοιπόν, στην οποία μετατρέπεται η κινητική ενέργεια του σώματος είναι η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στη δύναμη του βάρους $\vec{B}$, του σώματος . Το βάρος, κατά τη διάρκεια της κίνησης, κινεί το σημείο εφαρμογής του κατακόρυφα μεταξύ του οριζόντιου επιπέδου και του οριζόντιου επιπέδου (βλ. Εικ. 50) .

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε αυξομείωση της δυναμικής ενέργειας που οφείλεται στο βάρος και αντίστοιχες μεταβολές της κινητικής ενέργειας του σώματος επειδή η συνολική ενέργεια του απλού εκκρεμούς παραμένει (σχεδόν) σταθερή.

Τη διατήρηση της συνολικής ενέργειας του σώματος στο απλό εκκρεμές τη διαπιστώνουμε άμεσα[6] από την πλήρη κίνησή του : το σώμα, κατά τη διάρκειά της, φτάνει πάντοτε στο ίδιο σχεδόν ύψος, αυτό του επιπέδου ΑΑ′ (Εικ. 51 και Εικ. 52).

Υπολογισμός της συνολικής ενέργειας του εκκρεμούς : Το σώμα στη θέση έχει συνολική ενέργεια όση η κινητική του ενέργεια :

$$E_{Μηχ,\,Ο} \equiv E_{Κιν,\,Ο} = \frac{1}{2}\, m\, υ_0^2 \qquad (29)$$

---

[6] *Ο Γαλιλαίος μάλιστα , με ένα παρόμοιο πείραμά του διεπίστωσε ότι το σώμα φτάνει πάντα στο ίδιο ύψος, ακόμη και αν αναγκαστεί να ακολουθήσει μία διαφορετική διαδρομή (βλ.Εικ. 52).*