ενώ, στη θέση Α έχει συνολική ενέργεια όση η δυναμική του ενέργεια ως προς το οριζόντιο επίπεδο (βλ. Εικ. 51) :

$$E_{Μηχ,A} \equiv E_{Δυν,A} = mg(\ell - \ell\,συνθ_0) \qquad (30)$$

Όπως δείχνει το πείραμα, η συνολική ενέργεια του σώματος στο εκκρεμές διατηρείται σταθερή· οπότε, παίρνουμε :

$$E_{Κιν,O} = E_{Δυν,A} \qquad δηλαδή: \quad \frac{1}{2}\,m\,υ_0^2 = mg\,\ell\,(1 - συνθ_0) \qquad (31)$$

4.2-4 Παραδείγματα και αριθμητικές εφαρμογές

1. Τι συνολική ενέργεια προσδίδουμε σε ένα εκκρεμές μήκους l =1m και μάζας m= 1Kgr, στην Αθήνα, όταν το εκτρέπουμε από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας του κατά γωνία φ = 6 μοίρες ; (η επιτάχυνση της βαρύτητας στην Αθήνα είναι : $g = 9.80\,\frac{m}{s^2}$).

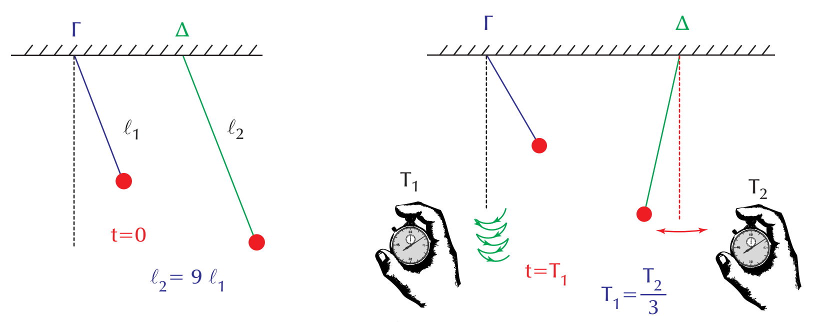
Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η συνολική ενέργεια του εκκρεμούς θα είναι:

$$E_{Μηχ,O} \equiv m\,g\,\ell\,(1 - συνθ_0)$$

Οπότε : $E_{Μηχ,O} \equiv 1\ kgr \times 9.80\,\frac{m}{s^2} \times 1\ m \times (1 - συν(6^0)) =$

$$= 9.80\ N\,m \times (1 - συν(6^0)) \cong 9.80 \times 0.896\ J \cong 8.776\ J$$

2. Τα δύο εκκρεμή της Εικόνας 53 εκτρέπονται, λίγο, από τις αντίστοιχες θέσεις ισορροπίας τους και στη συνέχεια αφήνονται ταυτόχρονα να εκτελέσουν αιωρήσεις . Το μήκος του νήματος στο δεύτερο εκκρεμές είναι εννέα φορές μεγαλύτερο από το μήκος του νήματος του πρώτου.
Πότε θα ξαναβρεθούν στην ίδια κατάσταση;



Εικ. 53 Εικ. 54

Απάντηση: Η περίοδος του δεύτερου εκκρεμούς θα είναι τριπλάσια της περιόδου του πρώτου :

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{9\ \ell_1}{g}} = 3\left(2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}\right) = 3\ T_1$$

Άρα, τα δύο εκκρεμή θα ξαναβρεθούν στην ίδια κατάσταση με αυτήν που βρίσκονταν όταν ξεκίνησαν ύστερα από μία πλήρη αιώρηση του δεύτερου εκκρεμούς ή , ισοδύναμα, ύστερα από τρεις πλήρεις αιωρήσεις του πρώτου από τη χρονική στιγμή που τα αφήσαμε ελεύθερα (βλ. Εικ. 54) .

Το ίδιο θα επαναληφθεί, θεωρητικά, άπειρες φορές, δηλαδή στο τέλος της δεύτερης, τρίτης, τέταρτης κ.ο.κ. πλήρους αιώρησης του δεύτερου εκκρεμούς ή, ισοδύναμα, στο τέλος της έκτης, έννατης, δωδέκατης κ.ο.κ. πλήρους αιώρησης του πρώτου εκκρεμούς .

Στην πραγματικότητα, όμως, λόγω των τριβών του νήματος αλλά και του σώματος με τον αέρα που περιβάλλει τα εκκρεμή, οι ταλαντώσεις τους, πρακτικά, κάποια στιγμή θα σταματήσουν· έτσι, εάν θέλουμε να επαληθεύσουμε την προηγούμενη πρόβλεψή μας, αυτό θα μπορεί να γίνει μόνο για τις πρώτες 10-20 αιωρήσεις του πρώτου εκκρεμούς .

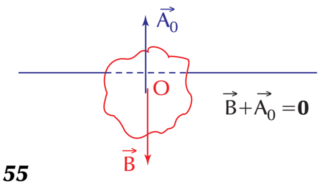
Ερώτηση: Στην παραπάνω μικρή εκτροπή των δύο εκκρεμών από τις αντίστοιχες θέσεις ισορροπίας τους είχε σημασία να ελέγξουμε εάν οι αρχικές απομακρύνσεις από αυτές ήταν ίδιες ή όχι, και γιατί ;

4.3 Εφαρμογές των ταλαντώσεων (στην καθημερινη ζωή)[18]

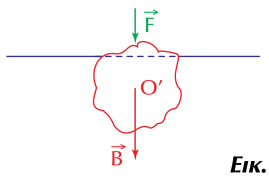
Κατακόρυφη ταλάντωση πλωτών αντικειμένων

Σε ένα αντικείμενο που επιπλέει (βλ. Εικ. 55) η δύναμη, $\vec{B}$, του βάρους και η δύναμη, $\vec{A}_0$, της άνωσης "βρίσκονται σε ισορροπία" :

$$\vec{B} + \vec{A}_0 = \mathbf{0} \qquad (1)$$



Εικ. 55

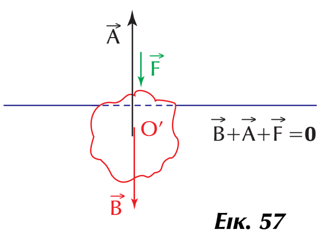


Εικ. 56

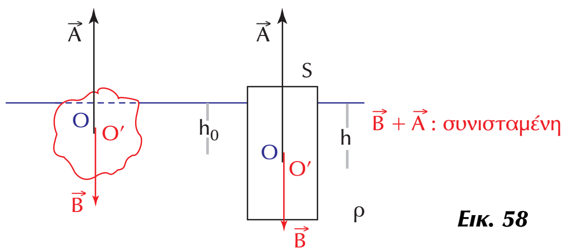
Όταν, όμως, για κάποιο λόγο μία δύναμη $\vec{F}$, (Βλ. Εικ. 56) το απομακρύνει κατακόρυφα προς τα κάτω από τη θέση ισορροπίας του, το αντικείμενο θα αποκτήσει μεγαλύτερη άνωση, $\vec{A}$, επειδή θα αυξηθεί το βυθισμένο τμήμα του όγκου του.

Το αντικείμενο θα ισορροπήσει σε μία νέα θέση (βλ. Εικ. 57) για την οποία - όσο εφαρμόζεται η δύναμη - θα ισχύει :

$$\vec{B} + \vec{A} + \vec{F} = \mathbf{0} \qquad (2)$$



Εικ. 57



Εικ. 58

Εάν, κάποια στιγμή, παύσει να δρα η δύναμη $\vec{F}$, θα δημιουργηθεί στο αντικείμενο, στη θέση αυτή, συνολική δύναμη $\vec{B}+\vec{A}$ με κατεύθυνση κατακόρυφα προς τα πάνω, η οποία θα τείνει να το επαναφέρει στη θέση ισορροπίας του, O (βλ. Εικ. 58) .

---

[18] Περισσότερες εφαρμογές μπορούν να δοθούν στην τάξη .

Εάν οι πλευρικές επιφάνειες του αντικειμένου είναι κατακόρυφες - στην περιοχή όπου αυτές βυθίζονται στο υγρό – τότε, ο βυθισμένος κάθε φορά όγκος του και η αντίστοιχη άνωση μπορούν να υπολογιστούν εύκολα :

$$A_0=\rho\, g\, S\, h_0 + \rho\, g\, V' \qquad A=\rho\, g\, S\, h + \rho\, g\, V' \qquad (3)$$

όπου ρ : η πυκνότητα του υγρού, *g*: η επιτάχυνση της βαρύτητας, *S*: η σταθερή διατομή στην περιοχή του βυθισμένου τμήματος του σώματος, V′: το τμήμα του όγκου το οποίο αντιστοιχεί στο μέρος του σώματος που έχει ακανόνιστο σχήμα και είναι πάντοτε βυθισμένο, h_0: το βύθισμα των κατακόρυφων πλευρικών επιφανειών του αντικειμένου όταν το κέντρο βάρους βρίσκεται στη θέση ισορροπίας Ο**,** και h: το αντίστοιχο βύθισμα όταν το κέντρο βάρους βρίσκεται στη θέση Ο′.

Η δύναμη επαναφοράς στη θέση y - του κέντρου βάρους - από τη θέση ισορροπίας του, Ο , θα δίνεται από τη σχέση :

$$G=\rho\, g\, S(h - h_0)=-\rho\, g\, Sy \qquad \Rightarrow \qquad G=-\rho\, g\, S\, y \qquad (\,A\,)$$

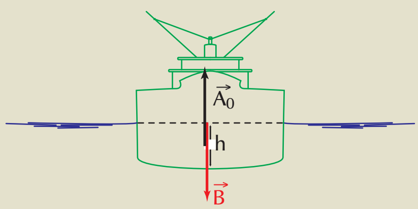
Στη σχέση (Α) αναγνωρίζουμε τη συνθήκη : $G=-D\,y \quad (\,B\,)$
για εκτέλεση από το αντικείμενο απλής αρμονικής ταλάντωσης γύρω από το σημείο ισορροπίας κατά την κατεύθυνση της δύναμης επαναφοράς και με σταθερά : $D=\rho\, g\, S \qquad (\,\Gamma\,)$

Η κυκλική συχνότητα (φυσική) και η αντίστοιχη περίοδος της ελεύθερης ταλάντωσης του αντικειμένου (α.α.τ.) θα δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις:

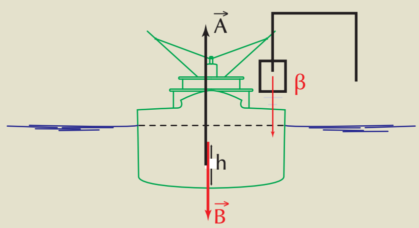
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{\rho\, g\, S}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho\, g\, S}} \qquad (\,\Delta\,)$$

Κατακόρυφη ταλάντωση Πλοίου

Τα προηγούμενα έχουν άμεση εφαρμογή και στα πλοία, όταν για κάποιο λόγο αυτά απομακρυνθούν από την κατακόρυφη ισορροπία τους και στη συνέχεια αφεθούν ελεύθερα (βλ. Εικ. 59) ή εάν, ισοδύναμα, μεταβληθεί απότομα η κατακόρυφη θέση ισορροπίας τους είτε από απότομη φόρτωση είτε από απότομη εκφόρτωση - που είναι και το πιο συνηθισμένο (βλ. Εικ. 60) .



Εικ. 59



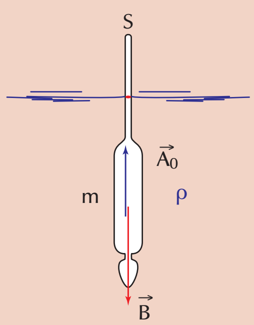
Εικ. 60

Αποδεικνύεται ότι η κυκλική συχνότητα και η περίοδος ταλάντωσης ενός πλοίου με παράλληλες πλευρικές επιφάνειες σε αυτή την περίπτωση δίνεται[19] αντιστοίχως από τις σχέσεις :

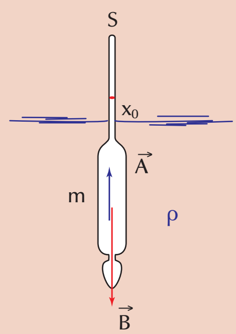
$$\omega = \sqrt{\frac{\rho\, g\, S}{m}} = \sqrt{\frac{g}{h}} \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho\, g\, S}} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} \quad (\Delta')$$

όπου h το βύθισμα του πλοίου.

Αριθμητική εφαρμογή: Ένα πυκνόμετρο που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της πυκνότητας των υγρών της μπαταρίας του αυτοκινήτου φαίνεται να επιπλέει όπως στην Εικόνα 61:



Εικ. 61



Εικ. 62

Το συγκεκριμένο πυκνόμετρο έχει μάζα και στο τμήμα του που βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια του υγρού έχει σταθερή διατομή. Τα υγρά της μπαταρίας του αυτοκινήτου είναι υδατικό διάλυμα θειικού οξέος με πυκνότητα:

$$\rho = 1.2 \times 10^3 \frac{kgr}{m^3}$$

Εάν απομακρύνουμε το πυκνόμετρο κατακόρυφα από τη θέση ισορροπίας του, αυτό θα εκτελέσει ως προς την επιφάνεια των υγρών της μπαταρίας (βλ. Εικ.62) α.α.τ. με περίοδο: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho\, g\, S}} =$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{10 \times 10^{-3}\, kgr}{1.2 \times 10^3\, kgr\, m^{-3}\; 9.8\, m\, s^{-2}\;\; 0.25 \times 10^{-4}\, m^2}} \Leftrightarrow \quad T \;\cong\; 1.159 \text{ s}$$

Ερώτηση (Δραστηριότητα) : Πώς αλλιώς θα μπορούσατε να μετρήσετε την πυκνότητα των υγρών της μπαταρίας του αυτοκινήτου σας με ένα πυκνόμετρο, στο οποίο όμως δε φαίνονται οι υποδιαιρέσεις της κλίμακάς του;

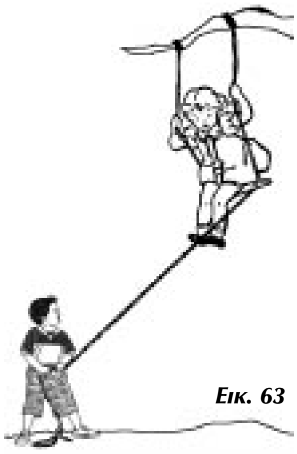
[19] *Μία απόδειξη μπορεί να δοθεί στην τάξη .*

4.4 Το φαινόμενο του συντονισμού

4.4-1 Εισαγωγή στο φαινόμενο

Η αιώρα

Ας θυμηθούμε το παιχνίδι με την κούνια, όπου ένα παιδί αιωρείται ρυθμικά (βλ. Εικ. 64) . Συνήθως, προκειμένου να αρχίσει αυτή η περιοδική κίνηση, χρησιμοποιούμε ένα σχοινί, με το οποίο απομακρύνουμε αρχικά την κούνια και το παιδί από τη θέση ισορροπίας τους (βλ. Εικ. 63) .



Εικ. 63

Εικ. 64

Η κούνια συνεχίζει να αιωρείται αλλά, λόγω των τριβών, κυρίως με τον αέρα, το πλάτος της ταλάντωσης θα μειώνεται συνεχώς, ώσπου πρακτικά η κίνηση θα σταματήσει .

Μία ταλάντωση κατά την οποία η συνολική ενέργεια δε διατηρείται σταθερή ονομάζεται **φθίνουσα** ή **αποσβεννυμένη·** ουσιαστικά, όλες οι ταλαντώσεις στη φύση είναι φθίνουσες .

Λογικά, λοιπόν, προκειμένου να διατηρήσουμε μία τέτοια ταλάντωση, πρέπει να συνεχίσουμε να την τροφοδοτούμε με ενέργεια .

Πράγματι : όταν προσπαθούμε να διατηρήσουμε την αιώρηση του παιδιού, χρησιμοποιούμε το σχοινί, ώστε να έλκουμε περιοδικά προς το μέρος μας την κούνια. Οι έλξεις γίνονται, συνήθως, ρυθμικά· δηλαδή εφαρμόζουμε περιοδικά μία εξωτερική δύναμη πάνω στην κούνια .

Με κατάλληλη έλξη, την κατάλληλη χρονική στιγμή, το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται κάθε φορά και μεγαλύτερο .

Το αποτέλεσμα είναι γνωστό : την αιώρηση με το μεγαλύτερο πλάτος την επιτυγχάνουμε, εάν εφαρμόζουμε για λίγο μία ελκτική δύναμη κάθε φορά που η κούνια έχει μόλις φτάσει στο μακρυνότερο σημείο της διαδρομής της - απέναντί μας - και αρχίζει να επιστρέφει (βλ. Εικ. 85)· τότε, όμως, η συχνότητα, f της εξωτερικής περιοδικής δύναμης είναι ίδια με τη συχνότητα, f_0 , της ελεύθερης αιώρησης της κούνιας[20].

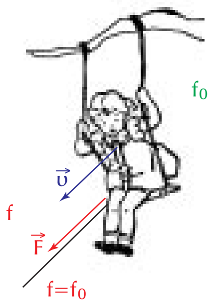
Παρατηρήστε ότι, σ' αυτή την περίπτωση, η δύναμη και η κίνηση έχουν την ίδια φορά (βλ. Εικ. 66)· δηλαδή το έργο της εξωτερικής δύναμης στη μονάδα του χρόνου είναι παραγόμενο .

---

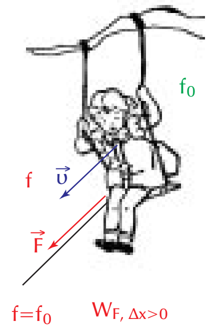
[20] *Η κούνια ('αιώρα') κινείται ήδη με τη συχνότητα της ελεύθερης ταλάντωσής της .*

Σε μία τέτοια ταλάντωση την κατάσταση κατά την οποία παρατηρούμε το μέγιστο πλάτος την ονομάζουμε συντονισμό .

Κατά το συντονισμό σε σύστημα με απώλειες (όπως είναι και η κούνια) το πλάτος παίρνει μία συγκεκριμένη μέγιστη τιμή, άρα η μέγιστη δυναμική ενέργεια και η συνολική ενέργεια διατηρούν μία σταθερή τιμή· αυτό σημαίνει ότι κατά το συντονισμό ο ρυθμός με τον οποίο οι δυνάμεις τριβής καταναλώνουν έργο είναι ίδιος με το ρυθμό με τον οποίο η εξωτερική περιοδική δύναμη παράγει έργο .



Εικ. 65



Εικ. 66

Την ταλάντωση η οποία εκτελείται υπό την επίδραση εξωτερικής περιοδικής δύναμης - ανεξάρτητα από το εάν βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού ή όχι - την ονομάζουμε εξαναγκασμένη ταλάντωση.

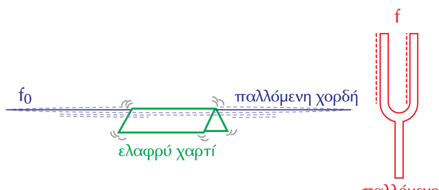
Παραδείγματα συντονισμού

Το φαινόμενο του συντονισμού εμφανίζεται ή μπορεί να εμφανιστεί σχεδόν παντού στη φύση :

Όλα τα υλικά ή, γενικότερα, τα φυσικά συστήματα έχουν μία συχνότητα, η οποία εξαρτάται από χαρακτηριστικά της κατασκευής τους (‘φυσικά χαρακτηριστικά’) και με την οποία εκτελούν τις ελεύθερες ταλαντώσεις τους .

Αυτή η συχνότητα ονομάζεται φυσική συχνότητα [21], f_0 .

Όταν συμβεί να εφαρμόζουμε στο σύστημα μία εξωτερική περιοδική δύναμη με τέτοια συχνότητα, f ώστε ο αντίστοιχος ρυθμός προσφοράς ενέργειας σ’ αυτό να αντισταθμίζει σε κάθε κύκλο τις απώλειες του συστήματος σε ενέργεια, τότε το σύστημα ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος.



Εικ. 65

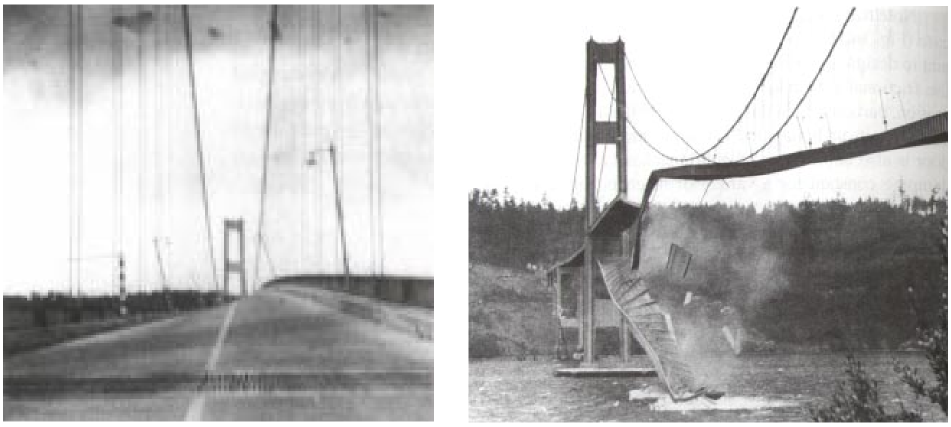
Μερικές φορές το φαινόμενο το χρησιμοποιούμε επωφελώς, για να συντονίσουμε, π.χ., τις χορδές ενός εγχόρδου σε μία συγκεκριμένη συχνότητα με τη βοήθεια ενός διαπασών (βλ. Εικ. 67) (‘κούρντισμα’ οργάνου) .

---

[21] *ή ιδιοσυχνότητα*

Άλλες φορές το φαινόμενο του συντονισμού μπορεί να αποβεί καταστροφικό, δημιουργώντας πολύ μεγάλη απομάκρυνση από την κατάσταση ισορροπίας του συστήματος, π.χ. μίας κατασκευής, και, τελικά, καταστροφή του όπως της γέφυρας του Tacoma Narrows, η οποία κατέρρευσε το 1940 λόγω συντονισμού που προήλθε από οριζόντιο άνεμο .

Ο άνεμος σχημάτιζε περιοδικά δίνες κάτω από την γέφυρα. Κάθε φορά που σχηματιζόταν μία δίνη η γέφυρα δεχόταν ένα πλήγμα. Η συχνότητα με την οποία δεχόταν η γέφυρα αυτά τα περιοδικά πλήγματα ήταν όση και η φυσική συχνότητά της (βλ. Εικ. 68) .



Εικ. 68

Πάντως, το ατυχές στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν ήταν μόνο η σύμπτωση των δύο συχνοτήτων αλλά και το ότι η γέφυρα κατά την ταλάντωσή της δεν είχε μεγάλες απώλειες, με αποτέλεσμα κατά το συντονισμό της να φτάσει σε αρκετά μεγάλο πλάτος .

Μπορούμε να αναφέρουμε και άλλα παραδείγματα όπως το σπάσιμο ενός κρυστάλλινου ποτηριού του κρασιού (βλ. Εικ. 69) σε συντονισμό με κάποια από τις υψηλές συχνότητες της φωνής ενός υψίφωνου τραγουδιστή της όπερας, ή όπως η μέγιστου πλάτους ταλάντωση πού εκτελεί κατακόρυφα ένα τρένο, όταν αυτό - τρέχοντας πάνω στις σιδηροτροχιές - συντονίζεται κατά την διάρκεια της κατακόρυφης εξαναγκασμένης ταλάντωσής του την οποία εκτελεί λόγω των κατακόρυφων πληγμάτων που δέχονται περιοδικά οι τροχοί του από τα σημεία όπου οι τελευταίες ενώνονται μεταξύ τους (βλ. Εικ. 70) .

Εικ. 69

Εικ. 70

Ένα πείραμα συντονισμού στο εργαστήριο

Η διάταξη της φωτογραφίας (βλ. Εικ. 71) περιλαμβάνει μία γεννήτρια συχνοτήτων, ένα δονητή που συνδέεται μαζί της, καθώς και ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από δύο κατακόρυφα ελατήρια και από ένα σώμα μεταξύ των δύο ελατηρίων .

Ο δονητής μπορεί να δέχεται εναλλασσόμενη αρμονική τάση γνωστής συχνότητας και να τη μετατρέπει σε απλή αρμονική ταλάντωση της ίδιας συχνότητας στο κατώτερο άκρο του κάτω ελατηρίου .

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να υποβάλουμε το σύστημα, διαδοχικά, σε εξαναγκασμένες[22] ταλαντώσεις με συχνότητες που θα επιλέγουμε με τη βοήθεια της γεννήτριας συχνοτήτων .

Εικ. 71

6η Πειραματική δραστηριότητα

- ◊ Συναρμολογήστε τη διάταξη της Εικόνας 71 .
- ◊ Προσδιορίστε πειραματικά τη φυσική κυκλική συχνότητα, ω_0, του συστήματος .
- ◊ Επιλέξτε στη γεννήτρια συχνοτήτων μία κυκλική συχνότητα, ω, μικρότερη από την ω_0,και υποβάλετε το σύστημα σε εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα την ω.
- ◊ Αφού αφήσετε να σταθεροποιηθεί το φαινόμενο που ακολουθεί, μετρήστε το πλάτος της σταθεροποιημένης ταλάντωσης που εκτελεί η μάζα .
- ◊ Επαναλάβετε το ίδιο και με άλλες κυκλικές συχνότητες κάτω και πάνω από την τιμή ω_0 , φροντίζοντας να έχετε και μερικές τιμές της ω πολύ κοντά σ' αυτήν .

---

[22]*Η μελέτη των φυσικών ταλαντώσεων του συστήματος, πειραματική και θεωρητική, μπορεί να ανατεθεί ως συνθετική εργασία από τον καθηγητή .*

- Τι παρατηρείτε κατά την εξαναγκασμένη ταλάντωση του σώματος ;
- Κατασκευάστε το διάγραμμα : πλάτους της ταλάντωσης – κυκλικής συχνότητας .
- Τι παρατηρείτε στο διάγραμμα ;

Στο προηγούμενο πείραμα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι :

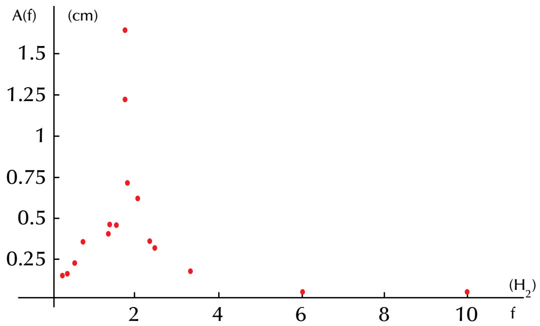
α. Το σώμα τείνει προοδευτικά να ταλαντωθεί με την κυκλική συχνότητα, *ω*, που του επιβάλλουμε εξωτερικά · τελικά ταλαντώνεται με την εξωτερική κυκλική συχνότητα, ω_0, έστω και εάν προηγουμένως ταλαντωνόταν με τη φυσική κυκλική συχνότητά του, ω.

β. Ο χρόνος μετάβασης του συστήματος σε ταλάντωση με κυκλική συχνότητα την ω_0 ποικίλλει, ανάλογα με την τιμή του *ω*: όσο πιο κοντά στη φυσική συχνότητα, ω_0, βρίσκεται η τιμή του *ω* τόσο πιο πολύ χρόνο χρειάζεται το σύστημα για να φτάσει σε μία σταθεροποιημένη ταλάντωση .

γ. Το πλάτος της ταλάντωσης κατά τη μεταβατική περίοδο φαίνεται να μεταβάλλεται, αυξομειούμενο περιοδικά με συχνότητα μικρότερη από αυτήν που έχει το κύριο φαινόμενο .

δ. Για τις σταθεροποιημένες ταλαντώσεις προέκυψε το εξής διάγραμμα του πλάτους, $A(f)$, σε συνάρτηση με τη συχνότητα, f :

Διάγραμμα Χ



Εικ. 72

όπου φαίνεται καθαρά ότι το μέγιστο πλάτος παρατηρείται περίπου για την τιμή $f \cong 1.4\,\text{Hz}$, η οποία βρίσκεται πολύ κοντά στη φυσική συχνότητα $f \cong 1.38$ Hz του συστήματος - την οποία είχαμε προσδιορίσει προηγουμένως επίσης πειραματικά .

Στη συνέχεια, θα δώσουμε μία ποιοτική, περισσότερο, περιγραφή για το πώς συμπεριφέρεται ένα φυσικό σύστημα, όταν, αναγκαστεί να εκτελέσει εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με συχνότητα διαφορετική από τη φυσική του .

Επίσης, θα δούμε πότε επιτυγχάνεται συντονισμός – άλλοτε επιθυμητός και άλλοτε ανεπιθύμητος (μερικές φορές και καταστροφικός) – κατά την εξαναγκασμένη ταλάντωση ενός φυσικού συστήματος .

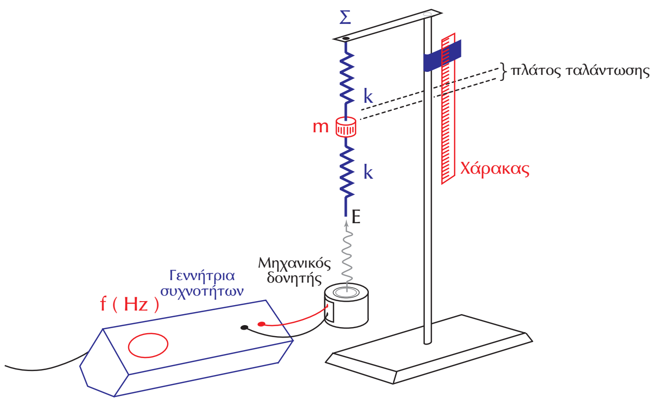
4.4-2 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις και συντονισμός – – Καμπύλη συντονισμού

Η ελεύθερη ταλάντωση ενός φυσικού συστήματος

Κάθε φυσικό σύστημα διαθέτει από την κατασκευή του μία φυσική συχνότητα, ω_0. Με αυτήν ακριβώς την συχνότητα - εάν το σύστημα διαταραχθεί λίγο, έστω, x_0, από τη θέση ισορροπίας του και στη συνέχεια αφεθεί ελεύθερο - θα αρχίσει να εκτελεί μία ελεύθερη ταλάντωση, η οποία θα είναι πάντοτε απλή αρμονική ταλάντωση μικρού πλάτους (x_0) :

$$x = x_0 \text{ συν } \omega_0 t \qquad (2)$$

Ένα τέτοιο σύστημα χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη πειραματική δραστηριότητα (6η), και εικονίζεται στην Εικόνα 73: αποτελείται από ένα σώμα μάζας, *m*, και από δύο κατακόρυφα ελατήρια της ίδιας ελαστικής σταθεράς, έστω k.



Εικ. 73

Η φυσική κυκλική συχνότητα του συγκεκριμένου συστήματος δίνεται από τη σχέση :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{2\,k}{m}} \qquad (3)$$

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις ενός φυσικού συστήματος

Το συγκεκριμένο φυσικό σύστημα μπορεί να δεχτεί εξωτερική περιοδική δύναμη – συνήθως αρμονική - επιλεγόμενου πλάτους, F_0, και επιλεγόμενης κυκλικής συχνότητας, ω, μέσω ενός μηχανικού ταλαντωτή συνδεδεμένου στο ελεύθερο άκρο του, Ε :

$$F_{\varepsilon\xi} = F_0 \, \sigma\upsilon\nu \, \omega t \qquad (4)$$

Υπό την μόνιμη επίδραση της παραπάνω δύναμης (όπως είδαμε και στο πείραμα) το σύστημά μας άρχισε να εκτελεί μία εξαναγκασμένη ταλάντωση διαφορετική από την ελεύθερη ταλάντωσή του .

Παρατηρήσαμε ότι, κατά το αρχικό χρονικό διάστημα εφαρμογής της εξωτερικής δύναμης, η εξαναγκασμένη ταλάντωση δεν είχε σταθερό πλάτος (μεταβατικό φαινόμενο) .

Κατά το μεταβατικό φαινόμενο το σύστημα “θυμάται” ακόμη τη φυσική κυκλική συχνότητά του, ω_0, ενώ εμείς προσπαθούμε να του επιβάλουμε, από έξω, μία άλλη κίνηση, εφαρμόζοντας πάνω του αρμονική δύναμη κυκλικής συχνότητας, ω.

Παρατηρήσαμε επιπλέον, όμως, ότι, μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης πρακτικά σταθεροποιήθηκε σε μία τιμή, έστω, X_0, και ότι η εξαναγκασμένη ταλάντωση έγινε απλή αρμονική :

$$x = X_0 \, \sigma\upsilon\nu \, \omega t \qquad (6)$$

με κυκλική συχνότητα, ω, αυτήν της εξωτερικής περιοδικής δύναμης.

Η κατάσταση στην οποία, τελικά, καταλήγει το σύστημα – όπου η φυσική ταλάντωση του συστήματος δεν είναι αισθητή και όπου η εξωτερική ταλάντωση έχει κυριαρχήσει, πρακτικά, πλήρως - ονομάζεται μόνιμη ή στάσιμη κατάσταση, και με αυτήν, ουσιαστικά, θα ασχοληθούμε .

Το πλάτος X_0 και η κυκλική συχνότητα, ω, της εξαναγκασμένης ταλάντωσης στη μόνιμη κατάσταση ονομάζονται, αντίστοιχα, πλάτος και κυκλική συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης .

Οποιοδήποτε φυσικό σύστημα μπορεί να δεχτεί εξωτερική περιοδική δύναμη, να εκτελέσει εξαναγκασμένες ταλαντώσεις - επιθυμητές ή ανεπιθύμητες – και να παρουσιάσει την παραπάνω συμπεριφορά .

Σχέση συντονισμού

Το πλάτος X_0, θεωρώντας, για λόγους απλότητας, μόνο αμείωτες εξαναγκασμένες ταλαντώσεις , μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί [23] :

$$X_0 = \frac{F_0}{D - m\,\omega^2} \qquad (12)$$

όπου: m, D τα χαρακτηριστικά των ελεύθερων ταλαντώσεων του συστήματος και ω F_0 τα χαρακτηριστικά (κυκλική συχνότητα και πλάτος) της εξωτερικής αρμονικής δύναμης . Η σχέση (12) ονομάζεται 'σχέση συντονισμού' .

Καμπύλη Συντονισμού

Στο διάγραμμα που ακολουθεί (βλ. Εικ. 74) βλέπετε πώς μεταβάλλεται - σύμφωνα με την (12) - το πλάτος, $X_0 = A(f)$, ως συνάρτηση της συχνότητας, $f = \frac{\omega}{2\pi}$, της εξωτερικής δύναμης (4):

Διάγραμμα XI

Εικ. 74

Εικ. 74 Η συγκεκριμένη δύναμη που εφαρμόζεται στο σύστημα της Εικόνας 74 έχει πλάτος $F_0 = 1.62 \times 10^{-3}$N και συχνότητες οι οποίες κυμαίνονται στην περιοχή τιμών 0.1 – 10.0Hz, ενώ η φυσική συχνότητα του συστήματος είναι ν_0 = 1.38 Hz και η μάζα του σώματος m =46 gr.

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω καμπύλη συντονισμού έχει την ίδια μορφή με τις αντίστοιχες πειραματικές καμπύλες της Εικόνας 72.

Επίσης, παρατηρούμε ότι το πλάτος X_0 για $\omega \cong \omega_0$ προβλέπεται να παίρνει πολύ μεγάλες τιμές.

Ειδικότερα, όμως, για $\omega \cong \omega_0$: το Α (ω) προβλέπεται να γίνεται άπειρο.

Στην πραγματικότητα, το πλάτος ταλάντωσης κατά το συντονισμό γίνεται απλώς αρκετά μεγάλο [24], όπως διαπιστώσαμε (βλ. Εικ. 72) στο Εργαστήριο Φυσικής (πειραματική δραστηριότητα (6η)) .

---

[24] Άπειρο θα γινόταν σε ένα ιδανικό φυσικό σύστημα χωρίς τριβές (μοντέλο), που θα εκτελούσε εξαναγκασμένη ταλάντωση Ή τέτοιο, όμως, σύστημα στην πραγματικότητα δεν υπάρχει και ούτε πρόκειται ποτέ να κατασκευαστεί (βλ. 2ο θερμοδυναμικό νόμο, κεφάλαιο 1).

Το πόσο μεγάλο γίνεται το πλάτος κατά το συντονισμό εξαρτάται από την ποιότητα του εξαναγκαζόμενου σε ταλάντωση συστήματος. Μεγαλύτερο πλάτος πετυχαίνουμε, όταν σε ένα σύστημα μειώσουμε τις τριβές (συντελεστής ποιότητας μεγάλος). Στην περίπτωση, όμως, της γέφυρας Tacoma Narrows, που κατέρρευσε το 1940, όταν την ξανακατασκεύασαν, χρειάστηκε να τη σχεδιάσουν με τρόπο που να έχει μεγαλύτερες τριβές (δηλαδή, να παρουσιάζει μικρότερο συντελεστή ποιότητας ο συντονισμός), ώστε, όταν αυτή, ενδεχομένως, ξανασυντονιζόταν, να παρουσιάζε μικρότερο πλάτος, το οποίο, πλέον, δε θα ήταν ικανό να τη θέσει σε κίνδυνο νέας κατάρρευσης.

Αριθμητική εφαρμογή:

Ένα πλοίο με βύθισμα h = 4.9 m, σε ήρεμη θάλασσα, μπορεί – εφόσον διαταραχτεί από τη θέση όπου ισορροπεί κατά την κατακόρυφο - να αρχίσει να εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση ως προς την επιφάνεια της θάλασσας με περίοδο, περίπου, $T_0 = 4.433$s.

Το ίδιο πλοίο σε ένα ταξίδι του ακινητοποιείται από βλάβη στις μηχανές του και συναντάει κύματα των οποίων δύο διαδοχικές κορυφές απέχουν L = 20m. Τα κύματα έχουν τέτοια μορφή, ώστε να ασκούν κατακόρυφα πάνω στο πλοίο εξωτερική αρμονική δύναμη .

α. Ποια ταχύτητα των κυμάτων θα προκαλούσε ταλάντωση με μέγιστο πλάτος στο πλοίο με κίνδυνο να μετατοπιστεί το φορτίο του και να βουλιάξει ;

β. Εάν οι μηχανές του πλοίου δούλευαν, θα μπορούσε ο καπετάνιος να αποφύγει το συντονισμό του πλοίου από τη συγκεκριμένη συχνότητα με την οποία τα κύματα φτάνουν στο πλοίο και το ανυψώνουν περιοδικά ; Πώς θα μπορούσε να γίνει αυτό ;

Απαντήσεις:

α. Η συχνότητα, έστω f, με την οποία τα κύματα φτάνουν στο πλοίο αποτελεί τη συχνότητα της εξωτερικής αρμονικής δύναμης που ασκείται κατακόρυφα πάνω του .

Εάν ο χρόνος που χρειάζεται μία κορυφή κύματος, για να διατρέξει την απόσταση L, που απέχουν μεταξύ τους δύο διαδοχικές κορυφές, είναι, T, τότε η ταχύτητα του κύματος θα δίνεται από τη σχέση :

$$\upsilon = \frac{L}{T} \qquad (1)$$

Η συχνότητα , f , θα δίνεται από τη σχέση :

$$f = \frac{1 \text{ άφιξη κορυφής κύματος}}{T} \qquad (2)$$

Η ταχύτητα, υ του κύματος σε σχέση με τη συχνότητα, f , του κυματισμού θα δίνεται (λόγω των (1) και (2)) από τη σχέση :

$$\upsilon = L f \qquad (3)$$

Το πλοίο θα κάνει, κατακόρυφα, ταλαντώσεις μέγιστου πλάτους, εάν συμβεί η συχνότητα του κυματισμού να συμπέσει με τη συχνότητα των ελεύθερων ταλαντώσεων ("ιδιοσυχνότητα") του πλοίου :

$$f = f_0 \qquad (4)$$

Η ταχύτητα, έστω υ^*, του κυματισμού, η οποία θα προκαλέσει ταλάντωση μέγιστου πλάτους στο πλοίο, θα δίνεται, λοιπόν, (λόγω των (3) έως (4)), από τη σχέση :

$$\upsilon^* = L f_0 = \frac{L}{T_0} \qquad (A)$$

Οπότε :

$$\upsilon^* \cong \frac{20\,\text{m}}{4.443\,\text{s}} \cong 4.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (A')$$

β. Όταν οι μηχανές του πλοίου δουλεύουν, ο καπετάνιος έχει την δυνατότητα να δώσει κάποια ταχύτητα στο πλοίο, η οποία συνδυαζόμενη με την ταχύτητα του κυματισμού αλλάζει την ταχύτητα με την οποία τα κύματα θα φτάνουν στο πλοίο (σχετική ταχύτητα) . Κατ' αυτό τον τρόπο αλλάζει η συχνότητα του κυματισμού, η οποία επιλέγεται να έχει τιμή που να απέχει από τη δεδομένη τιμή της ιδιοσυχνότητας του πλοίου.

4.4-3 Η σημασία του συντονισμού στην Τεχνολογία και στην Έρευνα

Ο συντονισμός εμφανίζεται σχεδόν παντού στη φύση και συμμετέχει σε διαδικασίες ανταλλαγής ή απορρόφησης ενέργειας. Με τέτοιες διαδικασίες επιλεκτικής απορρόφησης ενέργειας συγκεκριμένης συχνότητας εξηγείται η δημιουργία των χρωμάτων γύρω μας ή της παρουσίας των διαφανών υλικών.

Με ανάλογες μεθόδους οι επιστήμονες , μιμούμενοι τη φύση, χρησιμοποιούν τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις που προκαλούν ηλεκτρομαγνητικά κύματα, προκειμένου να μελετήσουν τη δομή της ύλης ή τις κινήσεις των μακρινών ουράνιων σωμάτων, μελετώντας τα γραμμικά τους ή τα συνεχή φάσματα απορρόφησης .

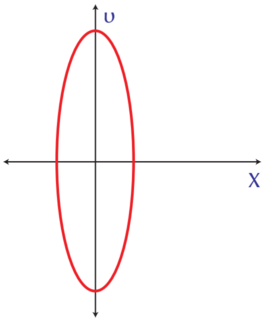
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ -ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Όσο πιο συχνά επαναλαμβάνεται ένα περιοδικό φαινόμενο τόσο η συχνότητά του :
α. είναι μικρότερη β. είναι μεγαλύτερη γ. αλλάζει γρηγορότερα τιμές
2. Ένα (1) Hz ισούται με $\frac{2\pi \text{ rad}}{\text{s}}$: α. σωστό β. λάθος
3. Το μικρότερο πουλί που υπάρχει, το «κολιμπρί », κινεί τα φτερά του πάνω κάτω με συχνότητα 70 $\frac{c}{s}$. Κάθε πόσο χρονικό διάστημα τα φτερά του αλλάζουν κατεύθυνση κίνησης ;
4. Γεωστατικός λέγεται ένας δορυφόρος ο οποίος παραμένει σταθερά πάνω από ένα σημείο της επιφάνειας της γης (π.χ. ένας τηλεπικοινωνιακός δορυφόρος). Με ποια συχνότητα περιστρέφεται γύρω από τη γη ;
5. Όταν κουνάμε τα χέρια μας μπροστά στη φωτισμένη οθόνη του υπολογιστή μας ή μπροστά στην τηλεόραση, η κίνησή τους μας φαίνεται διακοπτόμενη . Γιατί συμβαίνει αυτό ;
6. Ένα ποδήλατο κινείται στο σκοτάδι . Κοντά του αναβοσβήνει το φλάς ενός αυτοκινήτου με συχνότητα $f = 2\,\text{Hz}$, και οι ακτίνες του ποδηλάτου φαίνονται ακίνητες. Οι τροχοί του ποδηλάτου έχουν ακτίνα R = 28 cm. Με ποια μεταφορική ταχύτητα κινείται το ποδήλατο ;
7. Πολλές φορές σε ταινίες του σινεμά βλέπουμε ότι οι τροχοί στις άμαξες ή σε κάποια παλιά αυτοκίνητα περιστρέφονται ανάποδα από ό,τι θα περιμέναμε για την κίνηση πού βλέπουμε στην οθόνη . Γιατί συμβαίνει αυτό ;
8. Κάθε ομαλή κυκλική κίνηση δημιουργεί απλή αρμονική ταλάντωση .
α. σωστό β. λάθος
9. Η απλή αρμονική ταλάντωση και η αντίστοιχη ομαλή κυκλική κίνηση έχουν:
α. την ίδια περίοδο β. διαφορετικές περιόδους γ. την ίδια συχνότητα δ.διαφορετικές συχνότητες ε. την ίδια κυκλική συχνότητα ζ. διαφορετικές κυκλικές συχνότητες
10. Μία κίνηση είναι απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους x_0 = 3cm και συχνότητας $f = \frac{1}{2\pi}\,\text{Hz}$. Γράψτε την εξίσωση θέσης και την εξίσωση της ταχύτητας του κινητού σε σχέση με το χρόνο .
11. Μπορούμε να καταλήξουμε σε μία σχέση μεταξύ της μέγιστης επιτάχυνσης α_0, της μέγιστης ταχύτητας υ_0, και της μέγιστης απομάκρυνσης R (ή x_0) και πώς ; Ποια θα είναι τότε η ακριβής εξίσωση της επιτάχυνσης στην απλή αρμονική ταλάντωση ;
12. Όλες οι απλές αρμονικές ταλαντώσεις στη φύση είναι φθίνουσες :
α. σωστό β. λάθος

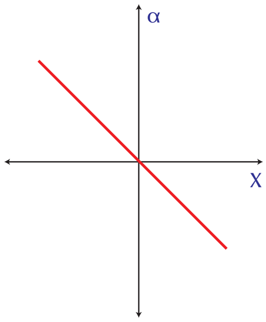
13. Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι :
α. ιδανική κίνηση β. δεν υπάρχει στη φύση γ. μπορεί να είναι φθίνουσα δ. έχει σταθερό πλάτος ε. έχει σταθερή κυκλική συχνότητα η. δεν έχει σταθερή περίοδο .

14. Από τα παρακάτω διαγράμματα ποιο παριστάνει απλή αρμονική ταλάντωση ;

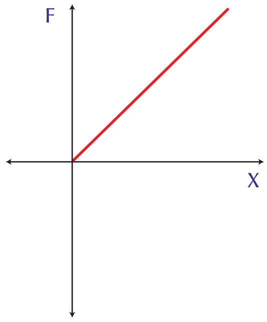
Διάγραμμα I



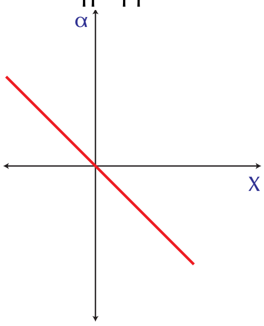
Διάγραμμα II



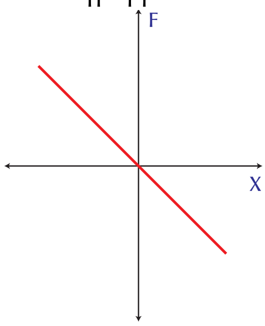
Διάγραμμα III



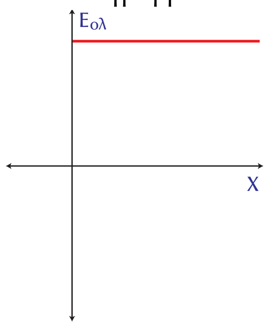
Διάγραμμα IV



Διάγραμμα V



Διάγραμμα VI



15. Προσδιορίστε την περίοδο της ελεύθερης ταλάντωσης του συστήματος της εικόνας 36, για $k = 33.25\,\frac{N}{m}$ και μάζα αμαξιδίου m = 1.044Kgr.

16. Εξαναγκασμένη λέγεται μία ταλάντωση η οποία γίνεται υπό την επίδραση μόνο περιοδικής εξωτερικής δύναμης :
α. σωστό β. λάθος

17. Ο συντονισμός εμφανίζεται :
α. κατά τις ελεύθερες ταλαντώσεις ενός συστήματος
β. μόνο σε φυσικά συστήματα
γ. μόνο σε τεχνητά συστήματα
δ. στη Μηχανική
ε. μόνο στη Μηχανική
ζ. κατά τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις οποιουδήποτε συστήματος φυσικού ή τεχνητού

η. κάθε φορά πού έχουμε εξαναγκασμένη ταλάντωση

θ. όταν έχουμε εξαναγκασμένη ταλάντωση και συμβεί η εξωτερική κυκλική συχνότητα ω να είναι λίγο μικρότερη από τη φυσική κυκλική συχνότητα του συστήματος ω_0 .

18. Στα (πραγματικά) φυσικά συστήματα ο συντονισμός εμφανίζεται :

α. όταν $f \equiv f_0$ **β.** όταν $f \cong f_0$ (και $(\kappa\alpha\iota\ f < f_0)$) **γ.** ποτέ

δ. μόνον όταν δεν υπάρχουν τριβές **ε.** μόνον όταν υπάρχουν τριβές

19. Ο συντονισμός, όταν συμβεί κατά τη διάρκεια μίας εξαναγκασμένης ταλάντωσης, προκαλεί τόσο μεγαλύτερο πλάτος σ' αυτήν όσο οι τριβές του συστήματος είναι μικρότερες :

α. σωστό β. λάθος

20. Μία γέφυρα η οποία από την κατασκευή της είναι "ελαφριά" και παρουσιάζει μικρές τριβές κινδυνεύει λιγότερο από το φαινόμενο του συντονισμού:

α. σωστό β. λάθος

21. Προσδιορίστε τη φυσική συχνότητα του συστήματος στην εικόνα 71 για ελαστική σταθερά κάθε ελατηρίου $k = 2.278\ \frac{N}{m}$ και μάζα σώματος $m = 46.25$ gr(θεωρήστε ότι τα δύο ελατήρια είναι ιδανικά) .

22. Η ίδια εξωτερική αρμονική δύναμη πάνω σε δύο διαφορετικά φυσικά συστήματα θα επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα :

α. σωστό β. λάθος

23. Όταν ένα σύστημα αρχίζει να εκτελεί μία εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση μίας εξωτερικής περιοδικής δύναμης, είναι σωστό αμέσως μετά να προσπαθούμε να μετρήσουμε το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης ;

24. Δύο μαθητές διαθέτουν ένα ελατήριο άγνωστης ελαστικής σταθεράς , δύο ίσες μάζες, m και νήμα του οποίου το μήκος μπορούν να επιλέγουν . Επιθυμούν να κατασκευάσουν δύο ταλαντούμενες διατάξεις, μία διάταξη σώμα—ελατήριο και ένα απλό εκκρεμές, οι οποίες να έχουν την ίδια ακριβώς περίοδο . Πώς θα μπορέσουν να το επιτύχουν ;

25. Ένα αντικείμενο κινούμενο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $x_0 = 0.02$ m και συχνότητας $f = 20\,\text{Hz}$. . Υπολογίστε :

(i) την περίοδο της ταλάντωσης, (ii) την επιτάχυνση του αντικειμένου στο 'κέντρο της ταλάντωσης' (δηλαδή στη θέση ισορροπίας) και στα ακραία σημεία της ταλάντωσης (δηλαδή στα 'σημεία αναστροφής της κίνησης'), (iii) τις αντίστοιχες ταχύτητες του αντικειμένου στα ίδια σημεία .

26. Ένα σώμα μάζας $m = 0.2$ kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $x_0 = 20$mm. Η μέγιστη δύναμη η οποία δρα πάνω στο σώμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης είναι $F_{max} = 0.064$ N. Υπολογίστε :

(i) τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος, (ii) την περίοδο της ταλάντωσης,

(iii) την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης και (iv) τη συχνότητα της ταλάντωσης .

27. Ιδανικό ελατήριο με ελαστική σταθερά $k = 5.0\,\frac{N}{m}$ τοποθετείται οριζόντια πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Το ένα άκρο του ελατηρίου είναι σταθερό, ενώ στο ελεύθερο άκρο του προσαρμόζεται σώμα μάζας m = 0.20 kg. Στη συνέχεια, το σώμα απομακρύνεται οριζόντια, κατά x_0= 4 mm από τη θέση όπου ισορροπεί, και αφήνεται ελεύθερο. Θα είναι η κίνηση που θα ακολουθήσει απλή αρμονική ταλάντωση και γιατί ; Αν ναι, υπολογίστε : (i) την περίοδο, (ii) τη μέγιστη επιτάχυνση, (iii) τη μέγιστη κινητική ενέργεια, και (iv) τη μέγιστη δυναμική ενέργεια του συστήματος ελατήριο-σώμα

28. Σώμα μάζας m = 0.10 kg προσαρμόζεται στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου 'ιδανικού' ελατηρίου - του οποίου το άνω άκρο είναι σταθερό – και προκαλεί την επιμήκυνση του ελατηρίου κατά $\Delta\ell = 0.04\,\text{m}$ . .

Στη συνέχεια, τραβάμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω, κατά x_0 = 4mm από την προηγούμενη θέση, και το αφήνουμε ελεύθερο . Υπολογίστε : (i) την περίοδο, (ii) τη μέγιστη δύναμη που δρα πάνω στο σώμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης, και (iii) την κινητική ενέργεια του συστήματος όταν το σώμα διέρχεται από το κέντρο της ταλάντωσης .

29. Σώμα κρέμεται από ένα ελαφρύ ελατήριο . Τραβάμε το σώμα προς τα κάτω κατά από την θέση ισορροπίας και μετά το αφήνουμε ελεύθερο . Παρατηρούμε ότι το σώμα εκτελεί περιοδική κίνηση με συχνότητα f=0.50Hz.

(i) Περιγράψτε τη θέση του ταλαντούμενου σώματος .

(ii) Υπολογίστε την επιτάχυνση του σώματος τη στιγμή που αυτό αφήνεται ελεύθερο .

(iii) Δώστε το διάγραμμα της δύναμης που ασκείται πάνω στο σώμα ως συνάρτηση του χρόνου για χρονικό διάστημα τριών περιόδων .

(iv) Κατά τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα έχει συμπληρώσει τον τέταρτο κύκλο της περιοδικής κίνησής του, αποκολλάται απότομα η μισή μάζα του, ενώ η υπόλοιπη παραμένει προσαρμοσμένη στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου .

Τι θα συμβεί στην κίνηση του υπόλοιπου συστήματος ; Θα εξακολουθήσει να εκτελεί περιοδική κίνηση ; Τι θα αλλάξει στη νέα κίνηση ;

30. Ένα απλό εκκρεμές έχει περίοδο ταλάντωσης T_1 = 4.2s. Όταν κοντύνουμε το μήκος του νήματος του εκκρεμούς κατά $\Delta\ell = 1\,\text{m}$, τότε η περίοδός του γίνεται T_2 = 3.7s . Υπολογίστε από τα παραπάνω δεδομένα την επιτάχυνση της βαρύτητας, g στον τόπο όπου συνέβησαν τα παραπάνω, καθώς και το αρχικό μήκος του νήματος του εκκρεμούς .

31. Το σώμα ενός απλού εκκρεμούς κινείται εκτελώντας απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους 8 cm και περιόδου T = 2s Η μάζα του σώματος είναι m =0.5 kg .

Θεωρώντας αμελητέες τις απώλειες ενέργειας, υπολογίστε :

(i) τη μέγιστη ταχύτητα και τη μέγιστη κινητική ενέργεια της μάζας του εκκρεμούς,

(ii) την τάση του νήματος όταν το σώμα διέρχεται από το κέντρο της ταλάντωσής του .

32. Ένα απλό εκκρεμές έχει μήκος ℓ και είναι ανηρτημένο από το σταθερό σημείο O′, ενώ ισορροπεί, κατακόρυφα, όταν η μάζα του βρίσκεται στο σημείο O. Τοποθετούμε στο σημείο *M* πάνω στην κατακόρυφο OO′ και σε απόσταση $(OM) = \frac{\ell}{4}$ από το σώμα ένα καρφί, που θα εμποδίζει το νήμα να μείνει τεντωμένο, όποτε φτάνει στη θέση αυτή κινούμενο προς τα αριστερά .

Εκτρέπουμε λίγο, πάλι, το εκκρεμές από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε να ταλαντωθεί ελεύθερα .

(i) Περιγράψτε και εξηγήστε την κίνηση του εκκρεμούς· η νέα κίνηση θα είναι περιοδική ;

(ii) Προσδιορίστε τη νέα περίοδο και συγκρίνετέ την με την προηγούμενη.

(iii) Σε ποιο ύψος θα βρίσκεται το A″, όπου θα αναστρέψει για πρώτη φορά την κίνησή του το σώμα μετά την έναρξη της αιώρησής του στο *A*;

(iv) Ποια θα είναι η ταχύτητα του σώματος στο σημείο O;

(v) Εκτός από την περίοδο τι άλλο θα αλλάζει μεταξύ των δύο α.α.τ. δεξιά και αριστερά από την κατακόρυφο O′MO;

33. Μικρό νόμισμα βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο τραπέζι ως προς το οποίοδεν κινείται, ενώ το τραπέζι εκτελεί ταλαντώσεις κατακόρυφα . Εάν οι ταλαντώσεις αυτές έχουν πλάτος x_0 = 100 cm, υπολογίστε τη μέγιστη συχνότητα ταλάντωσης, κατά την κατακόρυφο, για την οποία το σώμα θα μπορεί να διατηρεί ακόμη την επαφή του με το οριζόντιο τραπέζι .

34. Η συνολική ενέργεια ανά ταλαντούμενο άτομο ενός ‘κρυσταλλικού πλέγματος’ που βρίσκεται σε απόλυτη θερμοκρασία, T, είναι E = 3 kT, όπου k η σταθερά του Boltzmann (k =1.38×10^{-23} J grad^{-1}).

Υποθέτοντας ότι τα άτομα του χαλκού στο κρυσταλλικό πλέγμα του χαλκού (Cu) εκτελούν το καθένα απλή αρμονική ταλάντωση - γύρω από τη μέση θέση ισορροπίας τους στο πλέγμα - που στην απόλυτη θερμοκρασία, T = 300^o K, έχει πλάτος x_0 = 8.0×10^{-11} m, υπολογίστε τη συχνότητα, f, αυτής της ταλάντωσης . Δίνεται ότι η μάζα ενός ατόμου του χαλκού είναι $m_{cu} = 1.06 \times 10^{-25}$ kg: .

35. Θεωρήστε το σύστημα του αμαξιδίου με τα δύο οριζόντια ελατήρια στη σελίδα 219 (Εικ. 36). Υποθέστε ότι το αμαξίδιο έχει μάζα m =3.0 kg και ότι, υπό την επίδραση των δύο ελατηρίων, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς καθόλου τριβές . Η περιγραφή της θέσης του μέσου του αμαξιδίου από το σημείο όπου αυτό ισορροπεί δίνεται από την εξίσωση :

$$x = 0.6 \text{ m συν } (0.5\pi\, t)$$

Υπολογίστε : (i) το πλάτος και την περίοδο της κίνησης, (ii) την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας ύστερα από χρόνο 4s, (iii) την ταχύτητα του αμαξιδίου μετά από 1s, και (iv) τη μέγιστη κινητική ενέργεια του αμαξιδίου.

Θεωρήστε ότι τα δύο ελατήρια είναι ιδανικά και αγνοήστε τριβές και την περιστροφή των τροχών.

36. Στο παραπάνω σύστημα, σε πραγματικές συνθήκες πειράματος, όπουυπήρχαν σημαντικές τριβές είχαμε αρχική απομάκρυνση x_0= 21.125 cm.

Προσδιορίστε την αρχική δυναμική ενέργεια του συστήματος . Στο ίδιο πείραμα μετά χρόνο $\frac{T}{2}$ το αμαξίδιο έφτασε στο απέναντι σημείο αναστροφής σε απόσταση x_0= 19.7 cm από τη θέση ισορροπίας . Προσδιορίστε τη νέα δυναμική ενέργεια .

Είναι η κίνηση αυτή απλή αρμονική ταλάντωση ή είναι φθίνουσα ταλάντωση; Πόσο ποσοστό της αρχικής ολικής ενέργειας χάθηκε από το σύστημα προς το περιβάλλον υπό μορφή θερμότητας ;

37. Σε ένα λιμάνι παρουσιάζεται το φαινόμενο της παλίρροιας, δηλαδή της περιοδικής ύψωσης της στάθμης των νερών .Στις 12.00 η ώρα το μεσημέρι, όταν έχουμε άμπωτη, το βάθος των νερών στην είσοδο του λιμανιού είναι 10m . Στις 18.15 η ώρα, όταν έχουμε πλημμυρίδα, το νερό έχει βάθος 30 m στην είσοδο του λιμανιού. Ένα δεξαμενόπλοιο που περιμένει στα ανοικτά χρειάζεται τουλάχιστον 15m βάθος νερού, για να μπορέσει να μπει με ασφάλεια στο λιμάνι . Υποθέτοντας ότι η στάθμη των νερών στην είσοδο του λιμανιού μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο, να βρείτε, ποια είναι η πρώτη χρονική στιγμή, μετά τις 12.00, κατά την οποία, το πλοίο, θα μπορεί να περάσει με ασφάλεια από την είσοδο του λιμανιού .

38. Σύμφωνα με στατιστικές για τα αεροπορικά ταξίδια περίπου οι μισοί από τους επιβάτες υποφέρουν από ναυτία λόγω κατακόρυφων αναταράξεων που προκαλούν κατακόρυφες ταλαντώσεις στο αεροπλάνο, όταν αυτές διαρκούν περισσότερο από T_0 = 5 min, γίνονται με μέγιστη επιτάχυνση α_{max}= 0.25 g- όπου g επιτάχυνση της βαρύτητας - και με μία συχνότητα $f \cong 0.3$ Hz.

Υποθέτοντας ότι μία τέτοια οριακή ταλάντωση είναι απλή αρμονική, βρείτε το πλάτος της.

39. Το μέσον μίας χορδής βιολιού ταλαντώνεται με πλάτος x_0 = 2.5 mm και συχνότητα f= 440 Hz. Υπολογίστε :

(i) τη μέγιστη ταχύτητα, υ_{max}, και τη μέγιστη επιτάχυνση, α_{max} , αυτού του σημείου της χορδής, και

(ii) τη συνολική ενέργεια της ταλαντούμενης χορδής, εάν γνωρίζετε ότι αυτή δίνεται από την έκφραση $E = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)(\upsilon_{max})^2$, όπου η μάζα m ≅ 10g της χορδή.

40. Μία εξαιρετικά ευαίσθητη στις κινήσεις ηλεκτρονική συσκευή θα κατεστρέφετο, εάν ταλαντωνόταν με συχνότητα μεγαλύτερη από την f_{max}= 10 Hz.. Η συσκευή μεταφέρεται μέσα σε κιβώτιο, το οποίο στηρίζεται πάνω σε τέσσερα όμοια ελατήρια . Η συνολική μάζα του κιβωτίου και της συσκευής είναι Μ = 50kg Πώς θα έπρεπε να επιλεγούν τα ελατήρια, ώστε η συσκευή να μεταφέρεται με όσο γίνεται μεγαλύτερη ασφάλεια ;

41. Μία προς τα κάτω κατακόρυφη δύναμη, F = 250 N , από το χέρι μας πάνω στο 'φτερό' ενός αυτοκινήτου μάζας m = 725 kg προκαλεί ένα κατέβασμα του αυτοκινήτου κατά Δx = 0.025 m. Τα ελατήρια και στα τέσσερα 'αμορτισέρ' του αυτοκινήτου είναι ίδια . Υπολογίστε :

(i) την ελαστική σταθερά, k, κάθε ελατηρίου αμορτισέρ,

(ii) την περίοδο της φυσικής ταλάντωσης του αυτοκινήτου, κατακόρυφα, όταν ένας οδηγός μάζας $m_{οδ}$ =75 kg καθίσει στο τιμόνι, και

(iii) τι θα συμβεί στο αυτοκίνητο, όταν αυτό τρέχει με ταχύτητα υ = 17.0 m s^{-1}και συναντάει συνεχώς 'σαμαράκια', τα οποία απέχουν κατά L =15.0 m το ένα από το άλλο ;